Fonctions Hypergéométriques
et diagonales de fractions rationnelles

La fonction $\quad {}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$

est-elle une diagonale ?

Gilles Christol

Université Pierre et Marie Curie

Grenoble février 2014

Plan de l'exposé

1. La conjecture DFR
   - Diagonales de fraction rationnelle
   - La conjecture
   - Comparaison avec la conjecture de Grothendieck
2. Arguments en faveur de DFR
   - G-fonction et Géométrie
   - Caractériser les DFR parmi les G-fonctions
   - Filtrations par le poids
   - Le cas des fonctions hypergéométriques
3. Arguments contre DFR
   - Équations différentielles autoadjointes
   - Données expérimentales

Diagonale d'une fraction rationnelle

Notation : $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n)) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}[[x_0,\ldots,x_n]][\frac{1}{x_0\cdots x_n}]$,

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(x_0,\ldots,x_n)\bigcap\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$

[C'est-à-dire dont le dénominateur Q est *inversible* dans $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$] .

Elle s'écrit $f(x_0,\ldots,x_n) = \sum_{r_i\le s_i} a_{s_0\cdots s_n}\ x_0^{s_0}\cdots x_n^{s_n}$,

et la série $\mathrm{Diag}\left(\dfrac{P}{Q}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum a_{s\cdots s}\ x^s \qquad \in \mathbb{Q}((x)) = \mathbb{Q}[[x]][\dfrac{1}{x}]$

s'appelle *diagonale de (la fraction rationnelle)* $\frac{P}{Q}$.

Remarque importante

On peut considérer aussi les *diagonales des séries* de $\mathbb{Q}((x_0,\ldots,x_n))$ qui sont *algébriques* sur $\mathbb{Q}(x_0,\ldots,x_n)$. Mais on ne trouve pas de nouvelles fonctions.

Propriétés

Une diagonale de fraction rationnelle f est une série entière :

D-finie : $\exists\ L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]\ ,\ L \neq 0$, tel que $L(f) = 0$,

globalement bornée : $\exists\ c\,,\,d \in \mathbb{N}^*,\quad d\,f(c\,x) \in \mathbb{Z}((x))$,

qui a un *rayon de convergence* (dans $\mathbb{C}$) *non nul* ,

globalement automatique : $\mathrm{pp}\forall p\ \forall h$, f est p-automatique modulo p^h .

On voudrait savoir si les trois premières propriétés sont caractéristiques [on peut, conjecturalement, en déduire directement la troisième].

On appellera *pseudo-diagonale* toute série entière ayant ces propriétés.

Conjecture DFR

Toute pseudo-diagonale est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Conjecture de Grothendieck (GR)

Si $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ a, pp$\forall p$, un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p[x]$, alors toutes ses solutions sont des fonctions algébriques.

conj. GR		conj. DFR
Pour presque tout p		Pour presque tout p
toutes les solutions sont	$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$	*la* solution est
(modulo p) dans $\mathbb{F}_p[x]$.	$\overset{(2)}{\Longleftarrow}$	dans $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

L'implication (2) est presque une équivalence :

- $\psi_p(L) = 0$ (p-courbure) $\Rightarrow ray_p(L) > |p|^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \exists\ M_p\ :\ L \overset{E_p}{\sim} \varphi_p^*(M_p)$.
- pp$\forall p$ $\psi_p(L) = 0$ $\overset{??}{\Rightarrow}$ pp$\forall p$ $\mathtt{Ray}_p(L) = 1$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ pp$\forall p$ $M_p \overset{E_p}{\sim} L$

  $\overset{?}{\Rightarrow}$ solutions globalement automatiques.
- Pour une solution f, on applique aux quotients "*p-unit root*" de L

  $\overset{?}{\Rightarrow}$ global automaticité de f ,

cela *peut* se traduire par une propriété du type $f(x) = P(x)f(x^p) \pmod p$.

Première étape vers DFR

Propriété caractéristique des G-fonctions (Yves André)

$f \in \mathbb{Q}[[x]]$ est une *G-fonction* ssi elle est *D-finie*, ses rayons de convergence (en 0) $\mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f)$ vérifiant la condition $\displaystyle\prod_{p \textit{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,0}^{\leq 1}(f) > 0$.

