

Chapitre 3

Dynamique Hamiltonienne, Billards et flot géodésique

On appelle **mécanique classique**, les lois fondamentales de la physique en générale antérieures à la mécanique quantique mais plus précisément les lois « non quantiques ». En mécanique classique il y a :

- Les loi de Newton et de Hamilton : elles définissent les équations du mouvement pour les éléments de matière ou particules élémentaires soumises à différentes forces.
- Les lois de Maxwell : elles décrivent l'évolution des champs électromagnétiques et les forces qu'ils exercent sur la matière chargée.

Ensuite, avec la physique statistique (qui contient la thermodynamique), à partir de ces lois fondamentales, on peut décrire les « milieux continus » comme les gaz, les fluides, les matériaux, les plasmas etc..

La théorie de la relativité d'Einstein (relativité restreinte en 1906 puis relativité générale 1916) est considérée aussi comme une théorie de la mécanique classique (car non quantique). Elle propose un nouveau cadre théorique plus géométrique dans l'espace-temps pour formuler les équations de mouvement de la matière et des champs électromagnétiques.

3.1 Équations de mouvement de la mécanique

Notons $q(t) \in \mathbb{R}^d$ la **position d'une particule** à l'instant $t \in \mathbb{R}$. (il est habituel de considérer les dimensions d'espaces $d = 1, 2, 3$). La fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow q(t) \in \mathbb{R}^d$ s'appelle la **trajectoire de la particule**.

Définition 3.1.1. « **Loi de Newton 1687** ». La trajectoire d'une particule de masse $m > 0$ et soumise à une **force** $F(q, t) \in \mathbb{R}^d$ est déterminée par l'équation différentielle ordinaire :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = F(q, t) \quad (3.1.1)$$

avec la donnée des conditions initiales de position $q(0)$, et vitesse $\frac{dq}{dt}(0)$.

Remarque 3.1.2. d'après le théorème de Cauchy Lipschitz [39], il existe une solution unique à (3.1.1) si F est une fonction Lipschitz.

Il est préférable de transformer l'équation du deuxième ordre en équation du premier ordre. Cela donne les équations de Hamilton ci-dessous.

Définition 3.1.3. On supposera dans tout cet exposé que $F(q, t)$ est une **force potentielle** c'est à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme particulière ^a :

$$F = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_d} \right) =: -\text{grad}(V) \quad (3.1.2)$$

avec une fonction $V(q, t) \in \mathbb{R}$ appelée **énergie potentielle**. Posons l'**impulsion** :

$$p := m \frac{dq}{dt} \in \mathbb{R}^d \quad (3.1.3)$$

et introduisons la fonction réelle suivante, appelée **Hamiltonien** (ou énergie totale)

$$H(q, p, t) := \frac{1}{2m} |p|^2 + V(q, t) \in \mathbb{R} \quad (3.1.4)$$

(Le premier terme $\frac{1}{2m} |p|^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{dq}{dt} \right|^2$ s'appelle l'**énergie cinétique**).

a. Localement il est nécessaire et suffisant que $\text{rot}(F) = 0$

Remarque : dans les notations précédentes, $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, $|p|^2 = \sum_{j=1}^d |p_j|^2$.

Proposition 3.1.4. « *Équations de Hamilton 1833* » Les équations de Newton (3.1.1) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \forall j. \quad (3.1.5)$$

déterminant un champ de vecteur $\mathcal{V} := \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)_j$ sur l'**espace des phases** $(q, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (figure 3.1.1).

Démonstration. On calcule

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} \stackrel{(3.1.4)}{=} \frac{1}{m} p_j \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{dq_j}{dt}$$

et

$$-\frac{\partial H}{\partial q_j} \stackrel{(3.1.4)}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_j} \stackrel{(3.1.2)}{=} F_j \stackrel{(3.1.1)}{=} m \frac{d^2 q_j}{dt^2} \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{dp_j}{dt}$$

□

Remarque 3.1.5. Nous ferons un commentaire dans la remarque 3.3.6 sur l'aspect antisymétrique assez particulier des équations de Hamilton (3.1.5), et que d'une certaine façon

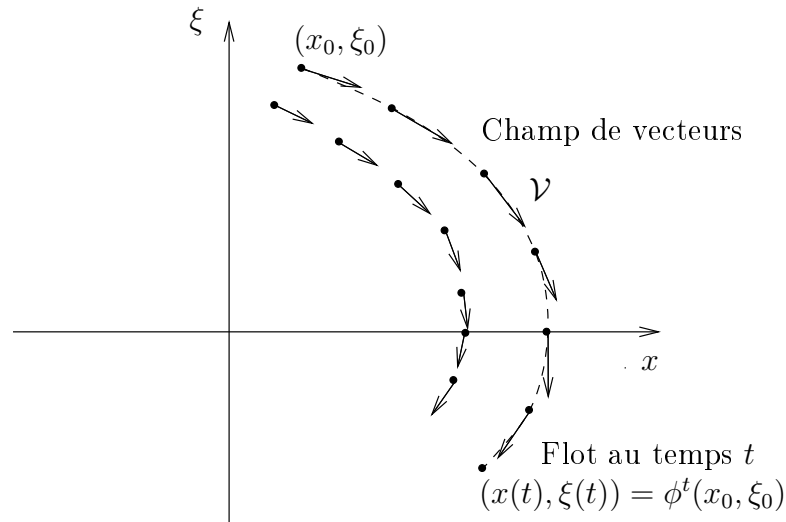


FIGURE 3.1.1 – Champ de vecteurs de Hamilton \mathcal{V} et flot Hamiltonien ϕ^t dans l'espace des phases.

cela laisse déjà entrevoir la mécanique quantique ondulatoire. En 1833 Hamilton a utilisé au départ ces équations pour exprimer l'optique géométrique des rayons qui n'est qu'une approximation de l'optique ondulatoire [23]. Nous verrons de façon analogue que la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique ondulatoire.

