Programme du cours de DEA

“Familles de formes modulaires et théorème de Fermat”

(A. Pantchichkine, 2e semestre 2000/2001)

1. La méthode de descente infinie de Fermat. Démonstration de $FLT(4)$.
2. Unités cyclotomiques de l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Non-factorialité. Nombres premiers réguliers, théorème de Kummer et critère de Kummer (sans démonstrations).
3. Sous-groupes de congruence $\Gamma_0(n)$, $\Gamma_1(n)$, $\Gamma(n)$ leur indice dans $SL_2(\mathbb{Z})$. L'isomorphisme $\Gamma_0(n)/\Gamma_1(n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
4. Courbes algébriques de Frey, leur semi-stabilité.
5. Groupes de Galois infinis, groupes de décomposition, groupes d'inertie, éléments de Frobénius.
6. Théorème de Čebotarev (sans démonstration). Exemple : corps cyclotomiques et théorème de Dirichlet.
7. Représentations galoisiennes sur un anneau (définitions, exemples). Théorème de Kronecker-Weber (sans démonstration).
8. Formes modulaires comme séries de Fourier formelles. Exemples : fonction de Ramanujan, séries d'Eisenstein.
9. Représentations galoisiennes modulaires. Le cas de corps fini. Théorème de Ribet (sans démonstration).
10. Conjecture de Shimura-Taniyama-Weil (en termes de points modulo ℓ). Théorèmes de Breuil-Conrad-Diamond-Taylor et de Wiles (sans démonstrations).
11. Caractères de groupes finis sur un corps. Exemples : $(S_3, A_4, S_4, GL_2(\mathbb{F}_3))$.
12. Lemme de Schur et relations d'orthogonalité. Irréductibilité absolue.
13. Théorème de réductibilité complète d'une représentation d'un groupe fini sur un corps de caractéristique 0.
14. Représentations galoisiennes impaires et le théorème d'irréductibilité absolue.

15. Fonction L d'Artin d'une représentation galoisienne. Conducteur d'Artin (définition algébrique).

16. Conjecture d'Artin et l'équation fonctionnelle.

17. Formes modulaires avec caractères de Dirichlet (définitions, exemples). Interprétation galoisienne.

18. Fonction L d'une forme modulaire. Produit d'Euler et des opérateurs de Hecke $T_\ell(\sum_{n\geq 0} a(n)q^n) = \sum_{n\geq 0} a(n\ell)q^n + \chi(\ell)\ell^{k-1}\sum_{n\geq 0} a(n)q^{n\ell}$.

19. Théorème direct et réciproque sur les fonctions L.

20. Formes primitives et leurs propriétés (sans démonstration).

21. L'existence de représentations galoisiennes modulaires. Construction d'Eichler-Shimura (sans démonstration).

22. Théorème d'irréductibilité de représentations galoisiennes des formes paraboliques (schéma de démonstration).

23. Théorème de Deligne-Serre (formes modulaires de poids 1).

24. Théorème de Langlands-Tunnell (sans démonstration).

25. Déformations de représentations sur les corps finis (définitions, exemples).

26. Type de déformations. Déformations admissibles et modulaires. Admissibilité des déformations modulaires.

27. Représentabilité des foncteurs de déformations. Construction de Lenstra (sans démonstration).

28. Invariants de Wiles d'algèbres locales nœthériennes complètes sur un anneau $\mathcal{O}$ de valuation discrète. Premier critère d'isomorphie.

29. J-structures (définition). Deuxième critère d'isomorphie. Exemples d'algèbres locales d'intersection complète.

30. Interprétation cohomologique de l'espace tangent $\Phi_{R_\mathcal{D}}$ et contrôle de la croissance pour $\Sigma' = \Sigma \cup \{q\}$ (sans démonstration).

31. L'invariant relatif de congruences $\eta_{\mathcal{D}'|\mathcal{D}}$ et son calcul en termes de l'opérateur de Hecke T_q (sans démonstration).

32. L'existence d'une J-structure au cas minimal.

33. Cohomologies de groupes. Interprétation de H^0, H^1, H^2. Longue suite exacte. Suite d'inflation-restriction.

34. Théorie de Kummer et théorème 90 de Hilbert.
35. Déformations infinitésimales de représentations de groupes et leurs descriptions (H^1, Ext^1).
36. Théorème de dualité de Tate locale (sans démonstration).
37. Loi d'addition sur une courbe elliptique.
38. L'équation de Weierstrass et points d'ordre fini sur $\mathbb{C}$.
39. Représentation p-adique attachée à une courbe elliptique.
40. Modularité de la représentation modulo 3 (cas irréductible).
41. Courbes modulaires et interprétation de leurs points.
42. Théorème d'irréductibilité (mod 3 ou mod 5).
43. Modularité des courbes elliptiques semi-stables (application du relèvement modulaire des représentations).
44. Familles des courbes semi-stables de même représentation modulo 5.
45. Familles analytiques des formes modulaires (définitions, exemples).