Condition de Galočkin

Pour $L \in \mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ c'est la condition $\displaystyle\prod_{p \text{ place de } \mathbb{Q}} \mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L) > 0$

où $\mathtt{Ray}_{p,\mathrm{Gauss}}(L)$ est le rayon de convergence des solutions de L au voisinage du point générique t_p correspondant à la norme de Gauss p-adique.

Théorème des Chudnovsky

L'équation différentielle *minimale* d'une *G-fonction* satisfait la condition de *Galočkin*. En particulier, elle n'a que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels.

Ceci s'applique évidemment aux pseudo-diagonales.

La conjecture géométrique

Elle dit que les G-opérateurs, les G fonctions et donc les pseudo diagonales

"*viennent de la géométrie*" .

Ceci signifie que toute pseudo diagonale a une *représentation intégrale* :

$$f(x) = \int_\gamma \omega(x)$$

avec :

- ω *n-forme différentielle* sur une variété quasi-projective $V \to S$ (définie au-dessus d'un ouvert S de $\mathbb{P}_1$), de dimension relative n . Donc $\omega(x)$ n-forme différentielle sur V_x (fibre au-dessus de x) ,
- γ *n-cycle* sur V (sur V_x et indépendant de x).

Connexion de Gauss-Manin (définition approximative)

Les "différentielles ω modulo les différentielles exactes" , forment un $\mathbb{Q}(x)$-espace vectoriel $\mathbb{H}^n(V_x/S)$ de *dimension finie* sur lequel agit la dérivation (sous le signe $\int$) $\frac{d}{dx}$.

Les "solutions" de ce module à connexion sont données par les γ .

Equation de Picard-Fuchs

Il existe L_ω dans $\mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ tel que $L_\omega(\omega)$ soit une différentielle exacte.

Les $\int_\gamma \omega(x)$ sont les solutions de L_ω (au-dessus de S).

Equation minimale

On note $L_{\omega,\gamma}$ le polynôme différentiel minimal de $\mathbb{Z}[x][\frac{d}{dx}]$ tel que

$$L_{\omega,\gamma}\Big(\int_\gamma \omega(x)\Big) = 0 \ .$$

Diagonale de fraction rationnelle : formule intégrale

Pour $F \in \mathbb{Q}((x_0, \ldots, x_n))$, on a $\mathrm{Diag}\Big(F\Big)(x) = \dfrac{1}{(2i\pi)^n} \displaystyle\int_\gamma \omega(x)$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i = \big\{|x_i| = \varepsilon\big\}^{\circlearrowleft}$ (cycle évanescent).
- $\omega = F\Big(\dfrac{x}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n\Big) \dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dx_n}{x_n}$

$$\omega \in \Omega^n(U \cap V/S) \text{ avec } \begin{cases} S & \supset C_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \{0 < |x| \leq \varepsilon^{n+1}\} \\ V & : \ \big\{x_0 \cdots x_n = x\big\} \subset \mathbb{A}^n_S \\ U & : \ \big\{F(\frac{x}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n) \text{ définie}\big\} \subset \mathbb{P}^n_S \end{cases}$$

* γ est un cycle dans V : $x_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_0 = \frac{x}{x_1 \cdots x_n} \neq 0$,

* Pour $x \in C_\varepsilon$, c'est un cycle dans U car sur γ , on a $|x_0| = |x|\varepsilon^{-n} \leq \varepsilon$.

* $V = \mathbb{A}^n_S - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{x_i = 0\}$.

Ramener la situation géométrique à celle des diagonales

Par le *théorème de résolution des singularités* (plongées) d'Hironaka on se ramène au cas où V_0 *est un diviseur à croisements normaux*.

Par le *théorème de réduction semi-stable* , quitte à *ramifier la variable* x on se ramène à V_0 *réduit* .

En pratique cela signifie que, *pour tout point* P *de* V_0, on peut choisir des *coordonnées locales* $x_0, \ldots, x_n$ telles que, au voisinage du point P,

"l'équation" de V soit $\quad x_0 \cdots x_r = x \quad , \quad 0 \leq r \leq n$

La représentation intégrale s'écrit alors

$$f(x) = \int_\gamma F(x_0, \ldots, x_n)\, \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_r}{x_r} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec F fonction algébrique
[les pôles multiples disparaissent car on calcule modulo les différentielles exactes].

