Quantification canonique du champ électromagnétique

Frédéric Faure

Exposé d'introduction a la quantification canonique du champ électromagnétique, dans le cadre du groupe de travail "Physique Quantique" à l'Institut Fourier en juin 1997.

Contents

I. INTRODUCTION

On présente le formalisme de la quantification canonique des équations de Maxwell, avec des charges électriques extérieures. C'est à dire que dans ce modèle, il y a des charges dans l'univers, qui influencent le champs électromagnétique, mais on ne considèrera pas inversement, l'influence du champs électromagnétique sur les charges. (Cela ferait l'objet d'une théorie quantique des champs avec interaction).

On présente l'approche Hamiltonienne, qui nécessite un feuilletage temporel de l'espace-temps, et brise donc l'invariance géométrique de Lorentz. Mais on restera malgré tout le plus "covariant" (i.e. "invariant relativiste") possible. On traitera seulement le cas d'un espace temps plat.

Ce qui suit est basé sur les livres de C.Cohen-Tannoudji "Photons et atomes" ed.CNRS [1] et de Ityzkson et Zuber "Quantum Field Theory" chap.3. [2]. Les équations de mouvement du champ électromagnétique classique sont les équations de Maxwell (voir exposé de Yves Colin de Verdière précédent) [3]. La démarche de la quantification canonique du champ électromagnétique (nbre infini de degrés de liberté), est analogue à la quantification standard d'un système à nombre fini de degrés de liberté, et se résume dans notre cas par:

1. Exprimer les équations de Maxwell (avec charges externes), sous forme Hamiltonienne. Cela nécessite le choix d'un feuilletage temporel, et le choix de la Jauge de Lorentz (invariante relativiste).

2. On obtient un Hamiltonien quadratique. On va donc le diagonaliser, et trouver les variables normales.

3. Quantification canonique: construction de l'espace de "Hilbert"(=espace de Fock) des états, et du Hamiltonien quantique (opérateur). La curiosité est que cet espace de Fock aura une norme non positive: des états quantique auront des normes négatives. Le sous-espace des états physiques sera lui un espace de Hilbert (avec norme ¿0)

La dernière section sera une illustration de la situation physique où deux charges électriques sont en présences: on décrira explicitement de l'état quantique du champs électromagnétique (i.e. description quantique du champ de Coulomb).

Il faut mentionner deux autres approches différentes pour la quantification des équations de Maxwell:

- La quantification canonique avec le choix de la Jauge de Coulomb non covariante. ($\partial_i A_i = 0$ avec les notations ci-dessous). Cette quantification est bien appropriée pour décrire les phénomènes physiques de basse énergie: couplage entre les atomes et les photons.

- La quantification par intégrale fonctionnelle (intégrale de Feynmann), qui est invariante de Lorentz, mais où il n'y a pas explicitement un espace des états physiques.

II. RAPPEL SUR LES ÉQUATIONS DE MAXWELL CLASSIQUES

(voir exposé de Yves Colin de Verdiere)

A. Sur une variété Lorentzienne M

L'espace temps M est une variété Lorentzienne (M, g) orientable, munit d'une métrique g de signature $(+1, -1, -1, -1)$. Un système de coordonnées "temps-espace" est noté (t, x, y, z). A partir de la section 2.2, on supposera l'espace-temps M plat.

1. Equations de Maxwell

Elle s'écrivent

$$d * dA = j \tag{1}$$

avec A : 1-forme (inconnue) qui caractérise la configuration du champ électromganétique, et j :3-forme qui caractérise la répartition de charges électriques dans l'espace-temps. d est la dérivée extérieure, et $*$ est l'opérateur "star" de Hodge. Comme expliqué dans l'introduction, dans tout cet exposé, on suppose j fixé.

Remarque: cela suppose que la 3-forme j est fermée:

$$dj = 0$$

On appelle cette relation la **relation de conservation de la charge** car si j est spatialement à support dans un compact; dans un système de coordonnées (t, x, y, z), on pose que la charge totale sur l'hypersurface $t = cste$ est $Q(t) = \int j_t(t, x, y, z)dxdydz$. La relation $dj = 0$ impose alors que $dQ/dt = 0$.

Note: dans l'exposé précédent, A est noté C.