3.2 Exemples

Il faut savoir que pour les problèmes à un degré de liberté, $d = 1$ (donc l'espace des phases est $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ de dimension 2), et $H(q, p)$ indépendant de t , alors les équations du mouvement sont solubles. En dimension plus grande elles ne le sont pas en général, sauf exceptions comme le problème à deux corps qui est soluble car il se ramène en fait à un problème à un degré de liberté. Plus généralement ces problèmes solubles sont appelés **systèmes intégrables**[3]. L'étude du chaos dans les chapitres ultérieurs sera au contraire consacrée à l'étude des problèmes parmi les « plus simples » qui ne sont pas solubles.

Exemple 3.2.1. « Le problème à deux corps » C'est un système intégrable d'importance historique car c'est par lui que Newton a écrit (3.1.1) en 1687. A l'échelle du système solaire, on peut considérer la Terre comme un point de masse $m = 6.10^{24}$ kg à la position $q \in \mathbb{R}^3$ soumise à la force d'attraction gravitationnelle de la part du soleil (situé en $q = 0$) :

$$F(q) = -C \frac{u}{|q|^2}$$

avec $u = \frac{q}{|q|}$ vecteur unitaire et $C = \mathcal{G} \cdot m \cdot m_S$ avec la masse du soleil $m_S = 2.10^{30}$ kg et la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m².kg⁻². Cette force dérive de

l'énergie potentielle

$$V(q) = -C \frac{1}{|q|}. \quad (3.2.1)$$

L'équation du mouvement obtenue est $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{m}F(q) = -\mathcal{G} \cdot m_S \frac{u}{|q|^2}$. Remarquer que curieusement la masse de la Terre n'y intervient pas. Cela signifie que par exemple une poussière (ayant une autre masse) qui serait à la place de la Terre (même position et même vitesse) aurait la même trajectoire autour du Soleil. Cette remarque appelée « **principe d'équivalence** » a conduit Einstein à la théorie de la relativité où la gravitation n'est plus une force mais découle de la géométrie de l'espace temps.

De façon analogue mais à une toute autre échelle, dans un atome d'hydrogène, un électron de masse $m = 9,31 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ est soumis à la « force de Coulomb » de la part du proton

$$F(q) = -C' \frac{u}{|q|^2}, \quad V(q) = -C' \frac{1}{|q|} \quad (3.2.2)$$

avec $C' = k_C q \cdot q$ où $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ est la charge élémentaire de l'électron et du proton et $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ est la constante de Coulomb.

Dans ces deux problèmes, grâce à la forme particulière de $V(q)$, on peut résoudre exactement les équations du mouvement et obtenir que les trajectoires de la planète (respect. de l'électron) sont des ellipses (ou paraboles ou hyperboles selon la condition initiale). Voir [3] ou [17, TD6].

Exemple 3.2.2. « **Puits de potentiel, oscillateur Harmonique** ». A une dimension $d = 1$ on s'intéresse à une particule près d'un minimum local de l'énergie potentielle $V(q)$ que l'on suppose en $q = 0$ avec $V(0) = 0$. Par développement de Taylor, on écrit :

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + O(q^3)$$

avec $k = \frac{d^2V}{dq^2}(0) > 0$. En ne gardant que ce premier terme (comme première approximation) le Hamiltonien s'écrit :

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.2.3)$$

et s'appelle le modèle de l'**oscillateur harmonique**. Les trajectoires sont des ellipses dans l'espace des phases¹, voir figure 3.2.1.

1. Avec le changement de variables $Q := \sqrt{\frac{k}{2}}q, P := \frac{p}{\sqrt{2m}}$ et posant $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, Z = Q + iP$, (3.1.5) donne l'équation de mouvement $\frac{dZ}{dt} = -i\omega Z$ qui donne le mouvement de rotation $Z(t) = Z(0)e^{-i\omega t}$.

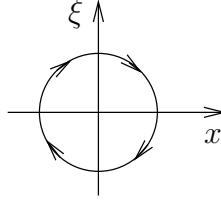


FIGURE 3.2.1 – Une trajectoire de l’oscillateur harmonique dans l’espace des phases. La position $q(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{1}{m}p(t)$ oscillent en quadrature.

3.3 Flot Hamiltonien et crochets de Poisson

Nous précisons quelques aspects de la dynamique Hamiltonienne qui seront utiles plus tard. Pour simplifier l’exposé, on supposera que pour toutes conditions initiales données $(q(0), p(0)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ la solution $(q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de (3.1.5) existe et est unique pour tout $t \in \mathbb{R}$ (Le théorème de Cauchy Lipschitz garantit cela localement en temps si V est Lipschitz).

Définition 3.3.1. Avec les notations précédentes le **flot Hamiltonien** est la famille d’applications pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi^t : \begin{cases} \mathbb{R}^{2d} & \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (q(0), p(0)) & \rightarrow (q(t), p(t)) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

définit par (2.2.3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \left(\frac{d\phi^t(x)}{dt} \right)_{t=0} = \mathcal{V}(x) \quad (3.3.2)$$

Voir figure 3.1.1.

