

MÉCANIQUE QUANTIQUE SUR LE TORE ET DÉGÉNÉRESCENCES DANS LE SPECTRE

Frédéric FAURE

Table des Matières

1	Mécanique sur le tore	
1.1	Le tore en mécanique classique	
1.2	Le tore en mécanique quantique	
2	Les états cohérents standard	
2.1	Présentation et définition	
2.2	Représentation de Bargmann et de Husimi	
2.3	Distribution de Husimi des états stationnaires d'une dynamique intégrable	
3	Indice de Chern pour caractériser la topologie des bandes d'énergie	
3.1	Introduction	
3.2	Indice de Chern et dégénérescence entre niveaux	
4	L'indice de Chern dans des modèles intégrables	
4.1	Modèle de Harper à séparatrice unique	
4.2	Résonance entre deux trajectoires contractibles	
4.2.1	Deux modèles numériques	
4.2.2	Conditions pour l'apparition d'une dégénérescence	
4.2.3	Aspect qualitatif des lignes de dégénérescences	
5	Dynamique chaotique et indices de Chern	
5.1	Modèle de "Harper pulvé"	
5.2	Un modèle sans symétrie	
5.3	Présence de dégénérescences dans le cas chaotique	

Mécanique quantique sur le tore et dégénérescences dans le spectre.

Exposé du 17 décembre 1992 par Frédéric Faure.

Institut des Sciences Nucléaires, 38026 Grenoble.

Table des Matières

3	1	Mécanique sur le tore.
3	1.1	Le tore en mécanique classique.
3	1.2	Le tore en mécanique quantique.
8	2	Les états cohérents standard
8	2.1	Présentation et définition.
9	2.2	Représentation de Bargmann et de Husimi
10	2.3	Distribution de Husimi des états stationnaires d'une dynamique intégrable.
15	3	Indice de Chern pour caractériser la topologie des bandes d'énergie.
15	3.1	Introduction
15	3.2	Indice de Chern et dégénérescence entre niveaux.
17	4	L'indice de Chern dans des modèles intégrables
18	4.1	Modèle de Harper à séparatrice unique
19	4.2	Résonance entre deux trajectoires contractibles
20	4.2.1	Deux modèles numériques
22	4.2.2	Conditions pour l'apparition d'une dégénérescence
27	4.2.3	Aspect qualitatif des lignes de dégénérescences.
28	5	Dynamique chaotique et indices de Chern.
30	5.1	Modèle de "Harper pulse"
31	5.2	Un modèle sans symétrie.
38	5.3	Présence de dégénérescences dans le cas chaotique.
40		

avec corrections

Le travail présenté a été fait en collaboration avec P. Leboeuf de l'IPN d'Orsay.

Introduction :

Les modèles auxquels nous nous intéresserons sont du type du modèle de Harper et sont une formulation de la mécanique quantique sur le tore en tant qu'espace de phase. Ce type de modèle trouve ses applications essentiellement en physique du solide, et notamment pour l'effet Hall quantique, à la suite du résultat remarquable de K. von Klitzing et al. [1] en 1980 concernant la quantification de la conductivité de Hall σ_{xy} pour des électrons "bi-dimensionnels".

En effet le modèle physique direct qui correspond à cette dynamique sur le tore est un modèle d'électrons confinés dans une fine couche ($\sim 100 \text{ \AA}$) à l'interface entre des semi-conducteurs, à très faible température ($1 - 4^\circ K$), et dans un champ magnétique élevé ($3 - 15 \text{ Tesla}$). On suppose de plus que dans le plan (x, y) où ils sont confinés, les électrons sont soumis à un potentiel extérieur $V(x, y)$, bi-périodique en x et y , [2]. Ce potentiel peut-être créé par les atomes d'un réseau cristallin, ou celui créé artificiellement par des nano-structures [3]. Lorsqu'un faible champ électrique uniforme est appliqué, D.J. Thouless et al. [4] ont montré que chaque bande d'énergie sous le niveau de Fermi, contribue à la conductivité de Hall par un multiple entier de e^2/h . Cet entier qui est responsable de la quantification de la conductivité est un invariant topologique, c'est à dire qu'il est invariant sous les faibles perturbations de l'Hamiltonien comme celles qui prennent en compte les impuretés, les interactions entre électrons..., ce qui explique l'incroyable précision de la quantification entière observée dans les expériences; précision jusqu'à 10^{-8} . En mathématiques, cet entier s'appelle l'indice de Chern, et il est associé à chaque bande d'énergie. Un bon résumé de l'aspect topologique de l'effet Hall quantique et de son développement est par exemple celui de Y.S. Wu [5].

Pour des forts champs magnétiques, le couplage entre les différents niveaux de Landau peut-être négligé (c'est l'approximation du plus bas niveau de Landau) et le mouvement de l'électron est décrit par un Hamiltonien effectif $H(q, p)$ périodique en position comme *en impulsion*. Par exemple, si $V(x, y) = \cos(2\pi x) + \alpha \cos(2\pi y)$, alors l'Hamiltonien effectif est $H(q, p) = \cos(2\pi q) + \alpha \cos(2\pi p)$ (Hamiltonien de Harper). D'un point de vue dynamique le mouvement est intégrable, puisqu'il a un degré de liberté et que l'énergie est conservée.

Pour des champs magnétiques moins élevés, on s'attend à ce que le mouvement de l'électron soit chaotique.

$$\mathcal{H}(q + Q, p) = \mathcal{H}(q, p) + P \quad (1)$$

Supposons donné un Hamiltonien $\mathcal{H}(q, p)$ à un degré de liberté sur le plan \mathbb{R}^2 , périodique en position et impulsion, de périodes respectives Q et P :

1.1 Le tore en mécanique classique

Dans cette section, nous présentons la mécanique classique sur le tore en tant qu'espace de phase, et la mécanique quantique associée.

1 Mécanique sur le tore.

avec l'introduction de la phase de Berry [8].

La variation de l'indice de Chern dans l'étude des dégénérescences entre niveaux d'énergies est apparue avec les dégénérescences entre niveaux : pour un problème dépendant d'un paramètre, un autre aspect intéressant de l'indice de Chern qui sera mis en valeur, est son lien s'exprime à partir des zéros de la distribution de Husimi.

périodicité. En particulier, D.P. Arovas et al. [7] ont montré comment l'indice de Chern des modifications induites sur un état stationnaire par le changement des conditions de phase, et aussi parce qu'elle permet une visualisation directe dans l'espace d'abord parce qu'on peut souvent la comparer à des distributions classiques sur l'espace de phase des états quantiques, complète l'information apportée par l'indice de Chern. Tout D'un autre côté, la distribution de Husimi, qui fournit une représentation dans l'espace de l'indice de Chern non nul [6].

observe que dans un régime fortement chaotique, beaucoup de fonctions d'ondes ont un naire ayant une faible dépendance (pas de sensibilité) à un indice de Chern nul. Il a été des états stationnaires aux changements des conditions de périodicité. Un état stationnaire de Chern et les distributions de Husimi. L'indice de Chern caractérise la sensibilité des conditions de périodicité (θ_1, θ_2) . On combinera principalement deux objets différents: stationnaires de systèmes classiquement intégrables ou chaotiques, pour des changements L'objet de cet exposé est de présenter le comportement des valeurs propres et des états élémentaire.

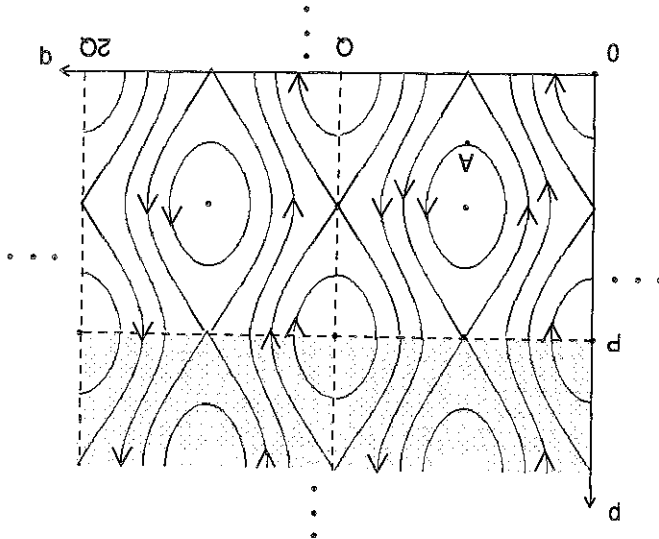
produits, reliés à la périodicité de la fonction d'onde sous les translations d'une cellule Dans le processus de quantification, deux paramètres quantiques (θ_1, θ_2) peuvent être in-

Afin de pouvoir étudier une dynamique plus riche, nous considérerons des Hamiltoniens et la dynamique classique sur ce tore est engendrée par le même Hamiltonien $\mathcal{H}(q, p)$. En faisant ces identifications, l'espace quotient obtenu est homéomorphe au tore T^2 , d'une translation du type $n_1\tilde{Q} + n_2\tilde{P}$, avec $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$.

côtés (\tilde{Q}, \tilde{P}) , autrement dit, en identifiant tous les points du plan qui diffèrent entre eux parons aucune information en identifiant les côtés opposés d'une cellule élémentaire de La propriété d'invariance de la dynamique sous les translations \tilde{Q} et \tilde{P} fait que nous ne la fonction $\mathcal{H}(q, p)$.

Remarque: d'après la conservation de l'énergie, et aussi du fait que ce soit un problème à un degré de liberté, les trajectoires sont localement identiques aux lignes de niveaux de

Figure 1: Trajectoires du modèle de Harper (3).



Les trajectoires sont représentées sur la figure 1.

$$\mathcal{H}(q, p) = -\cos(2\pi q/\tilde{Q}) - \frac{1}{2}\cos(2\pi p/\tilde{P}) \quad (3)$$

Exemple: modèle de Harper :

$$\begin{cases} \partial_t q(t) = \partial_p \mathcal{H}(q, p) \\ \partial_t p(t) = -\partial_q \mathcal{H}(q, p). \end{cases} \quad (2)$$

Equations de Hamilton :

et $\tilde{P} = (0, P)$.

Du fait de cette périodicité, la dynamique classique, définie par les équations de Hamilton, est elle-même périodique, ou plus précisément invariante par les translations $\tilde{Q} = (Q, 0)$

dépendants du temps au paragraphe 5. Il n'y aura plus alors les restrictions sur la dynamique imposées par la conservation de l'énergie, et nous pourrions observer dans de tels modèles une transition d'une dynamique régulière vers une dynamique chaotique.

1.2 Le tore en mécanique quantique

Nous supposons donné un Hamiltonien H à un degré de liberté, opérateur hermitique sur l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Dans les exemples que l'on traitera, un tel Hamiltonien sera donné par son expression à partir des opérateurs de position et d'impulsion \hat{q} et \hat{p} :

$$(4) \quad H = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})$$

(Nous rappelons que l'action des opérateurs \hat{q} , et \hat{p} sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$(5) \quad \hat{q}\Psi(x) = x\Psi(x), \quad \hat{p}\Psi(x) = -\frac{\hbar}{i}\partial_x\Psi(x)$$

Un vecteur de l'espace de Hilbert est noté $|\Psi\rangle$, et le vecteur dual correspondant est noté $\langle\Psi|$.

De plus, nous supposons que l'Hamiltonien H commute avec les opérateurs de translation en position et impulsion :

$$(6) \quad \hat{T}_Q = e^{-iQ\hat{p}/\hbar} \quad \hat{T}_P = e^{iP\hat{q}/\hbar}$$

c'est à dire :

$$(7) \quad [\hat{T}_Q, H] = [\hat{T}_P, H] = 0,$$

Connaisant l'expression (4) de l'Hamiltonien, la condition de commutation (7) est vérifiée si cette expression est périodique en \hat{q} et \hat{p} :

$$(8) \quad \mathcal{H}(\hat{q} + Q, \hat{p}) = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p} + P) = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})$$

Par exemple l'Hamiltonien de Harper, obtenu par quantification de Weyl de l'Hamiltonien classique (3), vérifie de telles conditions :

$$(9) \quad H = -\cos\left(2\pi\frac{\hat{Q}}{q}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{\hat{P}}{p}\right)$$

Afin que, grâce aux propriétés d'invariance par translation, l'étude de la dynamique quantique puisse se simplifier, il faut supposer que les trois opérateurs H , \hat{T}_Q et \hat{T}_P commutent

$$H|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle = E_n(\theta_1, \theta_2)|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle \quad n = 1 \rightarrow N. \quad (15)$$

Les Hamiltoniens H sont en nombre N , et le spectre est discret:

$$\dim \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) = N \quad (14)$$

Ainsi, dans chaque sous-espace $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$, les états stationnaires, vecteurs propres de position et impulsion (i.e. et dont la transformée de Fourier est aussi périodique), à des phases près θ_1 et θ_2 . Et chaque sous-espace est de dimension finie N . (cela apparaîtra page 12, on se montre en exhibant une base.)

$$\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ t.q. } \begin{cases} \hat{T}_Q |\Psi\rangle = e^{i\theta_1} |\Psi\rangle \\ \hat{T}_P |\Psi\rangle = e^{i\theta_2} |\Psi\rangle \end{cases} \right. \text{ avec } (\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2. \quad (13)$$

$$\mathcal{H} = \iint \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (12)$$

Décomposons l'espace de Hilbert \mathcal{H} en la somme directe des sous-espaces propres des opérateurs de translation \hat{T}_Q et \hat{T}_P :

Une telle relation entre la surface de l'espace de phase classique et la constante de Planck se rencontre généralement lors de la quantification de surfaces compactes au moyen d'états cohérents [9].

La relation (11) s'interprète de la manière suivante : la surface Q_P du tore est un multiple entier de la constante de Planck h .

$$\hat{T}_Q = e^A \quad \hat{T}_P = e^B \quad (11)$$

(Pour montrer ce dernier point, nous utilisons la propriété: $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$, vraie pour deux opérateurs A, B vérifiant : $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$; appliquée ici à

avec $N \in \mathbb{N}$, et en posant $h = 2\pi$.

$$Q_P = Nh \quad (11)$$

Cette dernière équation est équivalente à:

$$[\hat{T}_Q, \hat{T}_P] = 0 \quad (10)$$

En plus de l'équation (7), il faut donc supposer:

entre eux. Car dans ce cas ces trois opérateurs sont diagonalisables simultanément.

de Hilbert en sous-espaces de dimension N , à la différence près que la décomposition se Nous obtenons donc à nouveau l'équation (11) et la décomposition qui s'en suit de l'espace qui s'écrit aussi: $Nh = (tQ)P$.

$$(18) \quad h = \frac{N}{t} QP \quad (N, t) \in \mathbb{N}$$

Nous pouvons cependant obtenir un nombre dense de valeurs de h dans \mathbb{R} , en posant:

$$(17) \quad h = \frac{1}{N} QP \quad N \in \mathbb{N}$$

• La condition (11) peut paraître très restrictive, car en effet Q, P étant fixes, elle ne permet d'étudier qu'un nombre discret de valeurs de h .

$$(16) \quad \text{cardinal} \{ \text{états} | \Psi_n > \text{t.q. } E_1 < E_n < E_2 \} = \frac{1}{h} (\text{Volume}(g, p) \text{ t.q. } E_1 < \mathcal{H}(g, p) < E_2) + o\left(\frac{1}{h}\right)$$

Sommerfeld, de Weyl ou de Thomas-Fermi, pour la limite $h \rightarrow 0$: C'est aussi cette relation que l'on retrouve dans les formules asymptotiques de Bohr- de phase.