QUESTION : Est-ce que γ est le cycle évanescent ????

Filtrations par le poids

Pour $\mathbb{H}^n$ (différentielles/exactes) : par l'ordre de leur pôle le long de V_0

ω est de poids au moins $n+k$ s'il existe un point P de V_0 près duquel

$$\omega = F(x_0, \ldots, x_n) \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_{i_k}}{x_{i_k}} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \qquad \text{avec } F(0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Pour $\mathcal{S}$ (solutions de l'équation de Picard-Fuchs) : par la monodromie

Solutions	f	$\{f\, log(x) + \cdots\}$	...	$\{f\, log^k(x) + \cdots\}$	(k maximum)
Poids	$-k$	$-k+2$	...	$+k$	

Théorème de Deligne-Steenbrink-Zucker

Les deux filtrations sont en dualité (via $(\gamma, \omega) \to \int_\gamma \omega(x)$) :

$$M_k\left(\mathbb{H}^n\right) = \mathtt{Ann}\ M_{n-k+1}\left(\mathcal{S}\right)$$

Corollaire

Les solutions de l'équation de Picard-Fuchs de poids $-n$ (donc minimum) sont des diagonales de fractions rationnelles.

Fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ rationnels, la fonction

$$F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; b_1, \ldots, b_n; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s \ldots (a_{n+1})_s}{(b_1)_s \ldots (b_n)_s} \frac{x^s}{s!}$$

$$(a)_0 = 1 \quad , \qquad (a)_s = a(a+1)(a+2)...(a+s-1), \qquad (s \geq 1)$$

vient de la géométrie : ${}_1F_0(a_1; ; x) = (1-x)^{a_1}$ et, pour $n > 1$

$${}_{n+1}F_n\,(\mathbf{a}, a_{n+1}; \mathbf{b}, b_n; x) = \quad \text{cste} \int_0^1 t^{a_{n+1}-1}(1-t)^{b_n - a_{n+1}-1}\; {}_nF_{n-1}\,(\mathbf{a}; \mathbf{b}; t\,x)\,dt$$

Ici, dim. relative $(V) = n$ et ordre de l'éq. diff. $= n+1$.

Pour fcts hypergéométriques, *"pseudo diagonale" = "globalement bornée"*.

F est D-finie :

$$x \prod_{i=1}^{n+1} \left(x\frac{d}{dx} + a_i \right) F(x) = x\frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{n} \left(x\frac{d}{dx} + b_i - 1 \right) F(x)$$

Représentation alternative

Soit $N \geq 2$, soit V_x définie par les équations :

$$x_1^N + y_1^N + 1 = 0 \ , \quad x_2^N + y_2^N + 1 = 0 \ , \quad x_3^N + y_3^N + 1 = 0 \ , \quad x_1 x_2 x_3 = x \ .$$

(donc de dimension relative 2) et soit

$$\omega(x) = x_1^p \, y_1^q \, x_2^r \, y_2^s \, y_3^t \, \frac{dx_1}{x_1} \, \frac{dx_2}{x_2} \ .$$

Alors pour un cycle bien choisi γ on a :

$$\int_\gamma \omega(x) = \text{cste} \quad {}_3F_2\left(\tfrac{-t}{N}, \tfrac{-p-q}{N}, \tfrac{-r-s}{N}; \tfrac{N-r}{N}, \tfrac{N-p}{N}; x^N\right) \ .$$

Remarque

La fibre V_0 est la réunion de 3 familles de N diviseurs à croisements “presque normaux”. Ceux de la première, par exemple, sont d’équations

$$x_1 = 0 \ , \quad y_1^N + 1 = 0 \ , \quad x_2^N + y_2^N + 1 = 0 \ , \quad x_3^N + y_3^N + 1 = 0 \ .$$

DFR et les fonctions hypergéométriques

Le poids de ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est : $-$ le nombre de 1 parmi les b_i.