Théorème 3.3.2 (de Liouville). . *Le flot Hamiltonien ϕ^t est **conservatif** : il préserve la forme volume $dqdp = \prod_j dq_j dp_j$ dans l’espace des phases \mathbb{R}^{2d} .*

Démonstration. D’après la proposition 2.2.4, il faut montrer que le champ de vecteur $\mathcal{V} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)_j$ défini en (3.1.5) est de divergence nulle :

$$\operatorname{div}(\mathcal{V}) \stackrel{(52)}{=} \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \stackrel{(3.1.5)}{=} 0.$$

Proposition 3.3.3. « **Conservation de l’énergie** ». *Si la fonction H est indépendante de t (c.à.d. H est seulement fonction de (q, p)) alors la valeur $E = H(q(t), p(t))$ appelée **énergie** est constante le long d’une trajectoire. La couche d’énergie $\Sigma_E := H^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^{2d}$ est l’ensemble des points d’énergie E . C’est un ensemble (sous variété) de dimension $\dim \Sigma_E = 2d - 1$.*

On écrit :

$$\frac{dH(q(t), p(t))}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{dp}{dt} \stackrel{(3.1.5)}{=} \left(-\frac{dp}{dt} \right) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{dq}{dt} \right) \frac{dp}{dt} = 0$$

□

Au lieu de considérer l'évolution d'un point $(q(t), p(t))$ sur l'espace des phases, nous verrons qu'il est naturel et instructif de considérer plus généralement l'évolution d'un nuage de points ou d'une distribution lisse de points, que l'on modélise par une distribution de probabilité $f(q, p) dq dp$ sur l'espace des phases où f est une fonction lisse appelée densité de probabilité. L'hypothèse que f est lisse revient à s'intéresser à presque tous les points, i.e. sauf à un sous ensemble de mesure nulle.

On rappelle la définition de l'opérateur de Liouville (ou Ruelle) donné en (2.2.7) pour un flot conservatif :

Définition 3.3.4. L'opérateur de Liouville exprime l'évolution d'une distribution de probabilité sur l'espace des phases au temps $t \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{L}^t)^* : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) & \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \\ f & \rightarrow (\mathcal{L}^t)^* f := f \circ \phi^{-t} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Remarquons que en utilisant le théorème 3.3.2 de Liouville, la probabilité totale est conservée :

$$\int ((\mathcal{L}^t)^* f) dq dp = \int (f \circ \phi^{-t}) dq dp = \int f dq dp$$

conformément à la proposition générale 2.1.10.

Proposition 3.3.5. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ son évolution infinitésimale est donnée par

$$\frac{d((\mathcal{L}^t)^* f)}{dt} = \{H, f\} = -\mathcal{V}f \quad (3.3.4)$$

où

$$\{H, f\} := \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (3.3.5)$$

s'appelle le **crochet de Poisson** des fonctions H, f et

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_q(q) \frac{\partial}{\partial q} + \mathcal{V}_p(q) \frac{\partial}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial p}$$

est l'opérateur champ de vecteur défini en (2.2.8).

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned}
 \frac{d((\mathcal{L}^t)^* f)}{dt} &\stackrel{(3.3.3)}{=} \frac{d(f \circ \phi^{-t})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{d(\phi^{-t})_q}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{d(\phi^{-t})_p}{dt} \\
 &\stackrel{(3.3.1)}{=} \frac{\partial f}{\partial q} \left(-\frac{dq}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial p} \left(-\frac{dp}{dt} \right) \\
 &\stackrel{(3.1.5)}{=} \frac{\partial f}{\partial q} \left(-\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial f}{\partial p} \left(-\left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) \right) = \{H, f\}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.6. Le formalisme de la mécanique classique Hamiltonienne qui vient d'être esquissé possède une formulation en géométrie différentielle très intéressante et très utile appelée **géométrie symplectique**. Nous référons à [3][39, Sec1.14] pour une introduction proche de la physique et [36, 31, 24, 23] pour plus d'approfondissements. Le point de départ de cette approche est que les équations de Hamilton (3.1.5) sur \mathbb{R}^{2d} peuvent s'exprimer de façon géométrique, i.e. indépendamment du système de coordonnées, de la façon suivante. On introduit la deux forme $\omega := \sum_{j=1}^d dq^j \wedge dp^j$ sur \mathbb{R}^{2d} appelée **forme symplectique**. Alors le champ de vecteur de Hamilton \mathcal{V} est déterminé par l'équation

$$\omega(\mathcal{V}, \cdot) = dH \quad (3.3.6)$$

où dH est la différentielle de la fonction $H(q, p)$.