On définit la 2-forme "tenseur électromagnétique":

$$F = dA \tag{2}$$

2. Champs électriques et magnétiques

Si un choix du temps est fait sur M , (i.e. choix d'une fonction t sur M), alors on définit les champs électrique (1-forme) E et magnétique (2-forme) B comme étant les uniques formes différentielles sur M donnant la décomposition suivante de F :

$$F = B + E \wedge dt$$
$$i_{\widetilde{dt}} E = i_{\widetilde{dt}} B = 0$$

où i est le produit intérieur, et $\widetilde{dt}$ est le vecteur tangent associé à la 1-forme $dt = g(\widetilde{dt}, .)$.

3. Invariance de Jauge

L'invariance de Jauge de l'équation de Maxwell se traduit par le fait que d'autres solutions sont données par le changement:

$$A \rightarrow A' = A + df$$

où f est une fonction quelconque sur M.

4. Extrémale de l'action

L'action de Maxwell est

$$S(A) = \int_M \mathcal{L}\ \mu$$

avec μ la 4-forme volume sur M et la fonction sur M:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g(F, F) + g(*A, j) \tag{3}$$

appelée la **densité Lagrangienne.**
Propriété: les solutions des équations de Maxwell sont les extremales de S.

B. Sur l'espace de Minkowski

On suppose dans la suite que l'espace-temps M est plat ("espace de Minkowski").
Notation: on choisit un système de coordonnées noté dans la suite:

$$(t, x, y, z) = (x_0, \overrightarrow{x}) = (x_\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (x_0, x_{i=1,2,3})$$

dans lequel la métrique s'écrit $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz = g_{\mu,\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$. (donc $g_{\mu,\nu} = \pm\delta_{\mu,\nu}$). On notera aussi souvent x pour $\overrightarrow{x}$.
Remarque: les unités sont telles que $c = 1$, et **la sommation sur les indices μ, ν est sous entendue.**
Dans ce système de coordonnées, on écrit:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$
$$A = A_\mu dx^\mu$$
$$j = j_\mu dx^\mu$$

Le tenseur métrique g permet de créer de nouveaux tenseurs par contraction. Par exemple: $\mathcal{A}$ est un vecteur tangent définit par $A = g(\mathcal{A}, .)$. Dans le système de coordonnées choisi, $\mathcal{A} = A^\mu \partial/\partial x^\mu$ avec ses composantes

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

et où $g^{\mu\nu}$ est la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$.

L'équation 2 et les équations de Maxwell 1 donnent:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

($\partial_\mu = \partial/\partial\mu$ et $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial/\partial\nu$)
La densité Lagrangienne 3 s'écrit:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{4}$$

1. Jauge de Lorentz

On aura besoin dans la suite d'imposer la condition supplémentaire

$$\delta A = 0$$

où δ est l'adjoint à la dérivée extérieure. Cela donne $d * A = 0$ ou encore

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Ce choix de Jauge de Lorentz est possible après transformation de Jauge d'une solution A quelconque des équations de Maxwell (il suffit de choisir f tel que $\Delta f = -\delta A$).

Notons que la liberté de Jauge n'est pas totalement supprimée puisque le changement $A' = A + df$ avec la fonction f vérifiant $\Delta f = \delta df = 0$ est permis (f fonction harmonique).

L'équation de Maxwell (1) s'écrit alors $\Delta A = *j$, car $(-d\delta - \delta d)A = -\delta dA = *d * dA$. Cela donne

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu \tag{5}$$

III. FORMULATION HAMILTONIENNE

A. Problème dans la transformée de Legendre

A l'instant t, le Lagrangien fonctionnelle du champ A_μ et de sa dérivée temporelle $\partial_0 A_\mu$ est

$$L = \int d^3x \mathcal{L}$$

où $d^3x = dxdydz$, et $\mathcal{L}$ est donné par (4).

Par dérivation fonctionnelle l'impulsion conjuguée à A_0 est

$$\pi_0 = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_0)} = 0$$

Ce résultat est génant pour la quantification. Il montre qu'en fait A_0 n'est pas une variable dynamique à proprement parler.

B. Choix d'un nouveau Lagrangien

On va choisir un nouveau Lagrangien, qui engendre la même dynamique dans le sous espace des champs vérifiant la Jauge de Lorentz $\delta A = 0$.