• Les relations (11) et (14) s'interprètent comme le fait que le nombre d'états quantiques est égal au nombre de cellules de Planck (surface élémentaire h) contenues dans l'espace dépendance sera quantitativement exprimée par l'indice topologique de Chern.

Dans les exemples que nous traiterons, nous verrons qu'au contraire, les états stationnaires peuvent avoir une forte dépendance en fonction des paramètres (θ_1, θ_2) , et cette Mais y a-t-il une limite commune pour leur spectre et leurs états stationnaires (15) ?

dynamiques ont une unique limite classique commune d'Hamiltonien $\mathcal{H}(g, p)$ sur le tore. chaque valeur de $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$, et interne à chaque sous-espace $\mathcal{H}^N(\theta_1, \theta_2)$. Toutes ces On s'aperçoit qu'il y a une infinité de dynamiques quantiques d'Hamiltonien H , une pour

D'après la relation (11), la limite classique $h \rightarrow 0$ est obtenue pour $N \rightarrow +\infty$.

Le spectre global de H est donc formé de N bandes.

sera décrite dans la section 2.6, à l'aide de l'indice de Chern.

De la même façon, les vecteurs propres $|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle >$ de chaque niveau n décrivent une surface dans l'espace projectif pour $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$. La topologie de ce fibré en droites de physique du solide, dans le cadre de la théorie de Bloch, c'est à dire un segment de \mathbb{R} . $E_n(\theta_1, \theta_2)$ varie de façon continue et décrit une bande d'énergie (selon la terminologie Par contre, à n fixé et pour (θ_1, θ_2) variant dans $[0; 2\pi]^2$, chaque niveau n d'énergie

Remarques

Les états cohérents peuvent généralement être construits dans les problèmes habituels de mécanique quantique, traitant un système de particules dans l'espace, soumises à un potentiel. Ils apparaissent aussi en seconde quantification, dans le cas d'un champ bosonique, et sont ainsi beaucoup utilisés en physique nucléaire ou encore en optique

2 Les états cohérents standard

Figure 2: Structure en fractale du spectre "papillon de Hofstadter" du modèle de Harper (tirée de [11]). Pour $h = \frac{N}{4}$, fraction rationnelle irréductible donnée, le spectre est structuré en N bandes. Notons que si N est pair, les deux bandes centrales sont dégénérées.

fait cette fois-ci avec les sous-espaces propres de $\mathcal{T}^{(iq)}$ et \mathcal{T}^p . Classiquement, cela revient à considérer un espace de phase toroidal, contenant t répliques de la cellule de base (Q, P) . D'après (18), nous déduisons que lorsque h varie de façon continue parmi les réels, le spectre de l'Hamiltonien H peut présenter une structure compliquée en cantor, pour la première fois mis en évidence par R.D. Hofstadter [2] et ensuite analysée par M. Wilkinson [10]. En effet, en prenant, $QP = 1$, chaque fois que h est rationnel, $h = \frac{N}{4}$, le spectre est structuré en N bandes.

Par définition, les états cohérents sont les états quantiques obtenus en faisant agir les éléments $T(g)$ du groupe W_1 sur le vecteur normalisé $|0\rangle$. Le sous groupe d'isotropie

$$(23) \quad \begin{aligned} Id &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ |n\rangle\langle n| &= \frac{\sqrt{n!}}{1} a_+^n |0\rangle\langle 0| \\ a|0\rangle\langle n| &= 0 \end{aligned}$$

harmonique $H_0 = \hbar(a_+ a + \frac{1}{2}) = \hbar(q^2 + p^2)$: est engendré par les vecteurs $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, (qui sont les états propres de l'oscillateur avec $D(z) = \exp(za_+ - \bar{z}a)$). L'espace de Hilbert qui est l'espace de représentation,

$$(22) \quad T(g) = \exp(is Id) D(z), \quad s \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}, g \in W_1.$$

moyen des opérateurs $T(g)$ agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: Weyl W_1 . Une représentation unitaire irréductible du groupe de Weyl W_1 est obtenue au (a_+, Id) ou (\hat{q}, \hat{p}, Id) sont des bases de l'algèbre de Weyl W_1 , et engendrent le groupe de

$$(21) \quad [a, a_+] = Id$$

qui vérifient:

$$(20) \quad a = \frac{\sqrt{2\hbar}}{1} (\hat{q} + i\hat{p}), \quad a_+ = \frac{\sqrt{2\hbar}}{1} (\hat{q} - i\hat{p})$$

Il est commode de considérer les opérateurs de création a_+ et d'annihilation a :

$$(19) \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar Id$$

Nous allons rappeler la définition et les propriétés générales des états cohérents du plan (ou standard), que l'on peut trouver dans le livre de A. Perelomov [9]. Pour un système à un degré de liberté, les opérateurs de position \hat{q} et d'impulsion \hat{p} vérifient :

2.1 Présentation et définition.

limite classique. Mais le concept d'états cohérents est assez général, et est associé à la représentation linéaire unitaire de groupes de Lie [9]. Pour les états cohérents standard, il s'agit du groupe de Weyl W . Les états cohérents touchent ainsi un large éventail de domaines en physique [13], et ont des propriétés particulièrement bien adaptées pour envisager la limite classique.

pour étudier le champ de photons [12].

$$Id = \int_0^{\infty} d\mu(z) |z\rangle_n \langle z| \quad (30)$$

Une relation importante est la relation de fermeture qui est une conséquence du lemme de Schur combiné au fait que W_1 agit de façon irréductible dans \mathcal{H} :

2.2 Représentation de Bargmann et de Husimi

avec $\langle z|z\rangle = e^{z\bar{z}}$.

$$|z\rangle_n = \frac{\langle z|z\rangle^{1/2}}{\langle z|z\rangle} \quad (29)$$

Ces vecteurs $|z\rangle$ ne sont pas normalisés, et:

$$|z\rangle = e^{z\bar{a}^+} |0\rangle_n \quad (28)$$

holomorphe des états cohérents à partir de (24):

L'action particulière de a sur l'état $|0\rangle$, voir (23), fait que l'on obtient une représentation classiques.

cohérents dans l'approche semi-classique et qui fait aussi qu'on les surnomme états quasi-états localisés en position et impulsion à la limite $\hbar \rightarrow 0$ qui constitue l'intérêt des états les états cohérents par $|q, p\rangle_n = |z\rangle_n$. C'est cette propriété particulière d'être des dont le module est une gaussienne de largeur $\sim \sqrt{\hbar}$ centrée en $y = p$. On note aussi

$$\tilde{\Psi}(y) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{y}{2\hbar}\right] \exp\left[-\frac{y^2}{2\hbar}\right] \exp\left[-i\frac{y}{\hbar}\right] \quad (27)$$

Fourier (ou représentation impulsion "p") est:

Le module est donc une gaussienne de largeur $\sim \sqrt{\hbar}$ centrée en $x = q$. Sa transformée de

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip). \quad (26)$$

avec:

$$\Psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[\frac{ix}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{x^2}{2\hbar}\right] \exp\left[-i\frac{x}{\hbar}\right] \quad (25)$$

La fonction d'onde d'un état cohérent standard (ou représentation position "x") est :

$$|z\rangle_n = D(z)|0\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

jectif, paramétrisée par $z \in \mathbb{C}$, et dont les vecteurs normalisés représentants sont: cohérents standard forment donc une surface à deux dimensions réelles de l'espace pro- de cette action est $H = \{\exp(is Id), s \in \mathbb{R}\}$ qui laisse l'état $|0\rangle$ invariant. Les états

$$(33) \quad \text{cardinal}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} dz = N$$

1. Les zéros des distributions de Bargmann et de Husimi
 Les résultats qui suivent ont été obtenus par A. Voros et P. Leboeuf [14, 15]. Considérons un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$. La représentation de Bargmann $\Psi_\theta(z) = \langle z | \Psi \rangle$ est une fonction thêta de Jacobi. Ses zéros sont périodiques dans le plan \mathbb{C} , de période \bar{Q} et \bar{P} . Les zéros $(z_k)_k$ situés dans une cellule vérifient :

Propriétés :

C'est donc une gaussienne circulaire, de centre (q_0, p_0) et de largeur $\sim \sqrt{\hbar}$.

$$(32) \quad \mathcal{H}_{q_0, p_0}(q, p) = e^{-\frac{\pi}{\hbar}((q-q_0)^2 + (p-p_0)^2)}$$

En particulier la distribution de Husimi d'un état cohérent $|q_0, p_0\rangle >$ est :

$$(31) \quad |{}^n \langle q', p' | q, p \rangle^n|^2 = e^{-\frac{\pi}{\hbar}((q-q')^2 + (p-p')^2)} \rightarrow 0 \text{ si } (q, p) \neq (q', p')$$

devenant orthogonaux à la limite $\hbar \rightarrow 0$:

Bien qu'ils forment une base surcomplète, les états cohérents sont intéressants car ils

mécanique classique.

L'espace de phase et qui permet de faire des correspondances assez directes avec la

2. La représentation de Husimi $\mathcal{H}_\Psi(z) = |{}^n \langle z | \Psi \rangle|^2$ qui est une fonction positive sur

nant ses zéros (i.e. les lieux où elle est nulle).

en $z = (q + ip)/\sqrt{2\hbar}$. Des propriétés particulières en découlent, notamment concer-

1. La représentation de Bargmann $\Psi(z) = \langle z | \Psi \rangle$ qui est une fonction anti-holomorphe

Cela nous amène à deux représentations intéressantes :

fermeture.

ses composantes ${}^n \langle qp | \Psi \rangle >$ dans la famille des états cohérents à l'aide de cette relation de

d'un état quantique $|\Psi\rangle$ sur l'espace de phase s'obtient donc naturellement en considérant

forment une famille génératrice surcomplète de l'espace de Hilbert. Une représentation

avec : $d\mu(z) = \frac{\pi}{\hbar} dz \wedge d\bar{z}$. Cette relation de fermeture exprime que les états cohérents

se divisent en trois classes :

pour une dynamique intégrable, générée par un hamiltonien indépendant du temps, les méthodes semi-classiques comme la méthode W.K.B. montrent que certaines trajectoires périodiques (dites quantifiées) sont associées à des états stationnaires. Or les trajectoires

2.3 Distribution de Husimi des états stationnaires d'une dynamique intégrable.

La figure 3 montre par exemple la distribution de Husimi de l'évolution d'un état cohérent avec l'hamiltonien de Harper (9).

$$(35) \quad i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H|\Psi(t)\rangle \quad > \quad |\Psi(0)\rangle = |q_0, p_0\rangle >$$

2. Evolution d'un état cohérent Une autre propriété qui fait que les états cohérents ont un rôle privilégié dans la limite classique est que un état cohérent reste approximativement un état cohérent lors de son évolution sous l'équation de Schrödinger :

La distribution de Husimi \mathcal{H}_Ψ est périodique sur le plan et donc définie sur le tore. Les zéros de $\Psi(z)$ sont les zéros de $\Psi(z)$, qui caractérisent l'état quantique.

de $\mathcal{H}^N(\theta_1, \theta_2)$ est N .

liberté de phase globale), on retrouve le résultat (14), qui affirme que la dimension dant à la multiplication des fonctions par un nombre complexe (qui correspond à la (34) est de dimension complexe $(N-1)$. En rajoutant une dimension correspond- Remarquons au sujet des dimensions, que l'espace des N -uplets de zéros, vérifiant

l'équation (34) est déterminée (sauf sa phase globale) par l'emplacement des N zéros (z_k) dans la cellule. Finalement, comme l'ont mis en valeur P. Leboeuf et A. Voros [16, 15], signalons qu'un théorème de factorisation de Weierstrass affirme que la fonction $\Psi(z)$ est

avec $\omega_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{P}$ et $\omega_2 = i\frac{\sqrt{2\pi}}{P}$. Le barycentre des zéros est donc fixé.

$$(34) \quad \sum_{k=1}^N z_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} dz = -\frac{1}{N}(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_1 \frac{2\pi}{\theta_1} - \frac{2\pi}{\theta_2} \omega_2)$$

Il y a donc N zéros dans une cellule. Et :

$$(37) \quad \mathcal{H}_\Psi(q, p) = \mathcal{N} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{2} \frac{v(q, p)}{\mathcal{H}^W(q, p) - E}\right)} \left(\frac{1}{2} \frac{v(q, p)}{\mathcal{H}^W(q, p) - E} \right)$$

Alors, la distribution de Husimi du quasi-mode est (à l'ordre \hbar):

$$(36) \quad \oint_{\Gamma} p dq = \left(n + \frac{1}{2}\right)h + o(\hbar) \quad n \in \mathbb{N}$$

elle vérifie la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld:

Dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, une trajectoire Γ d'énergie E supporte un quasi-mode si Voici le résultat obtenu dans les articles [17, 18, 19]:

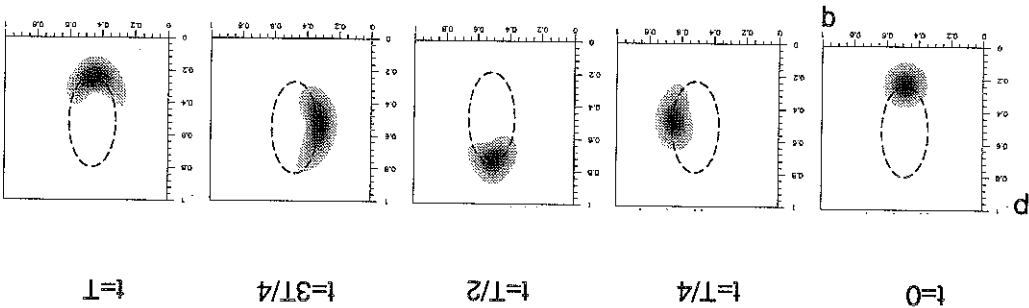
tout $\nu \geq 2$, et dans la limite $\hbar \rightarrow 0$.

mode vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ à l'ordre \hbar^r , pour de la distribution de Husimi sont localisées sur une trajectoire périodique, et ce quasi-périodiques. Un quasi-mode est un état quantique Ψ dont les régions de fortes amplitudes cas à une dimension, permet de construire des quasi-modes associées à des trajectoires de caustiques, propres à la représentation en position). La méthode W.K.B. dans le sur l'espace de phase, ce qui évite les problèmes de raccordements liés à la présence cas d'une dynamique intégrable, à l'aide d'une méthode W.K.B. modifiée (en travaillant Les articles [17, 18, 19] décrivent les états stationnaires en représentation de Husimi dans le est nul, il y a les points fixes (stables et instables) et les séparatrices.

3. Correspondant aux valeurs exceptionnelles de l'énergie où le Hessian de l'Hamiltonien
2. Les trajectoires périodiques non-contractionnelles.
1. Les trajectoires périodiques contractionnelles.