Démonstration. En coordonnées on note $\mathcal{V} = \sum_{j=1}^d \mathcal{V}_{q,j} \frac{\partial}{\partial q^j} + \mathcal{V}_{p,j} \frac{\partial}{\partial p^j}$. Alors d'une part $\omega(\mathcal{V}, \cdot) = \sum_j \mathcal{V}_{q,j} dp^j - \mathcal{V}_{p,j} dq^j$ et d'autre part $dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial p^j} dp^j + \frac{\partial H}{\partial q^j} dq^j$. L'identité (3.3.6) donne bien $\mathcal{V}_{q,j} = \frac{\partial H}{\partial p^j}$ et $-\mathcal{V}_{p,j} = \frac{\partial H}{\partial q^j}$ qui sont les équations de Hamilton (3.1.5). □

Cette formulation faisant intervenir la géométrie symplectique peut paraître surprenante. Elle laisse en fait soupçonner que la mécanique quantique ondulatoire est « cachée » derrière la mécanique classique. Nous verrons dans la section suivante avec le théorème d'Egorov que la mécanique classique s'obtient à partir de la mécanique quantique ondulatoire dans la limite des petites longueurs d'ondes ($\hbar \rightarrow 0$). Par ailleurs il y a une formulation géométrique de cette limite dans le cadre de la « quantification géométrique » [44] qui montre explicitement que la forme symplectique ω classique provient directement de la forme symplectique canonique sur le projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ de l'espace de Hilbert quantique \mathcal{H} .

3.4 Particule libre dans l'espace Euclidien. Translation sur le tore et billards

Dans cette Section on discute le cas particulier d'un système qui ne subit aucune force extérieure. On dit qu'il est "**libre**". Techniquement, $F = 0$ donc d'après (3.1.2), $V(q) =$

cste, et on peut choisir cette constante nulle : $V(q) = 0, \forall q$. Ainsi (en prenant $m = 1$) on a le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2$. Les équations de Hamilton (3.1.5) donnent

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0. \quad (3.4.1)$$

La solution est

$$p(t) = p(0) = \text{cste}, \quad q(t) = p(0) \cdot t + q(0).$$

Il s'agit donc de **translation rectiligne et uniforme**.

3.4.1 Particule libre sur le cercle S^1 ou le tore \mathbb{T}^d

La position d'une particule sur le cercle est $q \in S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (i.e. défini modulo les entiers). L'espace des phases $(q, p) \in S^1 \times \mathbb{R}$ est un cylindre. Une particule libre se déplace sur le cercle S^1 à vitesse constante $p(0)$ qui dépend de la condition initiale :

$$p(t) = p(0) = p = \text{cste}, \quad q(t) = p \cdot t + q \text{ modulo } 1,$$

Le tore $\mathbb{T}^d = S^1 \times \dots \times S^1 = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ est un produit de d cercles, avec des coordonnées $(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Pour une particule libre sur \mathbb{T}^d , on obtient de même le mouvement en ligne droite à vitesse constante

$$q(t) = pt + q \quad (3.4.2)$$

avec $p \in \mathbb{R}^d$. Voir figure 3.4.1.

Voici différentes situations physiques où il apparaît naturellement ce mouvement appelé "translation sur le tore" :

- Des tiges rigides attachées les unes à la suite des autres dans un plan, et chacune tourne à la vitesse angulaire $\omega_j = (p)_j$. Regardez **ce manège**!. Le résultat d'équidistribution ci-dessous permet de trouver la vitesse de rotation asymptotique de la position du point final $z(t) = \sum_{j=1}^d l_j e^{i\omega_j t}$ où l_j est la longueur de la tige j , voir [4, appendix 13].
- De façon plus importe (car plus fréquente) mais plus abstraite, lorsque l'on étudie au deuxième ordre, un système Hamiltonien avec d degrés de liberté près de son minimum d'énergie, le mouvement est décrit par d oscillateurs harmoniques indépendants de fréquences $(\omega_j)_{j=1, \dots, d}$. Le mouvement de chaque oscillateur est sur un cercle S^1 et celui du système est donc sur un tore \mathbb{T}^d selon (3.4.2) avec $\omega_j = (p)_j$.
- Pour un **système Hamiltonien intégrable** avec d constantes du mouvement, on montre (théorème d'Arnold Liouville) que le mouvement est une translation des "variables angles $\theta_j(t) \equiv 2\pi q_j(t)$ " selon (3.4.2) sur un tore \mathbb{T}^d dans l'espace des phases spécifié par les "variables actions $(I_j)_j$ " qui sont constantes. Voir [3], [17].

En dimension $d = 1$, il est clair que si $p \neq 0$, la trajectoire recouvre tout le cercle S^1 de façon uniforme. En dimension $d \geq 2$ on peut se demander qu'elle partie de l'espace \mathbb{T}^d occupe une trajectoire? voici un résultat. Avant cela, on dit que $p \in \mathbb{R}^d$ est un **vecteur**

3.4. PARTICULE LIBRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN. TRANSLATION SUR LE TORE ET BILLA

irrationnel si $p.k = 0, k \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow k = 0$. En dimension $d = 2$, cela signifie que $\frac{(p)_1}{(p)_0} \notin \mathbb{Q}$ (pente irrationnelle). En dimension quelconque cela signifie que l'hyperplan $(p)^\perp := \{k \in \mathbb{Z}^d, p.k = 0\}$ n'intersecte le réseau \mathbb{Z}^d que en $k = 0$.

Proposition 3.4.1. (Théorème d'équidistribution de Kronecker-Weyl 1910) Si $p \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur irrationnel alors le flot $q(t) = pt + q$ est dense sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et même « **uniquement ergodique** » c'est à dire que pour toute fonction $u \in C^0(\mathbb{T}^d)$ et tout point initial $q \in \mathbb{T}^d$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(q(t)) dt = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} \int_{\mathbb{T}^d} u(q) dq \quad (3.4.3)$$

i.e. la moyenne temporelle de u sur une trajectoire très longue devient égale à sa moyenne spatiale.