On considère le Lagrangien modifié

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu . A^\mu)^2$$

(le choix $\lambda = 1$ s'appelle **Lagrangien de Fermi** ou de Feynmann, et $\lambda \to \infty$ le **Lagrangien de Landau**).
ou le suivant:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) - j_\mu A^\mu$$

qui lui est équivalent car ils diffèrent par une divergence $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu(A^\mu \partial_\nu A^\nu - A^\nu \partial_\nu A^\mu)$ et forment donc la même action.
En séparant les indices temps (0) et espace ($i = 1, 2, 3$) on obtient:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\left((\partial_0 A_i)^2 - (\partial_0 A_0)^2 - (\partial_i A_j)^2 + (\partial_i A_0)^2\right) - j_0 A_0 + j_i.A_i \tag{6}$$

Les équations d'Euler-Lagrange avec $\mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$ donnent $\Delta A + (1-\lambda) d\delta A = *^{-1} j$ soit en coordonnées:

$$\Delta A^\mu - (\lambda - 1)\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu$$

qui **coincident bien avec les équations de Maxwell sur le sous espace de la Jauge de Lorentz** $\partial_\nu A^\nu = 0$.

C. Construction du Hamiltonien

1. Impulsions

A partir du Lagrangien (6), on obtient les impulsions par dérivée fonctionnelle:

$$\pi_j(t, x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_j(x))} = \partial_0 A_j$$
$$\pi_0(t, x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_0(x))} = -\partial_0 A_0$$

cad $\pi_\mu = -g_{\mu\nu}\partial_0 A_\nu$.

2. Le Hamiltonien

La Hamiltonien $H(A_\mu, \pi_\mu)$ s'obtient par transformée de Legendre du Lagrangien. On note $H = \int d^3\overrightarrow{x}\mathcal{H}$. On obtient que la **densité Hamiltonienne** est:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_j(\partial_0 A_j) + \pi_0(\partial_0 A_0) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\pi_j^2 - \frac{1}{2}\pi_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_i A_j)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i A_0)^2 + j_0 A_0 - j_i.A_i\end{aligned} \tag{7}$$

Remarques:

- à chaque instant t, le Hamiltonien H est fonction des champs $A_\mu(t, x)$ et $\pi_\mu(t, x)$ qui sont les variables dynamiques. Le Hamiltonien peut dépendre explicitement du temps à travers la distribution de charge $j_\mu(t, x)$.
- H est quadratique. La dynamique est donc "triviale" car par changement de variables canoniques, on peut diagonaliser H (forme normale) et expliciter des "variables normales", pour lesquelles la dynamique sera très simple: des oscillateurs harmoniques indépendants à 1 dimension .

Le Hamiltonien H est une fonction sur l'espace de phase des champs classique, qui est l'espace cotangent de l'espace des champs $(A_\mu(t, \overrightarrow{x}))$, à t fixé. Cet espace est munit naturellement de la forme symplectique:

$$\Omega = \int d^3\overrightarrow{x}(dA_j \wedge d\pi_j + dA_0 \wedge d\pi_0) \tag{8}$$

Cette forme symplectique donne les équations de mouvement de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{dA_\mu}{dt}(x) &= \frac{\delta H}{\delta \pi_\mu(x)} = -g_{\mu\nu}\pi_\nu \\ \frac{d\pi_\mu}{dt}(x) &= -\frac{\delta H}{\delta A_\mu(x)} = -g_{\mu\nu}(j_\nu + \partial_i\partial_i A_\nu) \end{aligned}$$

(les membres de droite sont des dérivées fonctionnelles).
Rem: en les combinant on retrouve bien les équations de Maxwell (5).