Hamilton, sur une trajectoire périodique de période $T=0.284$

Figure 3: $N = 41$. Distribution de Husimi dans l'espace de phase de l'évolution d'un état initialement cohérent. Cet état est placé au point A de la figure 1. Les niveaux de gris correspondent à l'intensité de la fonction $|qp|\Psi(t)\rangle|^2$. En première approximation, le centre de la distribution se déplace comme un point de l'espace de phase avec les équations classiques de



où $\mathcal{H}^W(q, p)$ est l'Hamiltonien classique (symbole de Weyl), et $v(q, p)$ est la vitesse du point (q, p) sur l'espace de phase.

L'énergie du quasi mode est E , l'énergie de la trajectoire classique (à l'ordre \hbar). En général un quasi-mode est un état stationnaire à la limite $\hbar \rightarrow 0$, sauf dans le cas où plusieurs quasi-modes se trouvent avoir la même énergie E . Il y a alors un phénomène de résonance. Mais ce cas est exceptionnel en ce sens qu'il est non générique. Il est par exemple dû à des symétries de l'Hamiltonien, ou pour un Hamiltonien dépendant d'un paramètre, à des valeurs particulières du paramètre.

L'expression (37), nous renseigne sur la distribution de Husimi de l'état stationnaire seulement au voisinage de la trajectoire périodique quantifiée, mais P. Leboeuf et A. Voros [14, 16, 15], ont montré que l'on pouvait avoir des informations aussi sur la distribution dans des régions où elle est très faible en intensité, notamment là où elle s'annule. Plus précisément, nous avons vu d'après (33) que la distribution s'annule en N points de l'espace de phase. Lorsque la dynamique est intégrable, ces N zéros se situent sur des lignes et sont éloignés les uns des autres d'une distance de l'ordre de \hbar . L'argument, conforté par les expériences numériques, est basé sur l'expression semi-classique W.K.B. de l'état stationnaire.

De plus, la méthode W.K.B. montre que pour une trajectoire quantifiée vérifiant (36) avec $n \in \mathbb{N}$, la fonction de Bargmann du quasi-mode vérifie:

$$(38) \quad \frac{1}{\Phi'(z)} \oint \frac{2\pi i}{\Phi(z)} dz = n$$

et donc la fonction de Bargmann comme la distribution de Husimi contient n zéros à l'intérieur de la trajectoire (et $N - n$ zéros à l'extérieur).

Remarquons que l'expression (37) ne fait pas intervenir les paramètres de périodicité de la fonction d'onde (θ_1, θ_2) . Par conséquent, l'état stationnaire $|\Psi^n(\theta_1, \theta_2)\rangle$ (voir équation (15)) associé à une trajectoire contractible quantifiée, ne dépend pas de (θ_1, θ_2) (à tout ordre en \hbar) pour $\hbar \rightarrow 0$, et son énergie $E_n(\theta_1, \theta_2)$ est elle même constante (à \hbar^∞ près). Autrement dit, la bande d'énergie $E_n(\theta_1, \theta_2)$ a une largeur exponentiellement faible $\propto \hbar^\alpha \exp\left(-\frac{\gamma}{\hbar}\right)$, que M. Wilkinson [10] a évalué au moyen de corrections semi-classiques pour l'effet tunnel entre différentes cellules, et la distribution de Husimi de $|\Psi^n(\theta_1, \theta_2)\rangle$ ne fluctue pas avec (θ_1, θ_2) . Elle est figée et concentrée sur la trajectoire classique.

Pour les trajectoires non contractibles, les résultats sont très proches, à la différence que l'énergie semi-classique dépend de $\theta_1, \theta_2, [10]$.

3 Indice de Chern pour caractériser la topologie des bandes d'énergie.

3.1 Introduction

Lorsque (θ_1, θ_2) varient dans le tore $T_2^\theta = [0; 2\pi]^2$, l'état stationnaire $[\Psi_n(\theta)]$ de la bande n (15) varie et décrit en général une surface notée T de dimension deux dans l'espace des rayons quantiques (l'espace projectif). On fait l'hypothèse qu'il ne se produit pas de dégénérescence. Cette surface T est paramétrée par (θ_1, θ_2) et elle est donc topologiquement équivalente au tore T^2 . Or à un rayon quantique donné $[\Psi]$ (un point de l'espace projectif), correspond toute une famille d'états quantiques, vecteurs de l'espace de Hilbert, colinéaires entre eux ($|\Psi\rangle \sim |\Phi\rangle$ si $|\Psi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Cette famille isomorphe au plan complexe \mathbb{C} , est appelée la fibre de $[\Psi]$, et est notée \mathcal{F}_Ψ .

Lorsque le rayon $[\Psi]$ varie de façon continue sur la surface T , la famille de vecteurs \mathcal{F}_Ψ varie aussi de façon continue dans l'espace de Hilbert. Voir la figure 4. L'ensemble des fibres $\mathcal{F}_n = \cup_{[\Psi] \in T} \mathcal{F}_\Psi$, est un espace fibré en droites complexes. T est appelé l'espace de base, et \mathbb{C} est la fibre caractéristique, car chaque fibre \mathcal{F}_Ψ est isomorphe à \mathbb{C} .

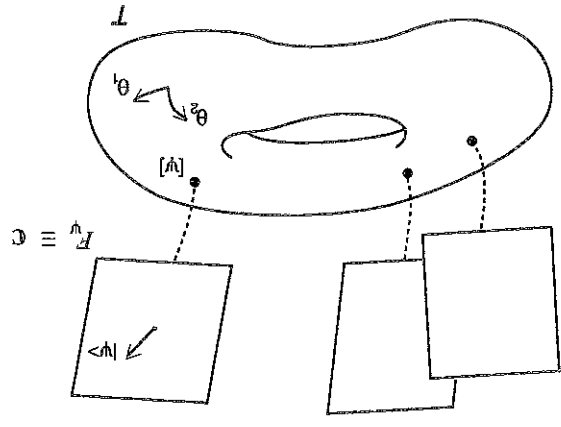


Figure 4: Espace fibre \mathcal{F}_n sur l'espace des rayons $[\Psi_n(\theta)] \in T$ de la bande d'énergie n .

Il est important de remarquer que deux espaces fibres peuvent ne pas être topologiquement équivalents, bien que leur espace de base soit topologiquement équivalents (ici au

tore T_2^g).

L'espace fibre est dit trivial, si il est topologiquement équivalent à l'espace produit direct: $T \times \mathbb{C}$.

Pour distinguer les espaces fibres non topologiquement équivalents, on leur associe des objets mathématiques appelées classes caractéristiques, qui sont des classes de cohomologie de l'espace de base [20, 21]. Dans le cas qui nous intéresse, la topologie de l'espace fibre \mathcal{F}_n est caractérisée par un nombre entier $C_n \in \mathbb{Z}$ appelé indice de Chern de la bande n , qui caractérise l'entrelacement global des fibres de la figure 4.

Premièrement, l'indice de Chern s'exprime comme l'intégrale de la courbure de Berry sur le tore T_2^g . Cette façon de calculer l'indice de Chern permet d'obtenir une formule applicable numériquement, et a permis à D.J. Thouless et al. [4] de le relier à la conductivité de Hall.

$$C_n = \frac{i}{2\pi} \iint_T \langle \partial_{\theta_2} \Psi_n | \partial_{\theta_1} \Psi_n \rangle - \langle \partial_{\theta_1} \Psi_n | \partial_{\theta_2} \Psi_n \rangle d\theta_1 \wedge d\theta_2 \quad (39)$$

Deuxièmement, D.P. Arovas et al. [7] ont proposé une interprétation de l'indice de Chern au moyen des zéros de la distribution de Husimi des états stationnaires. Précisément, nous avons vu qu'un état stationnaire $|\Psi_n(\theta)\rangle$ est caractérisé par les zéros de sa distribution de Husimi. Lorsque (θ_1, θ_2) varient, les zéros se déplacent sur l'espace de phase (le tore (q, p)). L'indice de Chern est alors le nombre de fois, compte algébriquement, où un point donné de l'espace de phase est recouvert par les zéros de la distribution de Husimi. Par cette caractérisation, on peut interpréter l'indice de Chern comme mesurant la sensibilité de l'état stationnaire $\Psi_n(\theta_1, \theta_2)$ avec les conditions de périodicité (θ_1, θ_2) . Par exemple, pour une dynamique régulière, les états stationnaires associés à une trajectoire contractible ont leur distribution de Husimi localisée sur la trajectoire. Lorsque (θ_1, θ_2) varient, les zéros ne peuvent donc pas passer sur cette trajectoire et l'indice de Chern *est nul*. Cela est une première correspondance que l'on peut faire entre la nature de la dynamique classique et la valeur de l'indice de Chern.

Nous verrons d'autres correspondances possibles autour d'exemples précis dans les sections suivantes. Il s'agira par exemple dans le cas régulier d'étudier l'indice de Chern pour des bandes d'énergie quantifiant une séparatrice non-contractionnelle, ou des trajectoires présentant des résonances et de l'effet tunnel. Et lors de la transition d'une dynamique intégrable vers une dynamique chaotique, P. Leboeuf et al. [6] ont observé de même, au niveau quantique, un changement de régime net à travers les variations fréquentes des indices de Chern et la présence de nombreuses dégénérescences.

En supposant que chaque bande n est non dégénérée, et en notant C_n son indice de Chern,

Cette formule est démontrée à l'aide de la formule de Berry dans [6], et à l'aide d'arguments plus géométriques par Yves Colin de Verdières [22].

$$(40) \quad \sum_{n=1}^N C_n = 1$$

il y a la relation suivante :

3.2 Indice de Chern et dégénérescence entre niveaux.

L'étude des dégénérescences dans un spectre au moyen de la phase de Berry et de l'indice de Chern a vraiment débuté autour du célèbre article de M.V. Berry [8, 23] et de l'interprétation géométrique donnée par B. Simon [24].

L'indice de Chern d'une bande est un invariant topologique. Seule la présence d'une dégénérescence entre niveaux peut donc causer une variation de l'indice de Chern.

Pour une famille d'opérateurs hermitiques (ou unitaires), dépendants continuellement de plusieurs paramètres réels, l'ensemble des paramètres pour lesquels il y a une dégénérescence entre deux niveaux, est généralement de codimension 3.

Dans notre étude de la dynamique quantique sur le tore, l'équation aux valeurs propres (15) dépend déjà de deux paramètres (θ_1, θ_2) . C'est pourquoi, si l'on considère une famille à un paramètre d'Hamiltoniens $H(\gamma)$, des dégénérescences entre niveaux se produisent généralement pour des valeurs isolées $(\theta_1^*, \theta_2^*, \gamma^*)$. Si l'on suit la valeur de l'indice de Chern d'une bande donnée, en fonction de γ , elles sera constante sur des intervalles délimités par la présence des dégénérescences, en $(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots)$.

Si cette famille $H(\gamma)$ est générale, sans symétrie particulière, la variation de l'indice de Chern d'une bande au passage d'une dégénérescence est $\Delta C = \pm 1$.

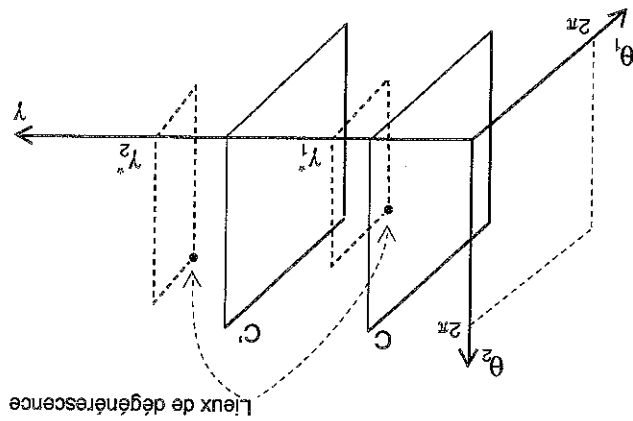
Remarquons que pour une famille d'Hamiltoniens dépendant de deux paramètres, $H(\gamma_1, \gamma_2)$, et pour un niveau donné, le lieu des dégénérescences sont des lignes (de codimension un). L'indice de Chern du niveau est défini hors de ces lignes, et il varie de ± 1 , en les traversant. Ces lignes sont ainsi transversalement orientées.

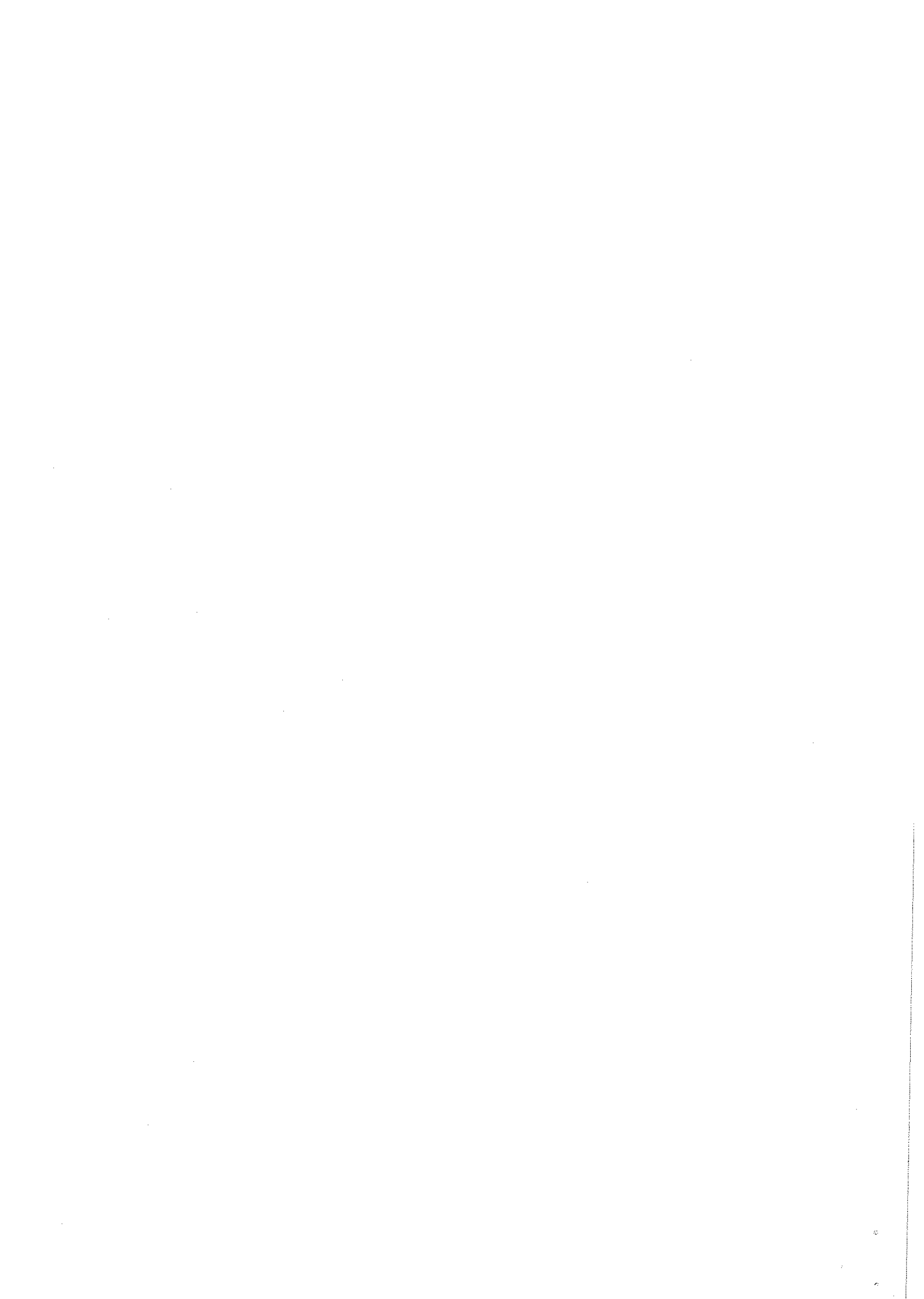
Dans les sections suivantes, nous nous intéresserons particulièrement à l'aspect qualitatif que prennent ces lignes de dégénérescence selon la nature de la dynamique classique. Nous verrons que pour une dynamique intégrable, et pour le phénomène de résonance entre deux trajectoires contractibles, les lignes de dégénérescences forment des boucles de petit diamètre, et ces boucles sont alignées, voir figure 19.