De façon équivalente, (3.4.3) s'écrit avec l'opérateur de transfert $(\mathcal{L}^t u)(q) = u(q + tp)$, (2.2.5), l'opérateur de moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^t dt$ et l'opérateur de moyenne spatiale $|1\rangle \langle \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} | \cdot \rangle_{L^2}$ (i.e. projecteur L^2 sur la fonction 1) de la façon suivante. On considère la différence :

$$D_T := \left(\left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^t dt \right) - |1\rangle \langle \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} | \cdot \rangle_{L^2} \right)$$

alors on a la **propriété d'unique ergodicité** :

$$\forall u \in C^0(\mathbb{T}^d), \forall q \in \mathbb{T}^d, (D_T u)(q) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (3.4.4)$$

Remarque 3.4.2. La **propriété d'unique ergodicité** (3.4.4) implique :

$$\forall u, v \in C^0(\mathbb{T}^d), \langle v | D_T u \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

appelée **propriété d'ergodicité** et que l'on verra plus tard dans d'autres exemples.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ on considère la fonction $\varphi_k(q) := \exp(i2\pi k.q)$ appelé **mode de Fourier**. D'après la théorie de Fourier on peut décomposer $u = \sum_k u_k \varphi_k$ avec les coefficients de Fourier $u_k = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{\varphi_k(q)} u(q) dq$. Si $k \neq 0$ alors $k.p \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_k(q(t)) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i2\pi k.(p.t + q)) dt \\ &= e^{i2\pi k.q} \frac{1}{T} \frac{1}{i2\pi k.p} [\exp(i2\pi k.pt)]_0^T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs pour le mode $k = 0$, on a $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi_0(q(t)) dt = 1$. Ainsi

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(q(t)) dt = \sum_k u_k \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_k(q(t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} u_0 = \int_{\mathbb{T}^d} u(q) dq.$$

On a obtenu (3.4.3).

On a $\frac{1}{T} \int_0^T u(q(t)) dt \stackrel{(54)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T (\mathcal{L}^t u)(q) dt$ et $\int_{\mathbb{T}^d} u(q) dq = \langle 1|u \rangle_{L^2}$. Le résultat précédent s'écrit donc $(D_T u)(q) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$. \square

Corollaire 3.4.3. *Si $\mathcal{Z} \subset \mathbb{T}^d$ est un sous ensemble mesurable, on note*

$$T_{\mathcal{Z}}(q, t) := \text{temps passé par } q(t) \text{ dans } \mathcal{Z} \text{ pour } t \in [0, T].$$

Pour tout q on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{T_{\mathcal{Z}}(q, t)}{T} \right) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{Z})}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)}$$

qui signifie que pour toute condition initiale q , la proportion de temps passé par la particule dans l'ensemble \mathcal{Z} est égal à la proportion du volume occupé par \mathcal{Z} . Cette propriété s'appelle "**l'unique ergodicité**".

Démonstration. Prendre la fonction caractéristique $u_{\mathcal{Z}}(q) = 1$ si $q \in \mathcal{Z}$, $u_{\mathcal{Z}}(q) = 0$ sinon. On a $\int_0^T u_{\mathcal{Z}}(q(t)) dt = T_{\mathcal{Z}}(q, t)$ et $\int_{\mathbb{T}^d} u_{\mathcal{Z}}(q) dq = \text{Vol}(\mathcal{Z})$ donc (3.4.3) donne le résultat. \square

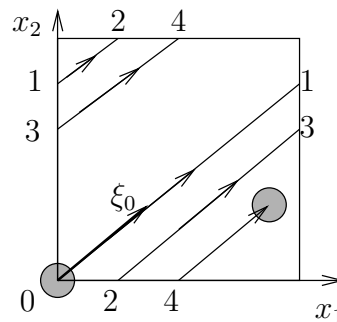


FIGURE 3.4.1 – Une trajectoire sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ illustrant la Proposition 3.4.1. Les numéros successifs représentent les points identifiés par les conditions périodiques. Si la pente de p est irrationnelle alors la trajectoire est dense et même ergodique, sinon la trajectoire est périodique. Cependant un nuage de points (ici un disque) garde sa forme en se translatant : la dynamique n'est pas mélangeante.

Exercice 3.4.4. Loi de Newcomb-Bendford, “application de l'unique ergodicité”.

Observer le tableau 3.1. Suivant Newcomb et Benford 1881, on va étudier un modèle mathématique qui peut aider à expliquer pourquoi la proportion p_c décroît avec c . Voir “Loi de Bendford” sur wikipedia et son utilité pour détecter les fraudes fiscales.

On considère la suite $u_n = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On note c_n le premier chiffre de u_n en base 10. Voici les premières valeurs de c_n marquées en gras :

$$u_n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, \mathbf{32}, \mathbf{64}, 128, \mathbf{256}, \mathbf{512}, 1024, \mathbf{2048}, \dots$$

3.4. PARTICULE LIBRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN. TRANSLATION SUR LE TORE ET BILLARD

Premier chiffre c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de pays	49	36	23	24	13	14	13	10	12
Proportion observée p_c	0,253	0,186	0,119	0,123	0,067	0,072	0,067	0,051	0,062