IV. CHANGEMENT DE VARIABLES CANONIQUES; FORME NORMALE DE H

L'expression (7) fait intervenir des dérivées du champ, à coefficient constant. Il est donc naturel de considérer les transformées de Fourier des champs:

$$\widetilde{A}_\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \; A_\mu(x) e^{-ikx}$$

de même pour $\widetilde{\pi}_\mu(k)$ et $\widetilde{j}_\mu(k)$, où l'on note k pour $\overrightarrow{k} = (k_x, k_y, k_z)$.Ce champ est complexe mais vérifie $\widetilde{A}^*_\mu(k) = \widetilde{A}_\mu(-k)$, car $A_\mu(x)$ est réel.
Introduisont les variables complexes

$$\alpha_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|k|}\widetilde{A}_\mu(k) - ig_{\mu\nu}\frac{\widetilde{\pi}_\nu(k)}{\sqrt{|k|}}) \tag{9}$$

et (noter le signe $g_{\mu\nu} = \pm 1$)
Inversement on trouve:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_\mu(k) &= \frac{1}{\sqrt{2|k|}}\left(\alpha_\mu(k) + \bar{\alpha}_\mu(-k)\right) \\ \widetilde{\pi}_\nu(k) &= i\sqrt{\frac{2}{|k|}} g_{\mu\nu}\left(\alpha_\mu(k) - \bar{\alpha}_\mu(-k)\right) \end{aligned}$$

Alors la densité Hamiltonienne réelle "en Fourier" $H = \int d^3k\mathcal{H}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= |k|\left(\bar{\alpha}_j\alpha_j - \bar{\alpha}_0\alpha_0\right) + \mathcal{H}_I \\ &= -|k| g_{\mu\nu}\bar{\alpha}_\mu\alpha_\nu + \mathcal{H}_I \end{aligned} \tag{10}$$

avec la partie d'interaction avec les charges externes:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{1}{\sqrt{2|k|}}(\alpha_0(k)\widetilde{j}_0(-k) + \bar{\alpha}_0(k)\widetilde{j}_0(k) - \alpha_i(k)\widetilde{j}_i(-k) - \bar{\alpha}_i(k)\widetilde{j}_i(k)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|k|}} g_{\mu\nu}(\alpha_\mu(k)\widetilde{j}_\nu(-k) + \bar{\alpha}_\mu(k)\widetilde{j}_\nu(k)) \end{aligned}$$

$\mathcal{H}$ est quadratique et diagonale par rapport aux variables normales $\alpha_\mu(k)$.
Remarque: les variables $A_\mu(x)$,$\pi_\mu(x)$ sont réelles et indépendantes. Les variables $\widetilde{A}_\mu(k)$,$\widetilde{\pi}_\mu(k)$ sont complexes et non indépendantes. Les variables $\alpha_\mu(k)$ sont complexes et indépendantes.

4. *Forme symplectique*

$$\Omega = i\int d^3k\,(d\alpha_j \wedge d\bar{\alpha}_j - d\alpha_0 \wedge d\bar{\alpha}_0) \tag{11}$$
$$= -i\int d^3k\; g^{\mu v}\, d\alpha_\mu \wedge d\bar{\alpha}_v$$

ce qui montre que $\alpha_\mu(k)$ sont des variables complexes canoniques. De plus Ω a une expression "covariante", grâce à l'expression covariante (9).

5. *Equations du mouvement*

Avec les variables normales, les équations de mouvement sont

$$\frac{d\alpha_j}{dt}(k) = -i\frac{\delta H}{\delta\overline{\alpha}_j(k)}$$
$$\frac{d\alpha_0}{dt}(k) = i\frac{\delta H}{\delta\overline{\alpha}_0(k)}$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{d\alpha_\mu(t)}{dt} = -i|k|\alpha_\mu(t) + \frac{i}{\sqrt{2|k|}}\widetilde{j}_\mu(k,t)} \tag{12}$$

Dans le cas où il n'y a pas de charges externes ($j = 0$), on obtient un mouvement d'oscillations de fréquence positive:

$$\alpha_\mu(t) = \alpha_\mu(0)\exp(-i|k|t)$$

sinon la solution générale est explicitement:

$$\alpha_\mu(t) = \left(\alpha_\mu(0) + \frac{i}{\sqrt{2|k|}}\int_0^t \widetilde{j}_\mu(k,t)\exp(i|k|t)\right)\exp(-i|k|t)$$

6. *Condition de Lorentz*

Elle s'écrit

$$\Lambda(x,t) = \partial_\mu.A^\mu(x) = \partial_0 A_0 - \partial_i A_i$$
$$= 0 \quad \forall x, t$$