Les propriétés des distributions de Husimi à la limite semi-classique, et l'indice de Chern ayant été présentés séparément dans les sections précédentes, nous allons maintenant étudier l'indice de Chern dans la limite semi-classique, autour de quelques exemples. Dans cette section, nous allons nous limiter à une dynamique classique intégrable sur le tore (définie par un Hamiltonien indépendant du temps), et nous essaierons de dégager des règles de correspondance entre la dynamique classique d'une part et la valeur des indices de Chern d'autre part. Au premier paragraphe, l'indice de Chern non nul est associé à une trajectoire non contractible particulière, puisqu'il s'agit d'une séparatrice. Nous étudierons ensuite autour d'exemples, le cas d'une résonance entre deux trajectoires contractibles en dégagant une règle qualitative pour une famille d'Hamiltoniens à deux paramètres, montrant que les lignes de dégénérescence forment des boucles très petites et alignées.

4 L'indice de Chern dans des modèles intégrables

Par contre pour une dynamique chaotique, les lignes ne sont plus refermées sur elles-mêmes, et se développent sur l'espace des paramètres avec une certaine densité. Figure 5: Espace des paramètres $(\theta_1, \theta_2, \gamma)$, et présence de dégénérescences. L'indice de Chern est défini sur chaque plan $\gamma = \text{constante}$. A une dégénérescence en γ_1^* correspond une variation de l'indice de Chern $\Delta C = C' - C$.





Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la valeur que peut prendre l'indice de Chern si il y a un effet de résonance entre deux trajectoires contractibles quantifiées. Cet effet de résonance s'observe par exemple pour une dynamique possédant "deux puits" et lorsque ceux-ci sont symétriques, ou s'ils sont dissymétriques mais dépendant d'un paramètre, et la résonance se produit pour des valeurs particulières du paramètre.

4.2 Résonance entre deux trajectoires contractibles

Sur la figure 9, on peut observer la distribution de Husimi des états de la bande \mathbb{H}_{13} pour $D = 0.5$, et différentes valeurs de (θ_1, θ_2) . L'indice de Chern est non nul $C_{13} = 1$. Lorsque (θ_1, θ_2) varie, les zéros recouvrent une fois l'espace de phase, et en particulier la figure 9 montre des états pour lesquels les zéros sont situés aux points fixes instables. On remarque de plus que un zéro franchit la séparatrice lorsque θ varie : pour $\theta = (\pi, \pi)$, il y a 8 zéros à "l'intérieur" de la séparatrice et 13 à l'extérieur, Pour $\theta = (0, 0)$, il y a 9 zéros à l'intérieur et 12 à l'extérieur.

De plus, comme prévu par des méthodes semi-classiques, la largeur des bandes d'énergie quantifiant des trajectoires contractibles est très étroite, sauf au voisinage de la séparatrice. On y observe que l'énergie des dégénérescences suit de très près l'énergie de la séparatrice. La figure (8), résultat d'un calcul numérique, montre que cela se produit effectivement. une série de dégénérescences localisées près de l'énergie de la séparatrice. implique une dégénérescence entre niveaux, et donc le spectre quantique doit présenter à une bande d'énergie voisine de E_{S1} . Nous avons vu que le changement d'indice de Chern d'une bande d'énergie à la bande supérieure lorsque D augmente, de façon à rester associé

Figure 7: Points fixes de l'Hamiltonien \mathcal{H}_S , (41).
 —: point fixes stable (minimum et maximum de \mathcal{H}).
: point fixe instable (et séparatrices).

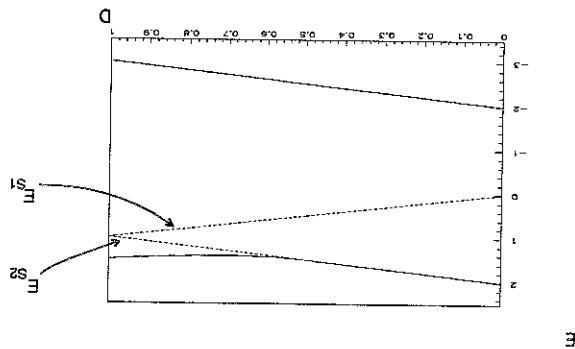


Figure 9: Distribution de Husimi de la bande \mathbb{F}_{13} , avec un indice de Chern égal à un. $D = 0.5$, $N = 21$. Les étoiles marquent les zéros de la distribution.
 (a) $\bar{\theta} = (\pi, \pi)$: il y a une forte intensité sur chaque point fixe et 8 zéros sont au centre.
 (b) $\bar{\theta} = (0, \pi)$: un zéro se trouve sur le point fixe instable $(q, p) = (0, 0.5)$.
 (c) $\bar{\theta} = (\pi, 0)$: un zéro se trouve sur l'autre point fixe instable $(q, p) = (0.5, 0)$.
 (d) $\bar{\theta} = (0, 0)$: il y a une forte intensité sur chaque point fixe et 9 zéros sont au centre.

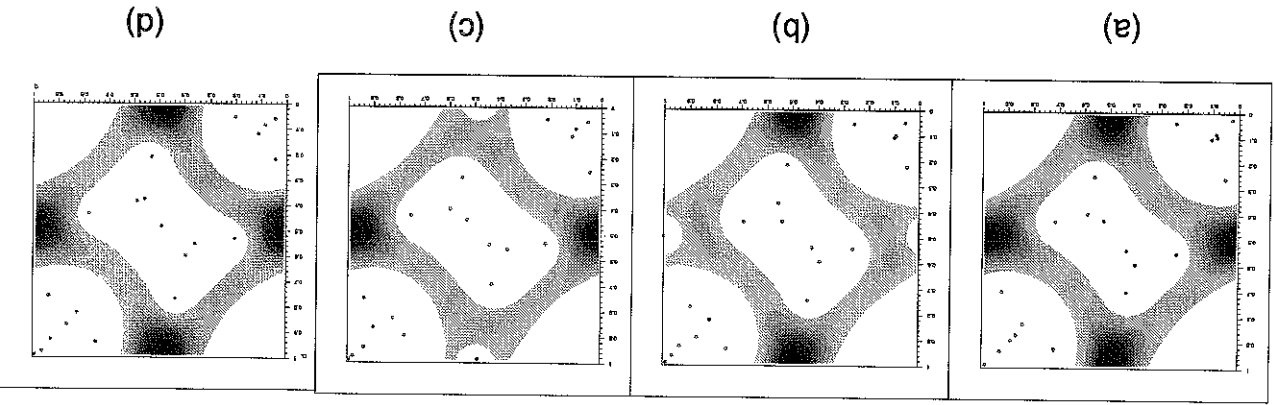
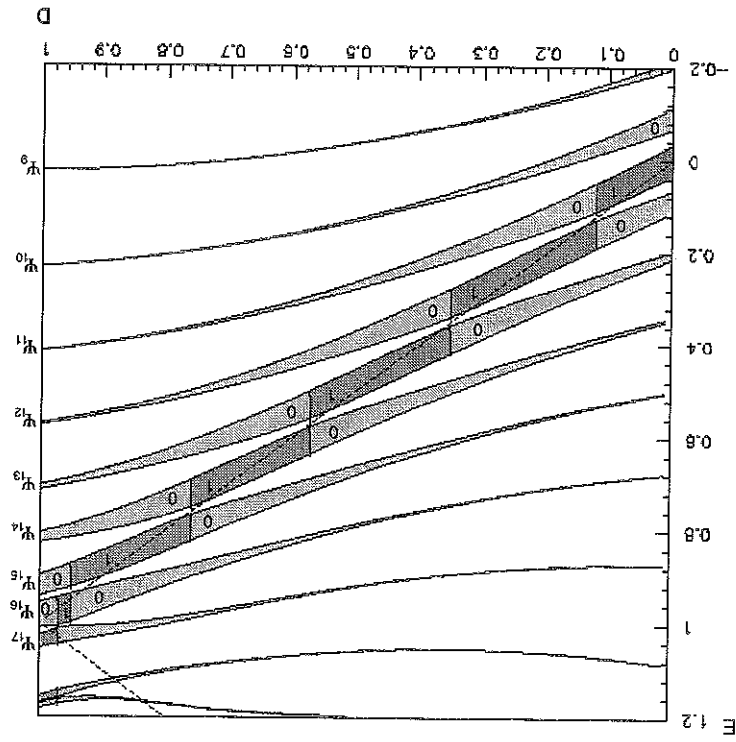


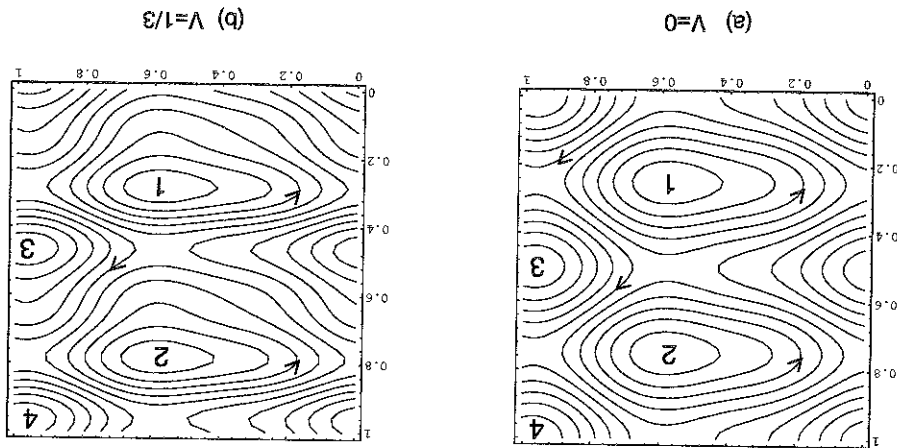
Figure 8: Bandes d'énergie et leur indice de Chern pour l'Hamiltonien \mathcal{H}_S , (41). L'énergie vertical indique la présence d'une dégénérescence. (A cause d'une trop faible discrétisation en (θ_1, θ_2) , sur la figure les bandes ne se touchent pas lors d'une dégénérescence. Elles sont en réalité légèrement plus larges et se touchent.)



L'observation principale est que les indices de Chern ne sont pas affectés par la brisure de la symétrie par réflexion. Ils prennent les valeurs prédites par D.J.Thouless et al. [4], ± 1 par doublet de bande (la valeur $+1$ est prise par la bande d'énergie extrême).

La figure 11 montre le spectre en bande ainsi que leur indice de Chern, en fonction de V , pour $N = 11$.

Figure 10: Trajectoires de l'Hamiltonien \mathcal{H}_T (42).



La figure 10 montre les trajectoires. Cet Hamiltonien est choisi tel que pour $V = 0$, les deux puits (de maximum) au centre de la figure soient symétriques à la fois par la translation $T^{p=1/2}$ et par réflexion par rapport à la droite $p = 1/2$. Ensuite pour $V > 0$, la symétrie par réflexion est brisée, et ne subsiste que la symétrie par translation. Ce sont donc les bandes dans les extrémités du spectre qui nous intéressent.

$$\mathcal{H}_T(q, p) = -\cos(2\pi q) - \cos(4\pi p) - \frac{1}{4}\cos(4\pi q + \frac{\pi}{4}) - V\cos(8\pi p + \frac{\pi}{2}) \quad (42)$$

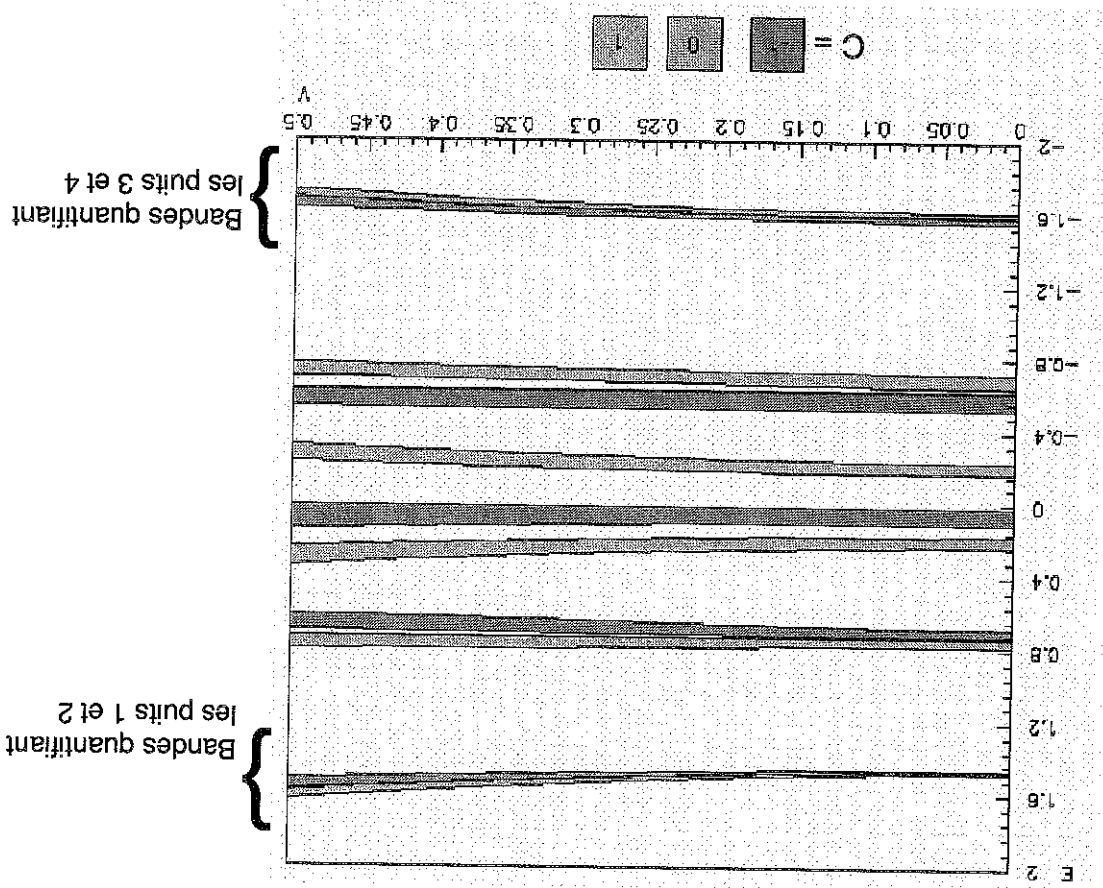
Considérons l'Hamiltonien suivant dépendant du paramètre $V \in [0, 1/2]$:

A) Deux puits symétriques par translation

4.2.1 Deux modèles numériques

La symétrie entre les deux puits peut être une symétrie par translation ou par réflexion. Nous allons tout d'abord expérimentalement numériquement trois Hamiltoniens correspondant à ces différents cas de résonance. Nous présenterons ensuite une règle générale qui se dégage de ces résultats.