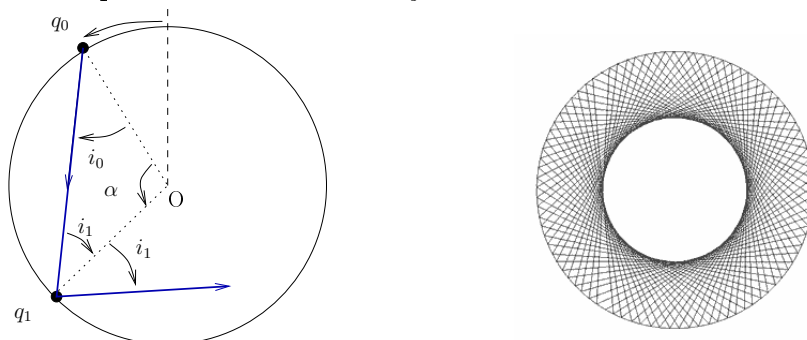
TABLE 3.1 – Répartition du premier chiffre significatif des effectifs de population de 194 pays du monde selon l'édition 2010 du CIA World Factbook

Montrer que dans cette suite $c_n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$ un chiffre donné $c \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$ apparaît avec la probabilité $p_c = \frac{\log(1+\frac{1}{c})}{\log 10}$, soit $p_1 = 30\%, p_2 = 17\%, \dots, p_9 = 4.5\%$. Plus précisément si $\kappa_t(c) := \frac{1}{t} \text{Card} \{n < t, c_n = c\}$ est la proportion de présence du chiffre c dans la séquence $\{c_0, c_1, \dots, c_{t-1}\}$, montrer que

$$\kappa_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p_c.$$

Aide : écrire $c_n 10^{r_n} \leq u_n < (c_n + 1) 10^{r_n}$ et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de $\frac{\log 2}{\log 10}$ modulo 1. Montrer que $\frac{\log 2}{\log 10}$ est irrationnel. Montrer l'unique ergodicité de la dynamique.

Exercice 3.4.5. Billard circulaire. On considère un billard de bord circulaire (rayon 1). Une particule se déplace à vitesse constante dans le disque et rebondit de façon parfaite sur le bord. On note $q_0 \in [0, 2\pi]$ la position angulaire d'un point sur le bord, $i_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'angle du vecteur vitesse par rapport à la normale. (q_0, i_0) détermine l'état initial d'une particule qui suit ensuite une trajectoire dans le billard.



1. L'état initial (q_0, i_0) sur le bord détermine la suite des rebonds caractérisés par $(q_t, i_t) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour $t = 0, 1, 2, \dots$. Exprimer (q_t, i_t) à partir de (q_0, i_0) .
2. Tracer un exemple de trajectoire périodique (fermée) qui fait $m = 3$ rebonds en $n = 1$ tour autour du centre. Tracer un exemple de trajectoire périodique qui fait $m = 5$ rebonds en $n = 2$ tours autour du centre. Montrer plus généralement que une trajectoire est **périodique** si et seulement si $i_0 = \pi \frac{a}{b}$ où a, b sont des entiers premiers entre eux (on dit que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est **rationnel**). Exprimer le nombre m de rebonds et le nombre n de tours effectués en une période en fonction de a, b ? Quelle est la longueur L parcourue pour une trajectoire périodique, en fonction de m, n ?

3. Si I est un intervalle donné du bord et $i_1 = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel**, on note $\kappa_t(I) \in [0, 1]$ la proportion de points $q_{t'}$ de la trajectoire avec $t' \in [0, t - 1]$, qui appartiennent à l'intervalle I :

$$\kappa_t(I) := \frac{1}{t} \# \{t' \in \{0, \dots, t - 1\}, \text{ t.q. } q_{t'} \in I\}.$$

Montrer que pour toute condition initiale q_0 , $\kappa_t(I)$ converge vers la longueur relative $|I| / (2\pi)$ de l'intervalle lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**. *Aide : utiliser la fonction caractéristique l'intervalle $\chi_I(q) = 1$ si $q \in I$ et $\chi_I(q) = 0$ sinon. Observer que $\kappa_t(I) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t \chi_I(q_{t'})$ et que $|I| = \int \chi_I(q) dq$. Décomposer χ_I en séries de Fourier $\varphi_n(q) = \exp(inq)$.*

4. Sans utiliser la question précédente, montrer que si $i = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel** alors les points q_1, q_2, \dots de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle du bord non touché). *Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché.* Retrouver ce résultat comme conséquence de la question précédente.

Solution : voir Section ?? page ??.

Exercice 3.4.6. Sur les nombres rationnels et irrationnels

Montrons que “les nombres rationnels sont exceptionnels parmi les réels”. Soit $x \in [0, 1]$ que l'on écrit en base deux $x = \sum_{k \geq 1} b_k 2^{-k} = [0, b_1 b_2 b_3 \dots]_{\text{base } 2}$ avec $b_k \in \{0, 1\}$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, c'est à dire que l'on peut numéroter tous les éléments.
3. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ est indénombrable (Cantor 1874 qui a montré l'existence de plusieurs “infinis”). *Aide : procéder par l'absurde, faire une liste $m = 1, 2, \dots$ de $x^{(m)} = 0.b_1^{(m)} b_2^{(m)} \dots$ et considérer la diagonale $0.b_1^{(1)} b_2^{(2)} \dots$.*

3.5 Particule libre sur une surface (ou espace courbe). Géodésiques

Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface lisse plongée dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 , une particule de position $q(t) \in \mathcal{S}$ est dite libre de se déplacer sur la surface si la force qu'elle subit est normale à la surface (cette force est telle qu'elle impose à la particule de rester sur la surface). Autrement dit la force tangentielle est nulle, et d'après la loi de Newton, l'accélération tangentielle est nulle. Pour exprimer cela par une équation, on introduit $P_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_q \mathcal{S}$ le projecteur orthogonal sur le plan tangent à la surface au point q et la vitesse $v = \frac{dq}{dt} \in \mathbb{R}^3$. L'accélération dans \mathbb{R}^3 est $\frac{dv}{dt}$ et donc l'accélération tangentielle est $P_q \frac{dv}{dt}$. La condition de particule libre sur la surface s'écrit donc :

$$P_q \frac{dv}{dt} = 0 \tag{3.5.1}$$

Voir figure 3.5.1(a).