équivalente à (par T. de Fourier)

$$\widetilde{\Lambda}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2|k|}}\left(ik_j\alpha_j(k) + ik_j\bar{\alpha}_j(-k) + \partial_0\alpha_0(k) + \partial_0\bar{\alpha}_0(-k)\right)$$
$$= i\sqrt{\frac{|k|}{2}}\left(-\alpha_0(k) + \overline{\alpha}_0(-k) + \alpha_l(k) + \bar{\alpha}_l(-k)\right) = 0 \quad \forall k, t$$

(La deuxième expression s'obtient en utilisant les équations du mouvement (12)). On a définit la variable normale $\alpha_l(k)$ dans la direction longitudinale à k:

$$\alpha_l(k) = \frac{1}{|k|}(\alpha_j.k_j)$$

Il faut en particulier que la dérivée s'annulle aussi (en utilisant encore 12):

$$\frac{d\widetilde{\Lambda}(k,t)}{dt} = i\sqrt{\frac{|k|}{2}}(i|k|)\left(\alpha_0(k) + \overline{\alpha}_0(-k) - \alpha_l(k) + \bar{\alpha}_l(-k) - \frac{2}{|k|\sqrt{2|k|}}\widetilde{j}_0(k)\right) = 0 \quad \forall k, t$$

En combinant ces deux résultats, on obtient finalement:

$$\boxed{\alpha_0(k) - \alpha_l(k) = \lambda(k,t)} \tag{13}$$

avec

$$\boxed{\lambda(k,t) = \frac{1}{|k|\sqrt{2|k|}}\widetilde{j}_0(k,t)}$$

qui dépend du temps via la disposition des charges dans l'espace-temps.

7. Effet d'une transformation de Jauge

D'après la section II B 1, une transformée de Jauge préservant la condition de Lorentz est $A(x) \to A'(x) = A + df$ avec $\Delta f = 0$. En représentation de Fourier, cela donne $\widetilde{A}'_\mu = \widetilde{A}_\mu + ik_\mu\widetilde{f}$. D'après 9, on obtient que les variables normales sont modifiées par: $\alpha'_\mu = \alpha'_\mu + k_\mu/\sqrt{|k|}(i|k|\widetilde{f} - \partial_0\widetilde{f})$.

La modification de $\widetilde{A}_\mu$ est donc un vecteur colinéaire à k_μ.

Il est utile maintenant de choisir une base locale à k_μ fixé sur laquelle on décompose les 4 variables normales $\alpha_\mu(k)$ en 4 **variables locales** $(\alpha_0, \alpha_l, \alpha_{\varepsilon 1}, \alpha_{\varepsilon 2})$ définies par:

- l'axe temporel donnant **la composante temporelle** $\alpha_0(k)$
- l'axe colinéaire au vecteur spatial k_i, donnant **la composante longitudinale** $\alpha_l(k) = (\alpha_j.k_j)/|k|$
- deux axes orthogonaux à k_i donnant les **"composantes transverses"** $\alpha_{\varepsilon 1}(k), \alpha_{\varepsilon 2}(k)$.

Rem: les axes $(l, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont dans l'hyperplan $t = cste$ (ils ont une composante temporelle nulle).

Sur ces variables l'effet d'une transformation de Jauge est

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \alpha_0 + F \\ \alpha'_l &= \alpha_l + F \\ \alpha'_\varepsilon &= \alpha_\varepsilon \end{aligned}$$

où F est une fonction quelconque.

Rem: dans cette base, la densité Hamiltonienne est $\mathcal{H} = |k|\left(\bar{\alpha}_l\alpha_l + \bar{\alpha}_{\varepsilon 1}\alpha_{\varepsilon 1} + \bar{\alpha}_{\varepsilon 2}\alpha_{\varepsilon 2} - \bar{\alpha}_0\alpha_0\right) + \mathcal{H}_I$