Figure 11: Bandes d'énergie et indice de Chern de H_T . (42). $N = 11$. Les indices de Chern sont constants. Il n'y a pas de dégénérescence.



La figure 14 montre les trajectoires. Pour $V = 0$, les Hamiltoniens \mathcal{H}_T et \mathcal{H}_R sont identiques, mais pour $V > 0$, la symétrie par translation est brisée, seule reste la symétrie

$$\mathcal{H}_R(q, p) = -\cos(2\pi q) - \cos(4\pi p) - \frac{1}{4}\cos(4\pi q + \frac{4}{\pi}) - V\cos(2\pi p) \quad (43)$$

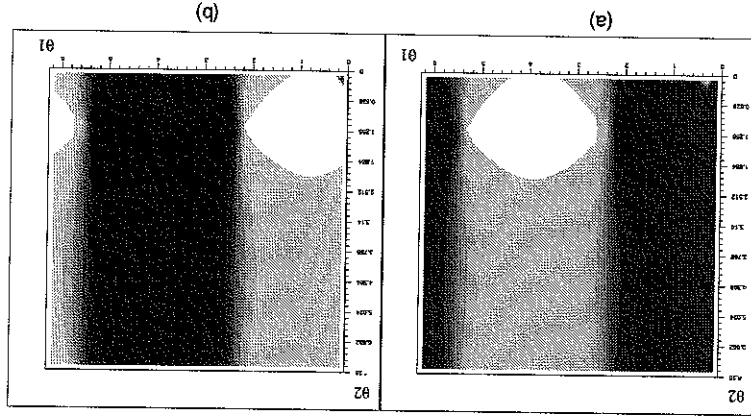
Considérons maintenant l'Hamiltonien dépendant du paramètre $V \in [0, 2]$,

B) Deux puits symétriques par réflexion

- (a) puits 1, représentation de $|\langle q_1, p_1 | \Psi_{11}(\theta) \rangle|^2$ avec $(q_1, p_1) = (0.56, 0.26)$.
- (b) puits 2, représentation de $|\langle q_2, p_2 | \Psi_{11}(\theta) \rangle|^2$ avec $(q_2, p_2) = (0.56, 0.78)$.

$V = 1/3$.

Figure 12: Intensité de la distribution de Husimi de l'état Ψ_{11} au fond des puits 1 et 2. $N = 11$,

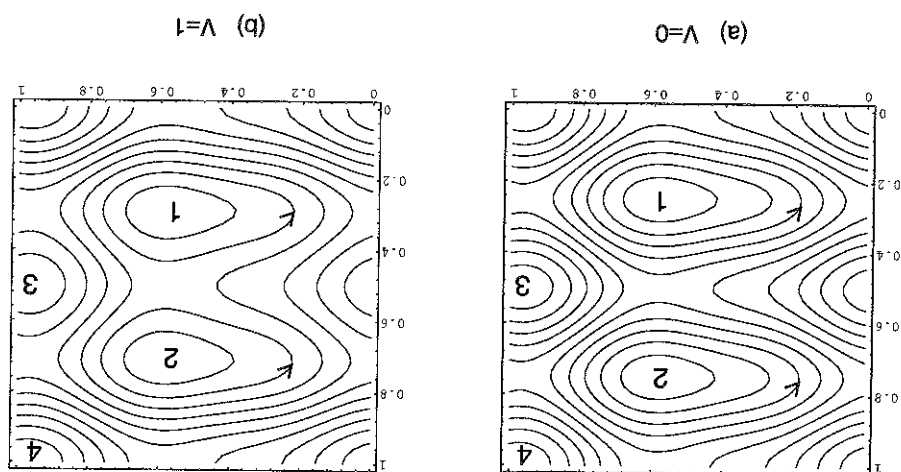


Puisque l'indice de Chern est non nul, cela signifie que les zéros de la distribution de Husimi recouvrent tout l'espace de phase, lorsque (θ_1, θ_2) varient et entre autre que la présence de l'état stationnaire varie dans chacun des puits, allant jusqu'à l'annulation. La figure 12 montre l'intensité de la distribution de Husimi en chacun des puits pour la bande Ψ_{11} . On note $|q_1, p_1\rangle$ et $|q_2, p_2\rangle$ les états cohérents situés au centre des puits notés 1 et 2 sur la figure 10. Les valeurs de (θ_1, θ_2) pour lesquelles cette intensité est nulle correspond au passage d'un zéro au fond du puits. On observe sur la figure 13 la distribution de Husimi sur tout l'espace de phase, pour les valeurs particulières de (θ_1, θ_2) où cette distribution est nulle dans un puits. Une conséquence au niveau de la dynamique est que l'effet tunnel créé par les états Ψ_{10} et Ψ_{11} est supprimé pour ces valeurs particulières de (θ_1, θ_2) (et au voisinage). Cette description concerne la bande Ψ_{11} , mais la bande Ψ_{10} qui forme un doublet avec Ψ_{11} présente des fluctuations semblables, mais en opposition.

Remarquons que près de l'énergie minimale, les deux puits ne sont pas symétriques, et ainsi $V > 0$ doit lever l'effet de résonance dans le bas du spectre. Le spectre en bande de l'Hamiltonien quantique en fonction de V , et pour $N = 11$, est montré sur la figure 15.

Cette fois-ci dans le haut du spectre, les bandes Ψ_{10} et Ψ_{11} vont par doublet mais pour $V = V^*$ proche de zéro, une dégénérescence se produit et ensuite l'indice de Chern est nul. On remarque aussi que les bandes deviennent plus étroites. La situation est donc bien différente de la précédente. On s'attend à ce que la distribution de Husimi des états Ψ_{10}

Figure 14: Trajectoires de l'Hamiltonien \mathcal{H}_R , (43).



maximum.

par réflexion, si bien qu'il doit toujours y avoir résonance entre les deux puits d'énergie

Figure 13: Distribution de Husimi de l'état Ψ_{11} . $V = 1/3$, $N = 11$.

(a) $(\theta_1, \theta_2) = (2.5, 4.4)$.
 (b) $(\theta_1, \theta_2) = (0.9, 1.256)$. (suppression de l'effet tunnel).
 (c) $(\theta_1, \theta_2) = (3.14, 1.256)$. (suppression de l'effet tunnel).

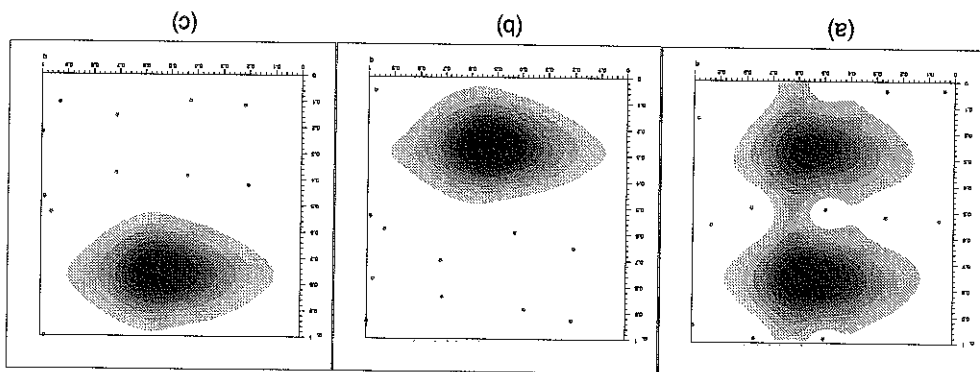
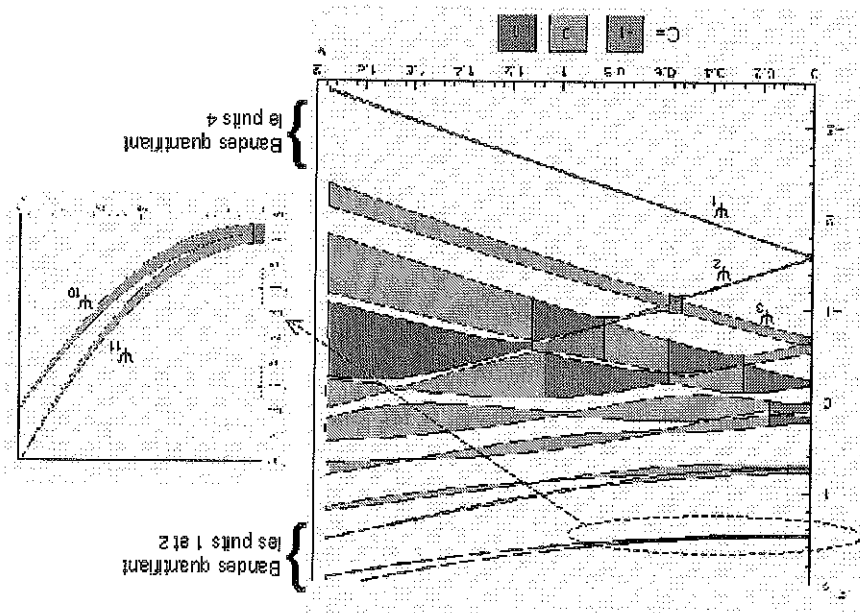


Figure 15: Bandes d'énergies et indice de Chern de \mathcal{H}_R (43). $N = 11$. Pour $V = 0$, les spectres et les indices de Chern de \mathcal{H}_R et \mathcal{H}_T sont identiques. Il faut remarquer sur le détail que en $V = 0$, les indices de Chern sont $C = \pm 1$, et qu'une dégénérescence se produit en $V^* \neq 0$. et Ψ_{11} fluctue peu avec (θ_1, θ_2) pour $V > 0$. On observe en effet qu'à partir de $V > V^*$, les zéros ne pénètrent plus au sommet des puits, c'est à dire que les distributions de Ψ_{10} et Ψ_{11} fluctuent mais ne vont pas jusqu'à s'annuler au sommet des puits. Et pour V assez grand, les distributions fluctuent très peu, et restent dans la configuration "habituelle" du double puits avec des intensités égales dans chaque puits.

Les deux puits 3 et 4 d'énergie minimum correspondant au bas du spectre ne sont pas symétriques, c'est pourquoi les deux bandes Ψ_1 et Ψ_2 s'écartent en respectant chacune la quantification W.K.B. d'un des deux puits. Avant de s'écarter, une dégénérescence se produit pour V proche de zéro, et l'indice de Chern des bandes devient nul, conformément au fait que les fonds de puits sont contractibles, et qu'il n'y a plus de résonance. Pour $V \sim 0.6$, le fondamental Ψ_2 du puits 3 le plus élevé croise le deuxième niveau Ψ_3 du puits 4 et une résonance de produit à nouveau, encadrée ici par deux dégénérescences entre lesquelles les indices de Chern sont ± 1 pour les bandes Ψ_2 et Ψ_3 . Cela signifie toujours que la distribution de Husimi fluctue entre les deux supports de trajectoire).

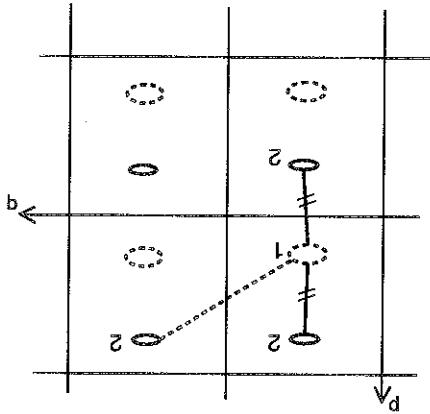


Pour ce qui concerne le haut du spectre, il est clair avec la figure (14) que les deux puits symétriques par réflexion ne vérifient pas la condition "d'équidistance" illustrée par la figure (16). Au contraire, dès que la symétrie par translation est brisée ($V > 0$), leur distance minimale est atteinte de façon unique, voir la figure (17)(a). Cela explique pourquoi l'indice de Chern des bandes Ψ_{10} et Ψ_{11} devient rapidement nul (par passage d'une dégénérescence), pour $V > 0$, sur la figure (15).

En ce qui concerne le bas du spectre, les deux puits 3 et 4 ne sont pas symétriques, mais pour $V \approx 0.6$, une résonance se produit entre les bandes Ψ_2 (niveau fondamental du

C) Analyse des résultats de l'Hamiltonien \mathcal{H}_R .

Figure 16: Illustration des conditions pour avoir $C = \pm 1$.



1. Condition de résonance: $\langle |H|1 \rangle \approx \langle 2|H|2 \rangle$, (vérifiée si il y a une symétrie, de translation ou réflexion ou lorsque deux bandes semi-classiques se croisent).
2. Condition "d'équidistance": Il faut que les deux plus proches représentants du quasi-mode $|2 \rangle$ soient à égale distance ("distance tunnel" liée à la barrière énergétique) du quasi-mode $|1 \rangle$ (dans le plan), et que le troisième représentant ne soit pas aligné avec les deux précédents. Voir figure 16.

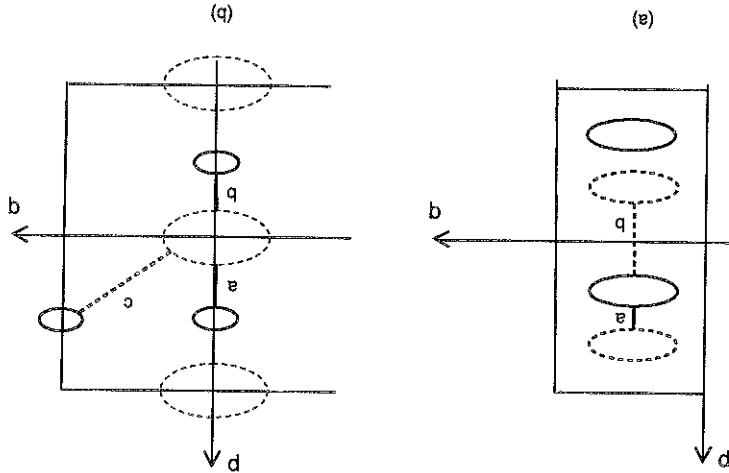
Plus généralement, par une étude de l'effet tunnel entre deux puits 1 et 2, on s'aperçoit que les indices de Chern d'un couple de quasi-modes en résonance peut être non nul à condition que les deux conditions suivantes soient réalisées. On note respectivement $|1 \rangle$ et $|2 \rangle$ des quasi-modes correspondant aux puits 1 et 2 dans le plan.