En terme géométriques on note $\frac{Dv}{dt} = 0$ et $D := Pd$ s'appelle la **dérivée covariante** ou **connexion de Levi-Civita**. L'absence de force tangentielle fait que la particule va le plus « droit possible » en restant sur la surface. Par définition, on dit que sa trajectoire est une **géodésique**².

Par exemple sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ les géodésiques sont les grands cercles. Sur une surface plate (ou dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^d), les géodésiques sont des droites. On peut montrer [39, p.52], [16], que

- L'équation (3.5.1) a une unique solution $q(t) \in \mathcal{S}$ qui de plus est solution des équations de Hamilton (3.1.5) avec le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|_{T^*\mathcal{S}}^2$ d'une particule libre qui fait apparaître la norme du vecteur cotangent $p \in T_q^*\mathcal{S}$. Comme cette formulation est intrinsèque et géométrique (i.e. invariante par changement de coordonnées) elle s'adapte au cas des variétés Riemanniennes, i.e. variété où chaque espace (co-)tangent est muni d'un produit scalaire. L'espace des phases est ici le fibré cotangent $T^*\mathcal{S}$ qui est une variété de dimension $2\dim\mathcal{S} = 4$. Cette formulation intrinsèque a été utilisée par Einstein en relativité générale pour décrire les lignes d'univers de particules comme des géodésiques dans l'espace temps.
- [39, p.47] Si $A = q(0)$ et $B = q(t)$ sont deux points de la même géodésique alors parmi tous les chemins paramétrés $\gamma : t \rightarrow q(t)$ qui joignent A et B au temps t , la géodésique est un extremum local pour la « fonctionnelle énergie » $\mathcal{E}(\gamma) := \int_0^t \frac{1}{2} \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 dt$ et pour la « fonctionnelle longueur » $l(\gamma) := \int_0^t \left\| \frac{dq}{dt} \right\| dt$ (noter que $l(\gamma)$ est indépendant du paramétrage).

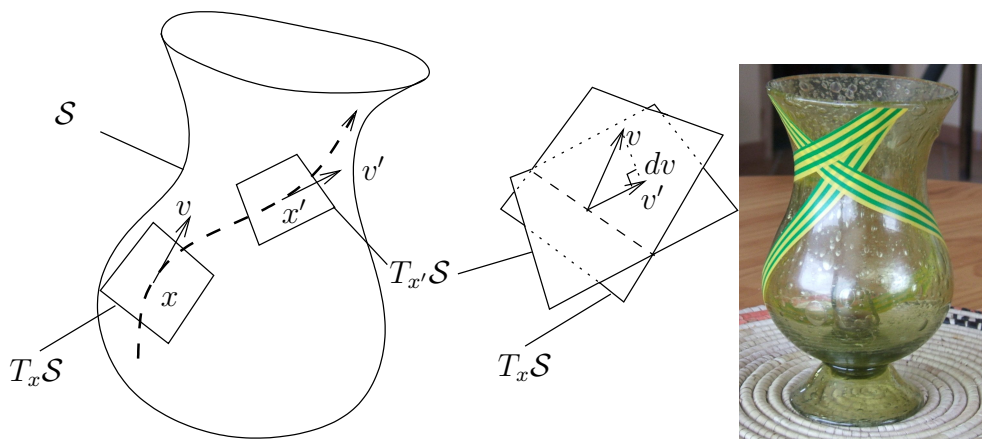


FIGURE 3.5.1 – (a) Géodésique sur une surface \mathcal{S} : le vecteur vitesse $v(t) = \frac{dq}{dt}$ est solution de $P_q \frac{dv}{dt} = 0$ où P_q est le projecteur orthogonal sur le plan tangent $T_q\mathcal{S}$ au point q . (b) En pratique une géodésique est obtenue en collant un ruban de scotch « de façon la plus plate possible », ici sur un vase ayant de la courbure de Gauss positive et négative.

2. Essayer de se convaincre et de démontrer que si l'on colle sans pli un ruban de scotch (étroit) sur une surface alors il suit une géodésique.

Flot géodésique, courbure de Gauss et chaos

La **courbure de Gauss** en un point $q \in \mathcal{S}$ de la surface est

$$\kappa(q) = \frac{1}{R_1(q) R_2(q)}$$

où $R_1(q)$, $R_2(q)$ sont les rayons de courbures extrémaux et avec la convention que $\kappa(q) > 0$ si les rayons sont du même côté et $\kappa(q) < 0$ si ils sont de côté opposé.

Considérons un point $q \in \mathcal{S}$ de la surface et le à la surface au point q . Si dans un voisinage du point q , la surface est d'un seul côté du plan plan tangent $T_q\mathcal{S}$, on dit que la courbure $\kappa(q) > 0$, sinon $\kappa(q) < 0$. Le **théorema Egregium** de Gauss montre que $\kappa(q)$ est une grandeur géométrique intrinsèque à la surface, car peut s'obtenir à partir de mesure de longueur sur la surface.