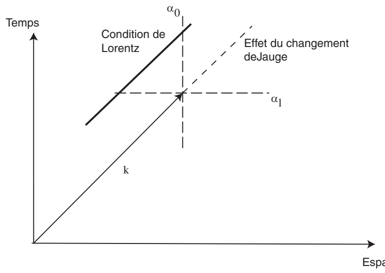

FIG. 1. Schéma à t fixé

8. Signification physique

En résumé, à un instant initial, le champ électromagnétique est caractérisé par les variables $\alpha_{\varepsilon 1}(k), \alpha_{\varepsilon 2}(k)$, $\alpha_l(k), \alpha_0(k)$. Au cours du temps ces variables vont évoluer. Seulement la densité de charge $\widetilde{j}_0(k,t)$ dans l'univers (variable au cours du temps) détermine la valeur $\alpha_0(k) - \alpha_l(k)$ d'après (13). La liberté restante pour ces variables est $\alpha_0(k) + \alpha_l(k)$ qui est une liberté de Jauge sans incidence physique. La combinaison $\alpha_0(k) - \alpha_l(k)$ représente donc **le champ de Coulomb** et ne sont pas vraiment des variables dynamiques au sens où les équations de mouvement ne font pas intervenir de dérivées temporelles.

Seulement les variables $\alpha_{\varepsilon 1}, \alpha_{\varepsilon 2}$ tranverses à k_i sont véritablement des variables dynamiques des équations de mouvement. Leur équation de mouvement est equ.(12). Elles représentent les **2 modes transverses du rayonnement**.(lié aux deux états de polarisation des ondes électromagnétiques).

V. LA QUANTIFICATION CANONIQUE DANS UN CAS TRÈS SIMPLE

Pour rappeler la démarche de la quantification, considérons un problème à un degré de liberté décrit par le Hamiltonien $H(q,p)$ de l'oscillateur Harmonique:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

L'espace de phase (q,p) est munit de la forme symplectique

$$\Omega = dq \wedge dp \tag{14}$$

Les équations de mouvement sont $dq/dt = \partial H/\partial p$, $dp/dt = -\partial H/\partial q$.

En utilisant la variable complexe $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$, cela donne

$$\Omega = i d\alpha \wedge d\overline{\alpha}$$
$$H(\alpha,\overline{\alpha}) = \alpha\overline{\alpha}$$

et les équations du mouvement $d\alpha/dt = -i\partial H/\partial\bar{\alpha}$. Donc $\alpha(t) = \alpha(0)\exp(-it)$.

Pour la quantification l'espace des états sont fonctions (d'ondes) $\phi(q)$ à valeur complexes appartenant à l'espace de Hilbert $L^2(R)$. Sur cet espace agissent les opérateurs de position et impulsion $\widehat{q},\widehat{p}$ ($(\widehat{q}\phi)(q) = q\phi(q)$ et $(\widehat{p}\phi)(q) = -i\hbar d\phi/dq$), vérifiant

$$[\widehat{q},\widehat{p}] = i\hbar \tag{15}$$

Cette relation de commutation est le correspondant quantique de l'expression (14).

On considère alors l'opérateur "d'annihilation"

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\widehat{q} + i\widehat{p})$$

et son adjoint l'opérateur de "création" a^+, donnant $[a,a^+] = 1$.

Considérons la fonction d'onde $\phi_0(x) \equiv |0> \in L^2(R)$ qui est dans le noyau de a. (i.e. $a|0>= 0$). Il s'agit de la gaussienne $\phi_0(q) = \exp(-q^2/2\hbar)$ de centrée en $q = 0$ de largeur $\sqrt{\hbar}$. Par transformée de Fourier, on obtient une gaussienne centrée en $p = 0$, de largeur $\sqrt{\hbar}$. Dans la limite semi-classique $\hbar \to 0$, il s'agit donc d'un état quantique qui s'assimile au point classique $(q = 0, p = 0)$ de l'espace de phase.

Plus généralement, on peut montrer que **l'état cohérent** (ou paquet d'onde gaussien)

$$|\alpha>= \exp(\alpha a^+/\sqrt{\hbar})|0> \tag{16}$$

correspond au point $\alpha = (q+ip)/\sqrt{2}$ de l'espace de phase. Cette correspondance se poursuit même lors de l'évolution temporelle régit par l'équation de Schrödinger, $i\hbar d|\phi(t)> /dt = H|\phi(t)>$ avec l'opérateur auto-adjoint $\widehat{H} = \frac{1}{2}\widehat{p}^2 + \frac{1}{2}\widehat{q}^2$. Appliqué à un état cohérent à l'instant initial $|\phi(0)>= |\alpha>$, cela donne $|\phi(t)>= |\alpha(t)>$, où $\alpha(t)$ est solution des équations de mouvement classique ci-dessus. Le paquet d'onde suit donc le mouvement du point classique $q(t), p(t)$ sur l'espace de phase. Note: cette correspondance exacte est dûe au fait que ici H est quadratique. Sinon l'équivalence ne serait vraie qu'approximativement pour les temps courts (théorie semi-classique).