4.2.2 Conditions pour l'apparition d'une dégénérescence.

Voyons ce que la règle page 27 peut nous permettre de déduire sur l'apparition possible d'indice de Chern non nul, entre deux trajectoires contractibles, pour une famille d'Hamiltoniens dépendant de plusieurs paramètres $H(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$. (on met de côté le cas de trajectoires non contractibles). La première condition de résonance est de codimension un, c'est à dire qu'elle peut être réalisée en faisant varier un paramètre. Par exemple l'action d'une trajectoire, notée \mathcal{A} . La deuxième condition qui exige que le puits 1 se trouve sur la "médiatrice" entre deux images du puits 2, est aussi de codimension 1. Ce paramètre est par exemple la composante en impulsion de la distance mutuelle entre les deux trajectoires, notée \mathcal{P} . Seulement pour des valeurs particulières de ces paramètres $(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = (\mathcal{A}^*, \mathcal{P}^*)$, l'indice de Chern des bandes considérées peut être non nul (± 1 , génériquement). en fait, il est non nul dans un voisinage exponentiellement étroit ($\sim \exp(-\delta N)$), et hors de ce voisinage, l'indice de Chern retrouve sa valeur générique, zéro. A la limite de ce voisinage, il y a une ligne de dégénérescence qui accompagne le changement d'indice de Chern. Cela

4.2.3 Aspect qualitatif des lignes de dégénérescences.

Figure 17: Distance minimale entre les deux puits de l'Hamiltonien \mathcal{H}_R .
 (a) Dans le haut du spectre, une distance est minimale, $d_a > d_b$, donc l'indice de Chern est nul.
 (b) Dans le bas du spectre, deux distances minimales sont équivalentes $d_a = d_b$, (et la troisième image est non alignée). L'indice de Chern peut être non nul.

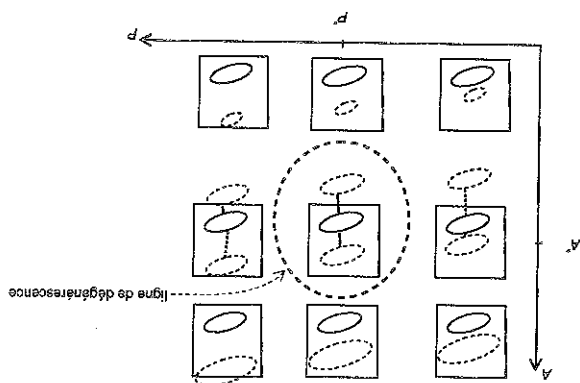


cette résonance. explique la variation d'indice de Chern ± 1 , et les deux dégénérescences qui accompagnent contractibles est celle de la figure 17 (b). Les deux distances minimales sont égales, ce qui puits 3) et Ψ_3 (premier niveau excité du puits 4). La configuration des deux trajectoires

Le cas chaotique, comme nous le verrons au paragraphe suivant. et contraste fortement avec la disposition que prennent les lignes de dégénérescence dans Cette disposition des lignes de dégénérescence dans le cas intégrable est très particulière correspond à la variable V de l'Hamiltonien \mathcal{H}_R , mais pour le bas du spectre. La variable \mathcal{A} à la variable V de l'Hamiltonien \mathcal{H}_R , et pour le haut du spectre, figure 15. La variable \mathcal{A} correspond à la variable V de l'Hamiltonien \mathcal{H}_T , figure 11; la variable \mathcal{P} correspond Les trois directions $(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \gamma)$ apparaissent dans les exemples étudiés ci dessus. La vari- petit ($\sim e^{-\delta N} \sim e^{-\delta/h}$) qui sont alignés et distants de l'ordre de ($\sim \hbar \sim \frac{1}{N}$). se produit localement sur des "tubes de codimension 2" de diamètre exponentiellement que des composantes connexes contractibles), pour une famille générique d'Hamiltoniens, trajectoire contractible (et à une énergie telle que la couche d'énergie $E = \mathcal{H}(q, p)$ n'ait En conclusion, l'occurrence de dégénérescence pour une bande d'énergie associée à une dégénérescence apparaît.

Notons de plus que si \mathcal{A} varie, la condition de résonance va à nouveau se réaliser entre deux autres niveaux quantifiés (qui sont distants de $\Delta \mathcal{A} \sim \hbar$) et une autre boucle de

Figure 18: Diagramme montrant deux familles de trajectoires contractibles (au voisinage de $E = \mathcal{H}(q, p)$), pour un Hamiltonien dépendant de deux paramètres $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$. L'indice de Chern est $C = \pm 1$ dans un voisinage de de $(\mathcal{A}^*, \mathcal{P}^*)$ limitée par une ligne fermée de dégénérescence, hors de laquelle $C = 0$.



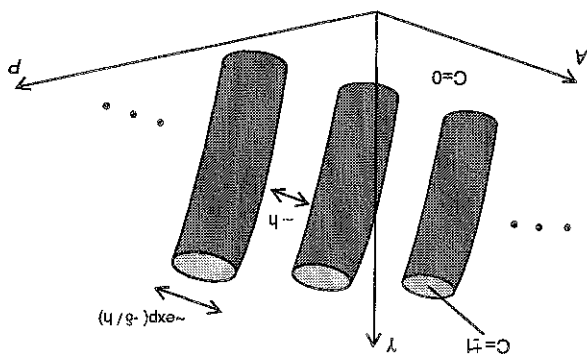
est illustré sur la figure (18). La condition de résonance est vérifiée sur la ligne $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. La condition d'égalité distance est vérifiée pour $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

Dans le cas intégrable, nous avons vu que les indices de Chern et les dégénérescences sont fortement contraints par la régularité de la dynamique. Nous allons maintenant observer l'influence d'une dynamique chaotique sur le spectre et les dégénérescences, au travers des indices de Chern. Cette étude se fera tout d'abord sur le modèle de "Harper pulse" (48), puis sur un modèle analogue qui ne possède pas les symétries particulières du Harper pulse. Dans le régime chaotique, il n'est plus possible de construire des quasi modes vérifiant l'équation de Schrödinger à tout ordre en \hbar . Des expressions semi-classiques comme la formule des traces ou la formule de Gutzwiller montrent, que dans ce cas la totalité des orbites périodiques "participent" à la valeur de chaque niveau d'énergie ainsi qu'à la structure des états stationnaires.

Beaucoup d'études analytiques et numériques ont été faites dans ce sens, et notons en particulier celles concernant les distributions de Husimi des états quasi stationnaires ([26, 14, 27, 16, 15]) et leur zéros. Les auteurs observent que contrairement au cas intégrable où les zéros sont alignés et distants de $\propto \hbar$, dans le cas ergodique, les zéros semblent généralement répartis sur l'espace de phase et distants de $\propto \sqrt{\hbar} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$, (puisque il y a N zéros au total sur l'espace de phase). Les régions où la distribution de Husimi est

5 Dynamique chaotique et indices de Chern.

Figure 19: Valeur de l'indice de Chern d'une bande, et tubes de dégénérescence dans un espace à trois paramètres (A, P, γ) . A l'intérieur $C = \pm 1$, à l'extérieur, $C = 0$.



$$(47) \quad x = \frac{\dot{Q}}{b} = u = \frac{p}{d} \quad \gamma = \frac{\dot{Q}}{2\pi\tau}$$

en introduisant les variables:

$$(46) \quad M_{0+} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \gamma \sin(2\pi y_n) \\ y_{n+1} = y_n - \gamma \sin(2\pi x_{n+1}) \end{cases}$$

de l'application stroboscopique $(q^n, p^n) \rightarrow (q^{n+1}, p^{n+1}) = M_{0+}(q^n, p^n)$: En intégrant les équations de Hamilton sur une période $t \in]0, \tau[\cup \tau$, on obtient l'expression

$$(45) \quad K(t) = \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n\tau)$$

avec le "peigne de Dirac":

$$(44) \quad \mathcal{H}(q, p, t) = -\cos(2\pi \frac{p}{d}) - \cos(2\pi \frac{\dot{Q}}{b}) K(t)$$

Le modèle de Harper pulsé est défini par le Hamiltonien dépendant du temps:

5.1 Modèle de "Harper pulsé".

importante en intensité sont les régions où il n'y a pas de zéro. Le phénomène appelé "cicatrice", "scars", qui est une localisation de Husimi autour d'une trajectoire instable, correspond donc en terme des zéros à une trajectoire instable évitée par les zéros. Ce phénomène observé assez couramment numériquement, voir E.J. Heller dans [28], est en fait non générique à la limite semi-classique (c'est à dire exceptionnel, de mesure nulle parmi les états quasi-stationnaires). Un théorème mathématiques [29] montre que la distribution de Husimi de presque tous les états stationnaires converge vers la distribution invariante de Liouville, qui elle est uniforme sur la section stroboscopique. Notons que le phénomène de cicatrice n'est pas observé dans tous les modèles [30]. Et si il se produit, on doit observer une décroissance logarithmique de la densité de la distribution de Husimi le long des variétés stables et instables de la trajectoire, comme pour le point fixe instable du double puits [31].

Lorsque (θ_1, θ_2) varient, les zéros qui sont répartis de façon désordonnée sur l'espace de phase, se déplacent avec une forte dépendance contrairement au cas intégrable. L'indice de Chern a la propriété de caractériser quantitativement et topologiquement cette dépendance, et P. Leboeuf et al. [6] ont suggéré qu'il mesure de ce fait l'influence du chaos lorsque la dynamique classique devient chaotique, dans le modèle du Harper pulsé [6].

2π .

$|\Psi^n(\theta)\rangle >$ est appelé *état quasi-stationnaire* et $\phi(\theta)$ *quasi-énergie* (nombre réel modulo

$$U|\Psi^n(\theta)\rangle = e^{i\phi(\theta)}|\Psi^n(\theta)\rangle \quad n = 0 \rightarrow N-1 \quad (52)$$

Le spectre de U est fini dans chaque sous-espace $\mathcal{H}^N(\theta_1, \theta_2)$, $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2$.

$$U = e^{iN\gamma \cos(2\pi \frac{Q}{b})} e^{iN\gamma \cos(2\pi \frac{P}{b})} \quad (51)$$

d'où:

$$i\hbar \partial_t |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (50)$$

Nous déduisons l'expression de U par intégration de l'équation de Schrödinger:

$$|\Psi(\tau^+)\rangle = U |\Psi(0^+)\rangle \quad (49)$$

un vecteur quantique sur une période:

Nous pouvons considérer la transformation unitaire U , appelé propagateur, qui fait évoluer

$$H = -\cos(2\pi \frac{P}{b}) - \cos(2\pi \frac{Q}{b}) K(t) \quad (48)$$

Hamiltonien quantique:

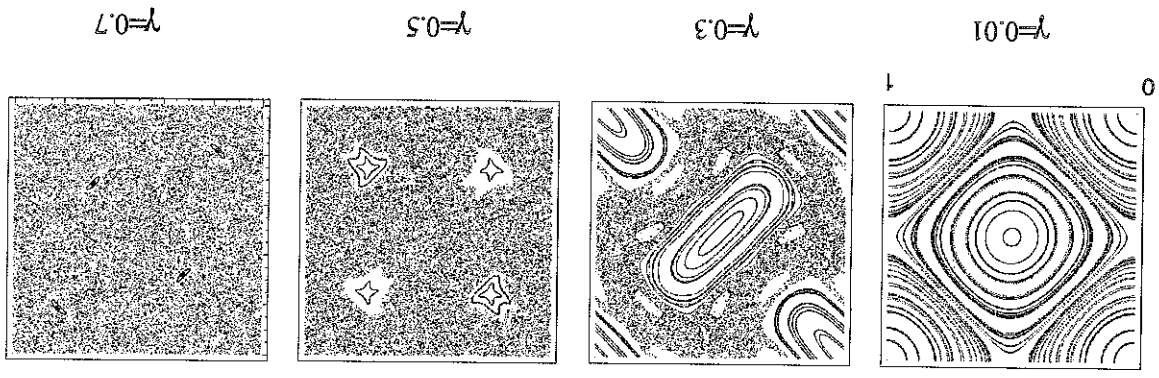
Par quantification canonique de l'Hamiltonien classique (44), nous obtenons l'opérateur

namique intégrable et une dynamique chaotique.

Le paramètre $\gamma \in \mathbb{R}^+$ permet donc d'observer une transition progressive entre une dy-

Pour τ ou $\gamma \rightarrow 0$, la dynamique converge vers la dynamique intégrable.

Figure 20: Section stroboscopique classique du "Harper pulse"



différentes valeurs de γ .

La figure 20 montre les sections stroboscopiques (46) de quelques trajectoires, pour

Spectre et indices de Chern

La figure 21 montre le spectre et les indices de Chern des bandes quasi-stationnaires pour $N = 11$ états et sur l'intervalle $\gamma \in [0; 1.16]$. Les indices de Chern ont été obtenus numériquement au moyen de l'intégrale de courbure.

On note que la variation de l'indice de Chern lors d'une dégénérescence est souvent plus d'une unité. Ce comportement qui est non générique, est dû aux nombreuses symétries du problème.

On peut distinguer principalement trois régimes différents en fonction de γ :

1. Premier régime, pour $\gamma \in [0, 0.16(\approx \frac{2N}{\pi})]$:

Avant le premier croisement entre les bandes de quasi-énergies, la dynamique classique est quasiment régulière, et les indices de Chern coïncident avec ceux du modèle de Harper non perturbé (figure 8, $D = 0$).

2. Deuxième régime $\gamma \in [0.16, 0.4]$: région régulière.

A partir de $\gamma = 0.16(\approx \frac{2N}{\pi})$, des croisements entre bandes d'énergies commencent à apparaître (prévisibles d'après l'expression (51), ou par une méthode semi-classique de quantification des quasi-énergies [32]). Dans cette région, la dynamique classique est dominée par une dynamique classique régulière, et les bandes d'énergies quantifient des trajectoires stables de l'espace de phase. Les bandes extrêmes, les plus fines, quantifient le cœur des deux régions stables, et la bande centrale correspond à ce qui reste de la séparatrice.