La conjecture DFR est vraie pour le poids $-n$

Le corollaire dit que ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};1,\ldots,1;x)$ est une DFR et en effet :

$$ {}_{n+1}F_n(a_1,\ldots,a_{n+1};1,\ldots,1;x) = (1-x)^{a_1} \star \cdots \star (1-x)^{a_{n+1}} $$

La conjecture DFR est vraie pour le poids 0 (Beukers-Heckman)

On suppose les a_i et b_i dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ et les $b_i \neq 1$. Les conditions :

1) La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée et de poids 0,

2) Les $\exp(2i\pi\, k\, a_i)$ et les $\exp(2i\pi\, k\, b_i)$ sont entrelacés $\big(\forall k,\ (k,N)=1\big)$,

3) Le groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique est fini,

4) La fonction ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est algébrique.

sont équivalentes.

Les cas intermédiaires

On peut décider facilement si ${}_{n+1}F_n(\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ est globalement bornée.

On trouve des ${}_{n+1}F_n$ globalement bornées et de poids $k \in]-n,0[$:
${}_3F_2(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1;x)$, ${}_3F_2(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7};\frac{1}{2},1;x)$, ${}_3F_2(\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11};\frac{1}{2},1;x)$, ...
et aussi des ${}_4F_3$ de poids -1 ou -2 .

REMARQUE : on cherche des exemples *primitifs* (qui ne soient pas des produits de Hadamard de fonctions plus simples) et *représentatifs* (chaque exemple en donne plusieurs autres par les transformations $a_i \to k\,a_i \quad b_i \to k\,b_i \quad (k,N)=1$.

Ainsi $(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1) \to (\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1) \to (\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1)$
$\to (\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{7}{9};\frac{2}{3},1) \to (\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9};\frac{1}{3},1) \to (\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1)$

Par contre $(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9};\frac{1}{3},1)$ ne donne que $(\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9};\frac{2}{3},1)$!)

CES PSEUDO-DIAGONALES SONT-ELLES DES DIAGONALES ???

Équations différentielles autoadjointes

L'adjoint de $L = \sum f_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$ est $L^* = \sum (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} f_i(x)$.

[On pourrait définir directement la dualité au niveau des modules différentiels]

On dira que L est *autoadjoint* si les modules différentiels associés à L et L^* sont *isomorphes*.

- L autoadjoint

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(M)\ ,\quad M = N\,P \text{ et } L = K\,P \Rightarrow \deg P = 0\ , \qquad L\,M = Q\,L^*\ .$$

- Si L est irréductible la condition s'écrit

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\,(M)\ ,\quad \deg M < \deg L\ , \qquad L\,M = Q\,L^* \qquad (\text{et alors } Q = M^*)\ .$$

Remarque

Comme $\hom(L, L^*) = L \otimes L = \mathrm{ext}^2(L) \oplus \mathrm{sym}^2(L)$, L est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{ext}^2(L)$ ou $\mathrm{sym}^2(L)$ a une solution rationnelle non nulle.
Cela se "voit" donc dans son groupe de Galois.

Le point de vue expérimental

Constat

L'équation différentielle (minimale) de $\,_3F_2(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1;x)$ *n'est pas autoadjointe* , (même sur les fonctions algébriques).

Fait expérimental

Les facteurs irréductibles des équations différentielles minimales des diagonales de fractions rationnelles *sur lesquelles on a fait le test* sont autoadjoints.

Est-ce un indice de ce que $\,_3F_2(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9};\frac{1}{3},1;x)$ n'est pas une diagonale de fraction rationnelle ?

Le fait expérimental s'explique facilement :

Grâce à *Deligne et Steenbrink-Zucker* on sait que les connexions de Gauss-Manin sont des "variations de structure de Hodge mixtes *polarisées*".

En particulier, cela signifie qu'il existe une filtration (par le poids) dont les gradués associés sont auto-adjoints [ce sont les connexions de Gauss-Manin d'une famille projective et lisse pour laquelle il y a une dualité de Poincaré].

Être auto-adjoint n'est stable ni par sous-module ni par quotient !

Cas "générique" d'une formule intégrale

Si ω est un vecteur cyclique du $\mathbb{H}^n$, son équation différentielle minimale se décompose en un produit de facteurs auto-adjoints.

Dans les cas "petits" ces facteurs sont irréductibles.

Par contre l'équation minimale de ${}_3F_2(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1; x)$ correspond à un sous-module strict du gradué de poids 1.