Cette correspondance justifie donc à posteriori les règles de quantification (15).

Une base ortho-normée de l'espace de Hilbert est donnée par les vecteurs:

$$|n>= \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}|0> \qquad n = 0,1,2,3,..$$

VI. QUANTIFICATION CANONIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Par analogie à l'exemple ci-dessus, et d'après la forme symplectique (8), on doit avoir en variables d'espace:

$$[A_\mu(x), \pi_\mu(x')] = i\hbar\delta^3(x - x')$$

ou ici et dans la suite, $A_\mu(x), \pi_\mu(x)$ sont des opérateurs auto-adjoints agissant dans un espace vectoriel complexe appelé **espace de Fock**, munit d'un certain produit scalaire que l'on va déterminer.

Ainsi aux variables normales (9) correspondent les opérateurs $a_\mu(k), \bar{a}_\nu(k')$ définit par les même relations (substitution $\alpha \to a\sqrt{\hbar}$) et qui satisfont les relations de commutation (prévisible d'après (11)):

$$[a_\mu(k), \bar{a}_\nu(k')] = -g_{\mu\nu}\delta^3(k - k')$$

$\bar{a}$ est un opérateur de "création" adjoint de a pour le produit scalaire explicité plus loin.

9. Espace de Fock F

On définit l'état "du vide" $|0>$ par

$$a_\mu(k)|0>= 0 \quad \forall\mu, k$$

et l'état à (n_0, n_j) photons par

$$|n_0, n_j>= \frac{1}{\sqrt{n_0!n_j!}}\bar{a}_0^{n_0}\bar{a}_j^{n_j}|0>$$

Ces états forment une base de l'espace de Fock F qui est l'espace vectoriel dans lequel agissent les opérateurs ci-dessus.

Voici la décomposition de l'espace de Fock associée à cette base: $F = F_0 \otimes_{j=1,2,3} F_j$.

10. Produit Scalaire sur F

A partir de la relation $[a_0, \overline{a}_0] = -1$, on obtient que (C29)

$$\begin{aligned} \bar{a}_0|n_0> &= \sqrt{n_0+1}|n_0+1> \\ a_0|n_0> &= -\sqrt{n_0}|n_0-1> \\ <n_0|n_0'> &= (-1)^{n_0}\delta_{n_0,n_0'} \end{aligned}$$

La norme est donc négative pour certains états (si n_0 est impair) dans l'espace F_0.

Là se trouve la subtilité et la difficulté de la quantification du champ électromagnétique.

Par contre sur les espace F_j, la norme est définie positive.

11. Hamiltonien

A partir de (7), on obtient

$$H = \int d^3k\ \hbar k \left[(\bar{a}_j a_j - \bar{a}_0 a_0) + 1 + \widetilde{j}_0^*\widetilde{A}_0 - \widetilde{j}_i^*\widetilde{A}_i\right]$$

(qui est analogue à (10) avec un terme 1 en plus qui contribue à l'énergie de l'état fondamental, appelée énergie du vide). L'évolution temporelle d'un état de l'espace de Fock $|\psi(t)>$ est gouvernée par l'équation de Schrodinger $i\hbar d|\psi(t)>/dt = \widehat{H}|\psi(t)>$.

L'opérateur nombre de photons est:

$$N = \int d^3k\, (\bar{a}_l(k)a_l(k) - \bar{a}_0(k)a_0(k))$$

car donnant $\widehat{N}|n_0, n_j>= \left(\int d^3k(n_0 + \sum_j n_j)\right)|n_0, n_j>$

Rem: le fait que le Hamiltonien soit quadratique garantit que l'évolution quantique s'identifie exactement à l'évolution classique, comme pour l'oscillateur Harmonique.

D'après (13), on considère à l'instant t, les états $|\psi(t)>\in F$ définit par

$$(a_l(k) - a_0(k) + \lambda(k,t))\,|\psi(t)>= 0$$

Ces états définissent donc le **sous espace physique** $F_{phys}(t) \subset F$.