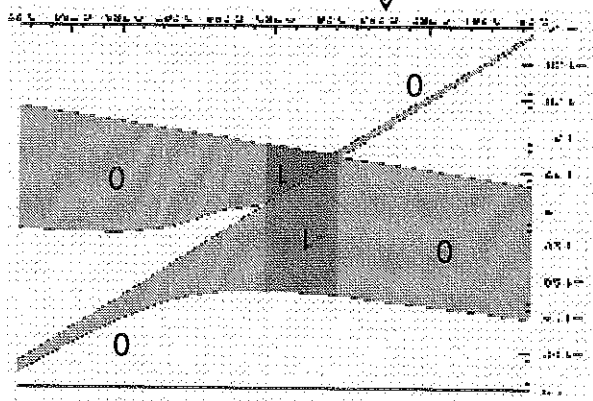
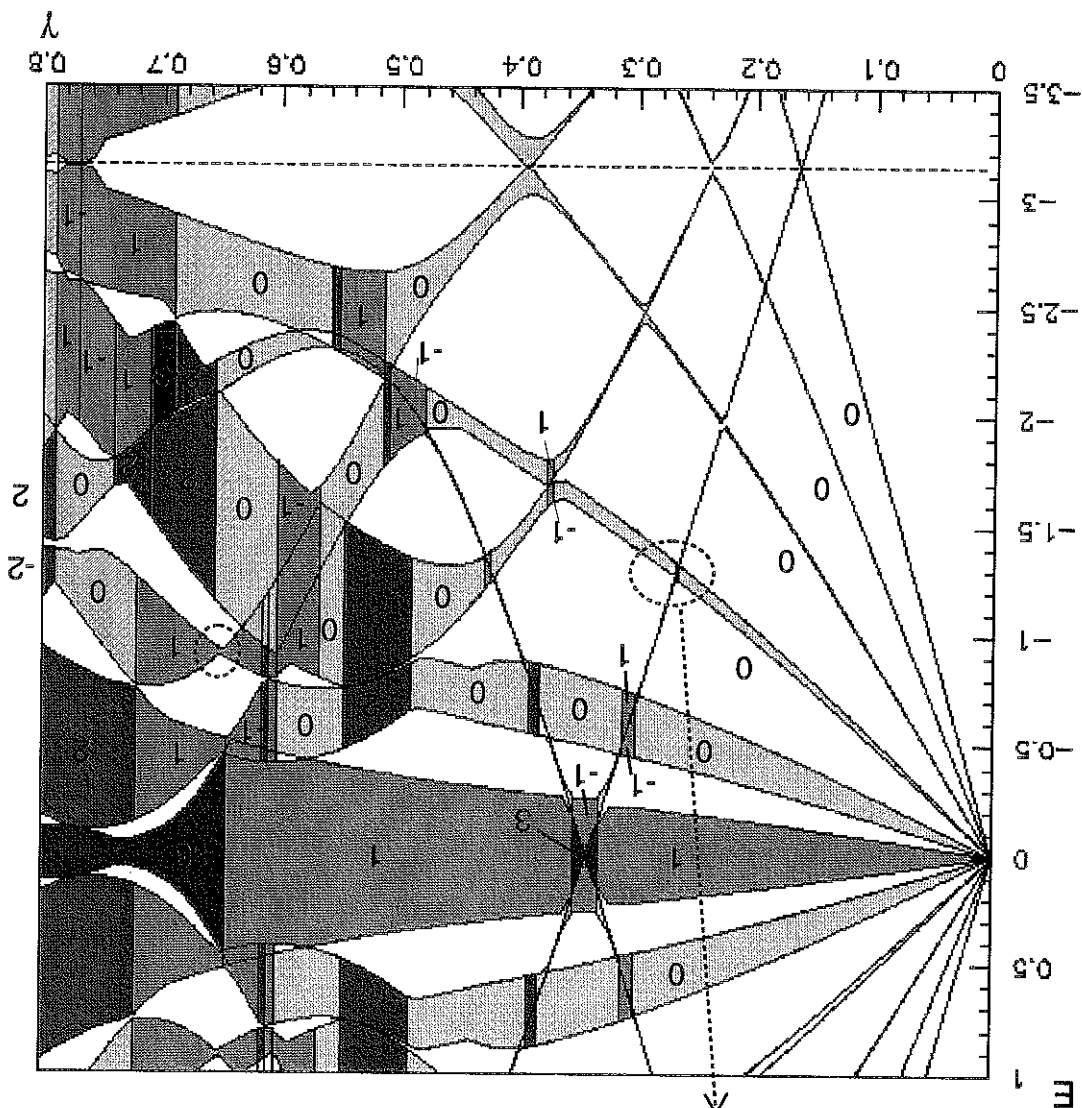
Du fait que les quasi-énergies soient définies sur le cercle $]-\pi, \pi[$, les bandes se croisent, et c'est ainsi que la bande fine qui quantifie le point fixe stable $(q, p) = (0, 0)$ traverse pour la première fois toutes les bandes en les coupant, (à la montée sur la figure 21), suivi de la bande du premier niveau excité, etc.... Cela forme ainsi une structure en treillis, qui dans la limite $N \rightarrow \infty$, a tendance à devenir plus dense, et à se rapprocher de $\gamma = 0$.

Hors de ces croisements, l'indice de Chern est toujours nul. Et lors du croisement de deux bandes d'énergies, l'indice de Chern change, et deux dégénérescences se produisent de part et d'autre de ce changement sur un intervalle de γ très faible (relié

Le spectre de quasi-énergies est symétrique par rapport à $\phi = 0$. Lorsque les bandes se recou-
vrent, la couleur indiquée est celle de la bande d'énergie inférieure.

(51).

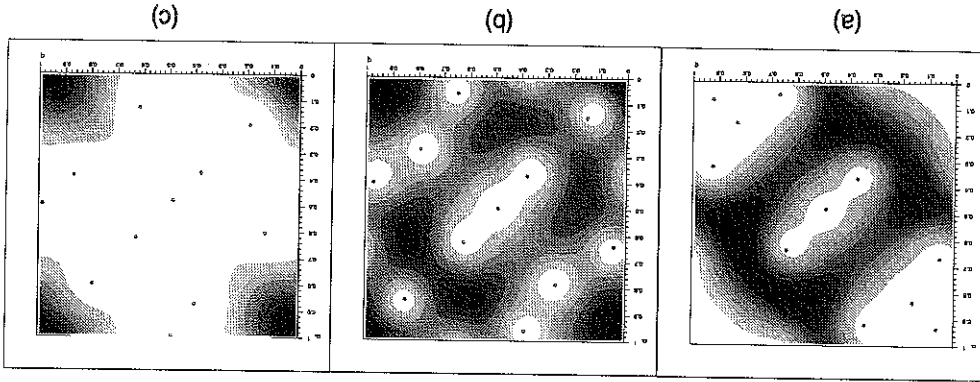
Figure 21: Bandes de quasi-énergies et leur indice de Chern pour le modèle de Chern pour le modèle de Harper pulsé



La situation de ces deux tores invariants sur l'espace de phase est une situation symétrique, similaire à celle de la figure 17 (b), c'est à dire que la distance minimale entre eux-deux est atteinte deux fois. Cela explique la variation d'indice de Chern et les deux dégénérescences se produisent à chaque croisement, à l'exception des niveaux Ψ_1 et Ψ_{11} pour lesquels la symétrie et la conservation de la somme des indices de Chern lors d'une dégénérescence interdit une variation de ceux-ci. Notons aussi les variations non génériques $\Delta C = \pm 2$, lors des derniers croisements, probablement dues à l'approche du régime chaotique.

En conclusion, lors des croisements, les dégénérescences peuvent s'interpréter comme

Figure 22: Distribution de Husimi de l'état $\Psi_3(\theta_1, \theta_2)$ qui résonne entre deux tores quantifiés, pour $\gamma = 0.2645$ $N = 11$, et différentes valeurs de (θ_1, θ_2) :
 (a): $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$. La distribution est sur un tore (*3^{ème} niveau excité d'une famille*).
 (b): $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$. Superposition
 (c): $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$. La distribution est sur un tore (*fondamental d'une famille*).

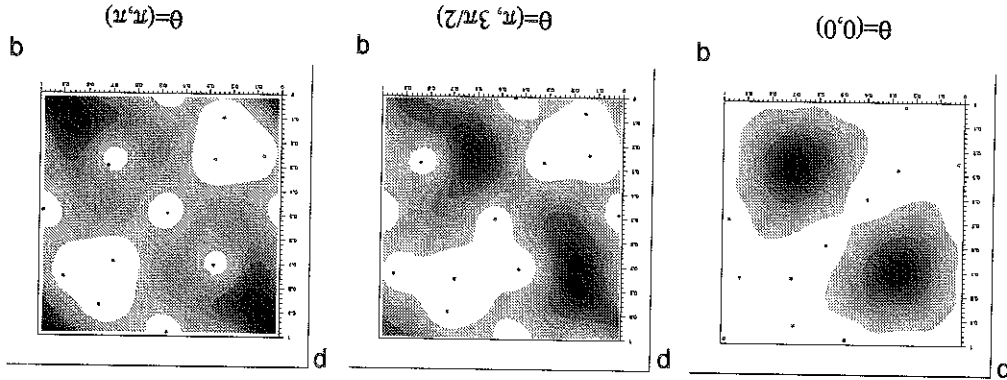


à la largeur des bandes). La présence de ces dégénérescences peut se comprendre comme un phénomène de résonance entre deux tores classiques invariants quantifiés, dont l'analyse a été présentée au paragraphe précédent.

Par exemple, le détail de la figure 21, présente une résonance entre la bande très fine Ψ_4 qui quantifie le point fixe stable $(q, p) = (0, 0)$ et la bande moins fine Ψ_3 qui quantifie le troisième niveau excité autour du point fixe stable $(q, p) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La figure 22 montre la distribution de Husimi de l'état $\Psi_3(\theta_1, \theta_2)$ pour différentes valeurs de (θ_1, θ_2) . Cette distribution fluctue entre les deux tores invariants avec un indice de Chern $C = +1$, de la même façon que pour les deux puits symétriques par translation, figure 13.

Notons aussi la présence de bandes larges ayant un indice de Chern nul ce qui témoigne de la fluctuation de la distribution de Husimi, mais d'une fluctuation

Figure 23: Distribution de Husimi de la bande Ψ_4 , $\gamma = 0.66$, $N = 11$ d'indice de Chern $C = 1$. (la bande Ψ_4 est indiquée par un cercle sur la figure (21)). On observe que la distribution fluctue entre le point fixe instable $(q, p) = (0, 0)$ et la trajectoire périodique stable $(q, p) = (0.7, 0.25)$. Pour $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 3\pi/2)$ la distribution est une superposition des deux autres distributions.



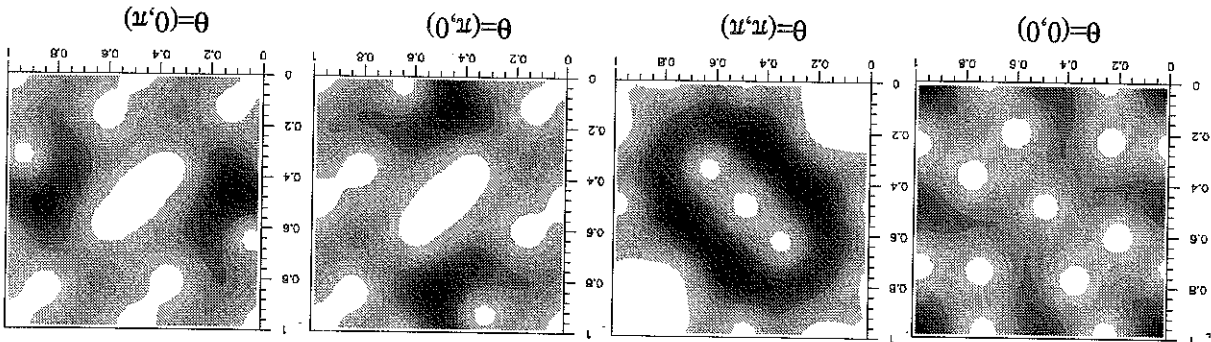
Notons la présence de bandes étroites et d'indice de Chern non nul (comme la bande Ψ_4 pour $\gamma = 0.66$) qui témoigne d'une distribution de Husimi qui fluctue entre des configurations de même quasi-énergie. La figure 23 montre les distributions de Husimi de la bande Ψ_4 pour $\gamma = 0.66$ qui a un indice de Chern $C = 1$. La distribution fluctue entre la région régulière (en $\theta = (0, 0)$) et le point fixe instable (en $\theta = (\pi, \pi)$). La figure 24 montre que pour toutes les valeurs de θ , la distribution de Husimi est répartie principalement sur ces deux trajectoires (comme un effet de résonance). Nous avons observé numériquement que pour $\gamma = 0.66$, chaque bande du spectre peut de la sorte s'interpréter comme une superposition de quelques trajectoires stables ou instables.

3. Troisième régime, $\gamma > 0.4$.
 La dynamique classique est dominée par le chaos. Il y a maintenant plusieurs dégénérescences entre les bandes, les indices de Chern sont pour la plupart non nuls, et la largeur des bandes a considérablement augmenté par rapport aux régimes précédents. Pour les dégénérescences, il n'y a visiblement plus les restrictions pro-

similaires à ceux de la figure 19.
 Le fait que le chemin du paramètre γ coupe une série de tubes de dégénérescences

Pour une "cicatrice" localisée sur une trajectoire contractible pour toute valeur de θ , la bande de quasi-énergie serait étroite et d'indice de Chern nul. On n'observe rien de tel. Mais si le phénomène de cicatrice ne se produit que pour des valeurs particulières de (θ_1, θ_2) , cela n'apparaît pas sur la figure 21. Par exemple, la distribution de Husimi de la figure 23 peut s'interpréter comme une cicatrice localisée

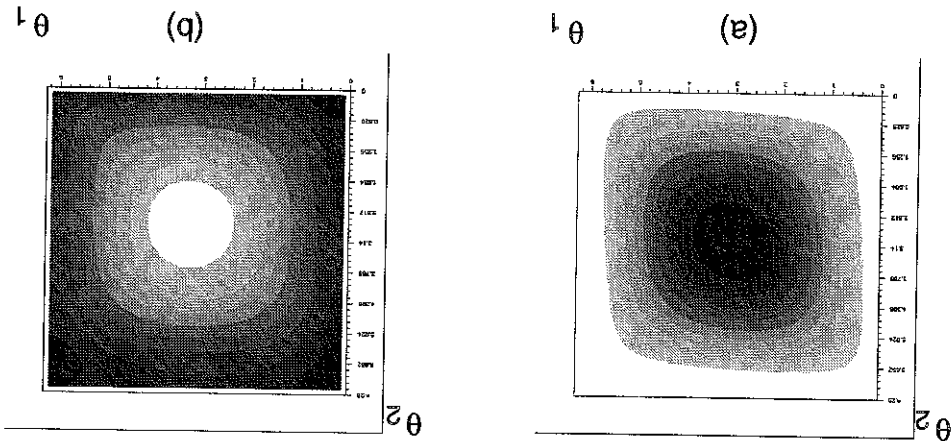
Figure 25: Distribution de Husimi de la bande Ψ_3 pour $\gamma = 0.88$, ayant un indice de Chern $C = 0$. La distribution fluctue néanmoins avec θ .



"contractible" (en terme des zéros). La figure 25 montre par exemple les distributions de Husimi de la bande Ψ_3 pour $\gamma = 0.88$ qui a un indice de Chern $C = 0$. Il apparaît tout de même que la distribution fluctue avec θ .

Ces deux images sont complémentaires. On déduit que l'état Ψ_4 est essentiellement une superposition de ces deux structures.

Figure 24: Pour $\gamma = 0.66$. Intensité de la distribution de Husimi de la bande Ψ_4 sur: (a) le point fixe instable $(q, p) = (0, 0)$. (b) la trajectoire périodique stable $(q, p) = (0.7, 0.25)$.

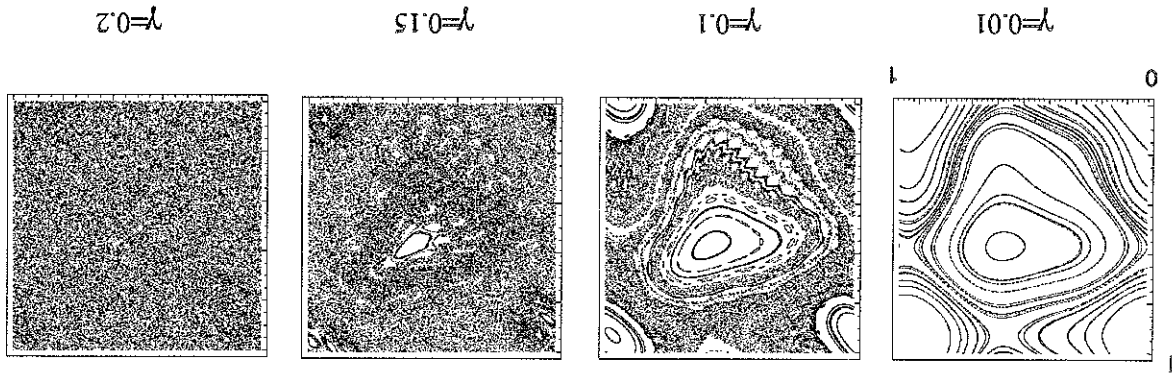


1. Un régime régulier $\gamma > 0.4$, pour lequel il y a répulsion entre les bandes de quasi-énergie quantifiant des tores invariants, sans apparition de dégénérescence ni variation de l'indice de Chern (sauf quelques cas limites). Toujours à la lueur des

classique quasi-intégrable. Néanmoins on observe: fait pas assez élevé pour observer clairement le régime régulier associé à une dynamique classique est déjà dominée par le chaos. Le paramètre de limite classique N n'est en γ , et dans cet essai numérique, lorsque les premiers croisements ont lieu, la dynamique et sur l'intervalle $\gamma \in [0, 1.04]$. L'ergodicité classique apparaît pour des faibles valeurs de La figure 27 montre les bandes de quasi-énergie et leur indice de Chern, pour $N = 11$,

(53).