Cette famille de sous-espaces est stable par la dynamique: si $|\psi(t)>\in F_{phys}(t)$ et $|\psi(t)>$ évolue dans F selon $i\hbar d|\psi(t)>/dt = \widehat{H}|\psi(t)>$, alors $|\psi(t')>\in F_{phys}(t')$.

VII. ILLUSTRATION DANS LE CAS DE CHARGES EXTÉRIEURES STATIQUES

On donne un exemple de ce qui précède dans une situation bien connue: deux charges électriques statiques en présence. On sait que classiquement, il y a entre les charges un potentiel électrostatique de Coulomb. On va obtenir sa description quantique.

Les charges sont statiques dans le référentiel (t,x,y,z), donc la densité de courant $j = (j_0, j_j = 0)$ est caractérisée par $j_0(x)$ indépendant du temps t. Par exemple, pour deux charges q_1, q_2 en x_1 et x_2:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= q_1\delta(x-x_1) + q_2\delta(x-x_2) \\ \widetilde{j}_0(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(q_1 e^{-ikx_1} + q_2 e^{-ikx_2}) \end{aligned}$$

La densité Hamiltonienne est

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \hbar\omega(-\bar{a}_0(k)a_0(k) + 1) + a_0(k)j_0^*(k) + c.c. \\ &= \hbar\omega(-\bar{b}_0 b_0 + \bar{\lambda}\lambda + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

en définissant l'opérateur $b_0 = a_0 - \lambda$ et le nombre

$$\lambda(k) = \frac{1}{k\sqrt{2\hbar k}}\widetilde{j}_0(k)$$

Pour simplifier, on ne mentionne pas les degrés de liberté spatiaux a_j. On se restreint aussi au sous espace à zéro photons spatiaux $n_j = 0$.

Le sous espace physique F_{phys} est alors défini par $(-a_0 + \lambda)|\psi>= 0$. Cet espace contient l'état $|\widetilde{0}>$ tel que $b_0(k)|\widetilde{0}>= 0$, $\forall k$. On peut vérifier qu'il s'agit d'un **état cohérent** $|\lambda>$ dont l'expression est donnée par equ.(16). En représentation de Husimi, cet état est localisé dans l'espace de phase α_0 au point $\alpha_0 = \lambda$ défini par les charges, conformément à la dynamique classique. Son étalement est de h (principe d'incertitude).

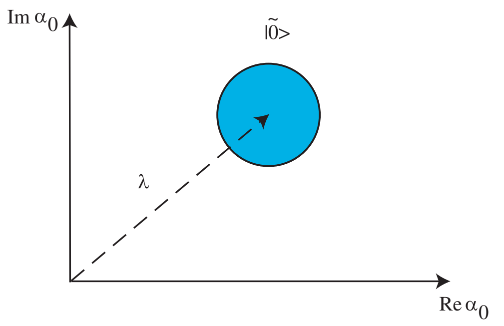

FIG. 2. Vide quantique: Champ de Coulomb statique

C'est un état stationnaire d'énergie E_λ :

$$H|\tilde{0}>=\int d^3k\hbar\omega(\bar{\lambda}\lambda+\frac{1}{2})|\tilde{0}>=E_\lambda|\tilde{0}>$$

L'écart d'énergie par rapport à la situation sans charge est donc

$$\begin{aligned}\Delta E = E_\lambda - E_0 &= \int d^3k\hbar\omega\bar{\lambda}\lambda = \int d^3k\frac{1}{2\varepsilon_0 k^2}\tilde{j}_0^*\tilde{j}_0 \\ &= \varepsilon_{coul}^1+\varepsilon_{coul}^2+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0|r_1-r_2|}\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_i=\frac{q_i^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int d^3k/k^2$ divergent qui est l'énergie electrostatique propre de la charge i. Le troisième terme est l'énergie d'interaction de Coulomb entre deux charges statiques.

---

[1] C.Cohen-Tannoudji. Photons et atomes *ed.CNRS*
[2] Ityzkson et Zuber . Quantum Field Theory
[3] Yves Colin de Verdière. Expose sur les équations de Maxwell.