Figure 26: Sections stroboscopiques des trajectoires classiques de l'Hamiltonien sans symétrie



chaotique.

On y observe à nouveau une transition progressive du régime régulier vers un régime La figure 26 montre l'allure des sections stroboscopiques pour différentes valeurs de γ .

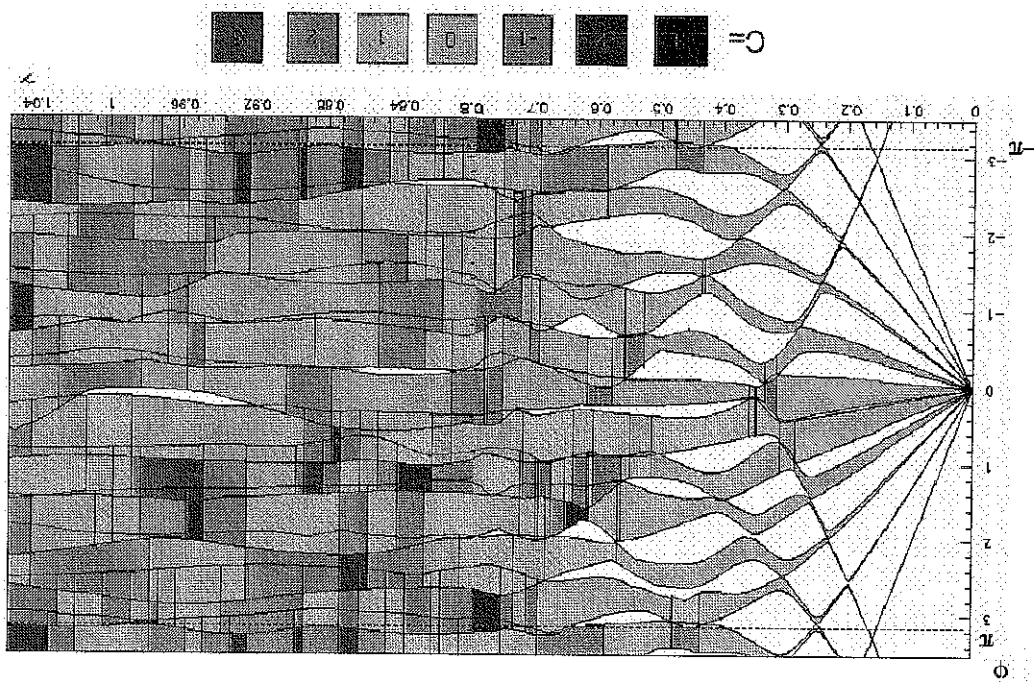
$$\mathcal{H}(q, p, t) = -\cos(2\pi q) - \frac{1}{4} \cos(4\pi q + \frac{\pi}{4}) - [\cos(2\pi p) + \frac{1}{2} \cos(4\pi p + \frac{\pi}{2})] K(t) \quad (53)$$

cela implique au niveau du spectre et des indices de Chern. de ne pas posséder les nombreuses symétries de celui-ci. Nous verrons les différences que Le Hamiltonien suivant est légèrement différent de celui du Harper pulsé, et a l'avantage

5.2 Un modèle sans symétrie.

sur la trajectoire instable $(q, p) = (0, 0)$ pour $\theta = (0, 0)$ seulement.

Figure 27: Bandes de quasi-énergies et indices de Chern du modèle sans symétrie (53).



résultats de la section précédente, cela s'explique par le fait que les résonances se produisent entre des tores quantifiés qui ne sont pas placés de façon symétrique dans l'espace de phase et entre lesquels il y a une unique "distance" minimale, comme schématisé sur la figure 17(a).
 Les bandes dans cette région ne sont pas très fines, cela est dû au fait que la dynamique classique est déjà assez ergodique pour ces valeurs de γ .

2. Dans le régime chaotique $\gamma \gtrsim 0.4$, les bandes deviennent plus larges, mais cette fois-ci les variations de l'indice de Chern sont ± 1 , comme pour le cas générique. On observe de plus une faible dispersion de la valeur de l'indice de Chern autour de la valeur $C = 0$, et l'indice de Chern est même nul très fréquemment.

5.3 Présence de dégénérescences dans le cas chaotique.

Dans ce paragraphe, nous allons poursuivre la description des lignes de dégénérescences entrecroisées autour de la figure 18. Pour une famille de Hamiltoniens dépendant de deux paramètres $H(\gamma_1, \gamma_2)$, et pour une dynamique intégrable, il est apparu que lorsque la couche d'énergie est composée de trajectoires contractibles, les lignes de dégénérescence forment des petites boucles à l'extérieur desquelles l'indice de Chern est nul.

Cette description nous permet d'interpréter les résonances avec dégénérescence dans le régime régulier du modèle de Harper pulvé symétrique comme une intersection de ces boucles. Elle nous permet aussi d'interpréter les résonances sans dégénérescence dans le régime régulier du modèle sans symétrie comme un passage "à côté" de ces boucles, sans les intercepter.

Lorsque le régime devient plus chaotique, les figures 21 et 27 ont tendance à montrer que ces boucles de dégénérescence deviennent plus larges jusqu'à finalement déborder les unes sur les autres et cesser d'être un phénomène exponentiellement localisé. Ainsi les premières dégénérescences du modèle sans symétrie peuvent s'interpréter comme une intersection du chemin $H(\gamma)$ avec le bord de ces boucles qui deviennent plus larges.

Dans le régime chaotique, la multitude des dégénérescences témoigne de multiples intersections du chemin $H(\gamma)$ avec des lignes de dégénérescences. Cela porte à penser que contrairement au régime intégrable, les lignes de dégénérescence sont cette fois-ci dans une configuration "ouverte", ne formant pas de boucles, et sont dispersées comme aléatoirement sur un plan à deux paramètres (γ_1, γ_2) .

Cela signifie que lorsque la dynamique classique passe d'un régime régulier à un régime

chaotique, ces lignes de dégénérescences subissent une "transition de phase", en passant d'une configuration régulière, en boucles très petites et alignées, à une configuration de lignes ouvertes pouvant se couper. Il s'agit d'une transition analogue à celle observée par A. Voros et P. Leboeuf sur les zéros de distributions de Husimi ou celle observée dans la statistique des niveaux.

Afin de représenter quelques-unes de ces lignes, nous avons considéré l'Hamiltonien à deux paramètres V_1, V_2 suivant:

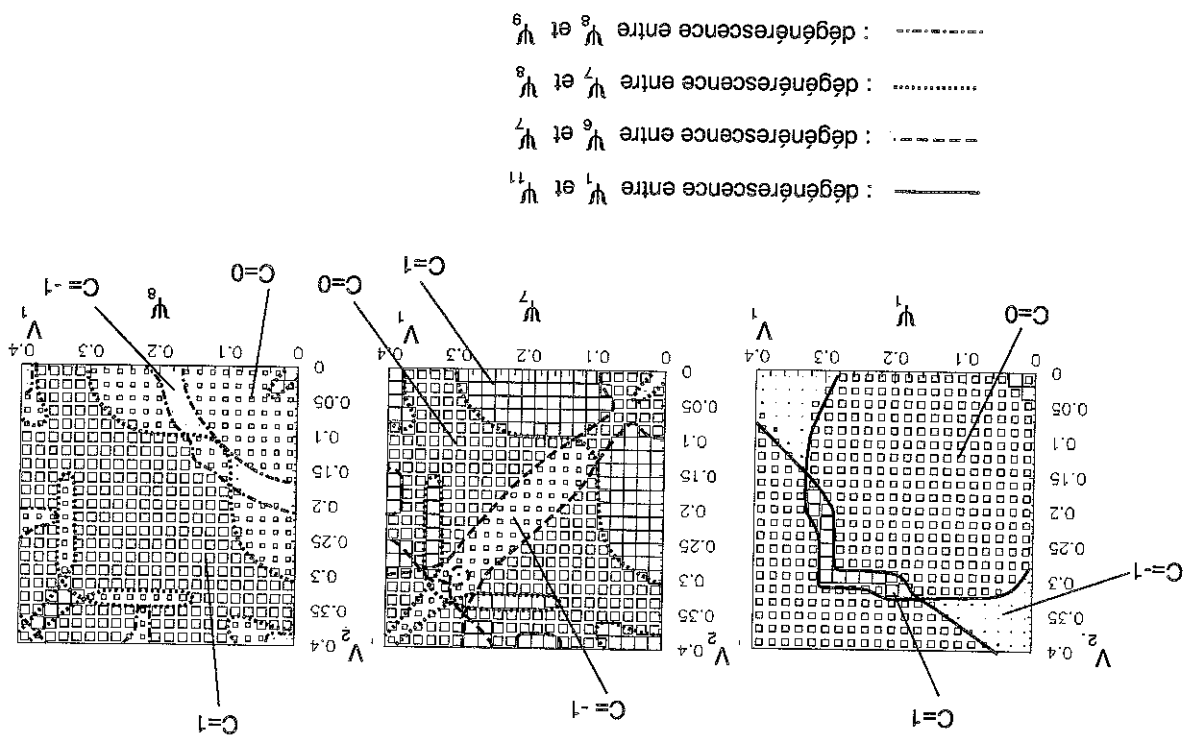
$$H(q, p, t) = -\cos(2\pi q) - V_1 \cos(4\pi q + \frac{q}{4}) - [\cos(2\pi p) + V_2 \cos(4\pi p + \frac{p}{4})] K(t) \quad (54)$$

Nous avons calculé l'indice de Chern des différentes bandes pour $N = 11$ niveaux et $\gamma = 0.51$, en discrétisant le domaine $(V_1, V_2) \in [0, 0.4]^2$.

Les lignes de dégénérescences entre deux niveaux apparaissent comme étant la frontière entre deux domaines d'indices différents.

La figure 28 montre le résultat pour la bande Ψ_1 , qui met en évidence deux lignes de dégénérescences génériques ($\Delta C = \pm 1$) se coupant, et pour les bandes Ψ_7 et Ψ_8 montrant des lignes de dégénérescences communes et d'autres qui sont en commun avec les bandes Ψ_6 et Ψ_9 . Certains détails échappent à la discrétisation. On observe des croisements entre les différentes lignes.

Figure 28: Indices de Chern de l'Hamiltonien $H(V_1, V_2)$ (54) pour les trois bandes Ψ_1 , Ψ_7 et Ψ_8 . Les lignes de dégénérescence entre les bandes correspondent aux frontières des domaines. La taille des carrés correspond à la valeur de l'indice de Chern calculée numériquement.



References

- [1] K.V. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980). "New method for high-Accuracy Determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance".
- [2] D.R. Hofstadter, "Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields" Phys. Rev. B **14**, 6, 2239 (1976).
- [3] "L'avènement de la nano-électronique" La recherche 237, Nov. 1991, 1298.
- [4] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982). "Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential".
- [5] Y.S. Wu "Topological aspects of the quantum Hall effect" Proceedings at NATO Advanced Summer institute "Physics, Geometry and topology" at Banff, Alberta, Canada, August 14-25, 1989.
- [6] P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold and D. P. Arovas, Phys. Rev. Lett. **65**, 3076 (1990); Chaos **2** 125 (1992). "Phase-space localization: topological aspects of quantum chaos".
- [7] D. P. Arovas, P. N. Bhatt, F. D. M. Haldane, P. B. Littlewood and R. Rammal, Phys. Rev. Lett. **60**, 619 (1988). "Localization, Wave function topology, and the integer quantized Hall effect".
- [8] M.V. Berry "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes" Proc. Roy. Soc. Lond. **392**, 45 (1984).
- [9] A. M. Perelomov, "Generalized coherent states and their applications" (Springer, Berlin) 1986.
- [10] M. Wilkinson, "Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems" Proc. R. Soc. Lond. A **391**, 305 (1984).
- [11] These de Armelle Barelli "Approche algébrique de la limite semi-classique. Electrons bidimensionnels en champs magnétique et localisation dynamique". Université Paul Sabatier de Toulouse n° 1250.

- [12] W. M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, "Coherent states: theory and some applications" *Rev. of Modern Phys.* **62**, 867 (1990).
- [13] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam *Coherent states, Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific (1984).
- [14] P. Leboeuf and A. Voros "Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates" *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 1765 (1990).
- [15] P. Leboeuf, A. Voros, "Quantum nodal points as fingerprints of classical chaos" Preprint.
- [16] A. Voros, P. Leboeuf, "Multiplicative formulation of quantum mechanics" Preprint Saclay Spht /91-179.
- [17] A. Voros "Wentzel-Kramers-Brillouin method in the Bargmann representation" *Phys. Rev. A* **40**, 6814 (1989).
- [18] J. Kurchan, P. Leboeuf, M. Saraceno "Semiclassical approximation in the coherent state representation" *Phys. Rev. A* **40**, 6800 (1989).
- [19] T. Paul, A Uribe " A construction of quasi-nodes using coherent states " to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. théor.*
- [20] M. Nakahara, "Geometry, topology and physics", graduate students series in physics, Adam Hilger, Bristol and N.Y.
- [21] J. W. Milnor "Characteristic classes" Princeton university press 1974.
- [22] Exposé de Yves Colin de Verdière "Fibres en droites et valeurs propres multiples" à l'Institut Fourier de Grenoble le 17 déc. 1993.
- [23] "Geometric phases in physics" A. Shapere and F. Wilczek Advanced Series in Math. Physics Vol. 5.
- [24] B. Simon, "Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase" *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).
- [25] M.V. Berry, N.L. Balazs, M. Tabor, A. Voros, "Quantum maps" *Ann. of Phys.* (N.Y.) **122**, 26, (1979).

- [26] P. Leboeuf "Phase space approach to quantum dynamics" *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, 4575 (1991).
- [27] E. Bogomolny, O. Bohigas, P. Leboeuf, "Distribution of roots of random polynomials" *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2726 (1992).
- [28] "Chaos and Quantum Physics", edited by M.J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Les Houches Session LII, 1989 (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [29] Yves Colin de Verdière, *Comm. Math. Phys.*, **102**, 497 (1985).
- [30] R. Aurich and F. Steiner "Quantum eigenstates of a strongly chaotic system and the scar phenomenon" Preprint desy 93-057 (1993).
- [31] B. Parrisé and Y. Colin de Verdière, Preprint.
- [32] F. Bensch, H.J. Korsch, B. Mirbach, V. Ben-Tal "E.B.K. quantization of quasi-energies" *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 6761, (1992).