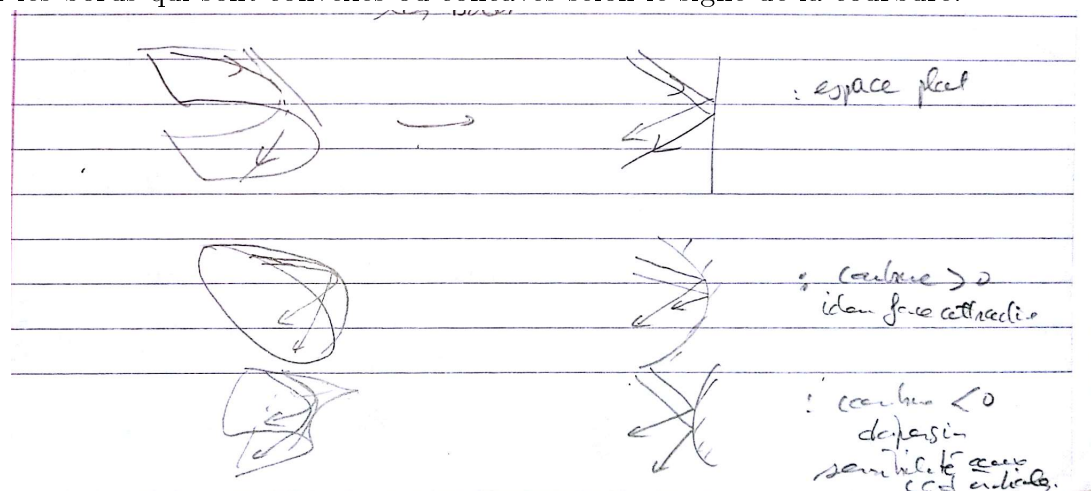
On observe que dans les régions de courbure positive, les trajectoires voisines ont un mouvement convergent l'une vers l'autre. Au contraire, un mouvement divergent dans les régions de courbure négative.

- Courbure $\kappa > 0 \Leftrightarrow$ force attractive, mouvement convergent.
- Courbure $\kappa < 0 \Leftrightarrow$ force répulsive, mouvement divergent, sensibilité aux conditions initiales, comportement chaotique des géodésiques.

En 1898, Hadamard a initié la théorie du chaos avec l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante (surfaces hyperboliques). Il apparait que si la courbure de Gauss de la surface est négative alors les trajectoires voisines « se dispersent », il y a sensibilité aux conditions initiales. Malgré son aspect un peu « abstrait », le flot géodésique sur les surfaces (ou variété) à courbure négative s'étudie bien et constitue donc un modèle d'étude privilégié.

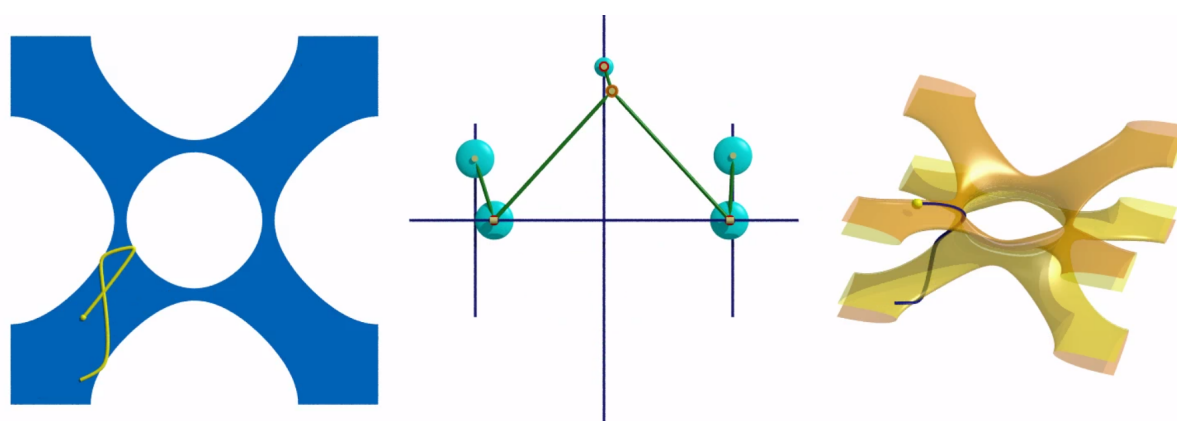
3.5.1 Du flot géodésique au billard

Si on applatit la surface, on obtient un billard. La courbure de la surface est concentrée sur les bords qui sont convexes ou concaves selon le signe de la courbure.



Exemple :

Voici un exemple intéressant de système mécanique libre fait de tiges (“linkages”), étudié par Mikael Kourganoff dans sa thèse. Dans le cas idéal sans frottement, il montre que le mouvement libre du système mécanique (image du centre) est équivalent au mouvement d’une particule libre sur une surface dans \mathbb{R}^3 (en jaune, image de droite, elle suit les géodésiques de la surfaces), et que ce flot est sensible aux conditions initiales”, plus précisément Anosov. Il montre que lorsque la masse de la boule centrale tends vers 0, alors la surface de droite s’applatit et vu du haut, la dynamique converge vers la dynamique dans un billard dispersif (en bleu, image de gauche).



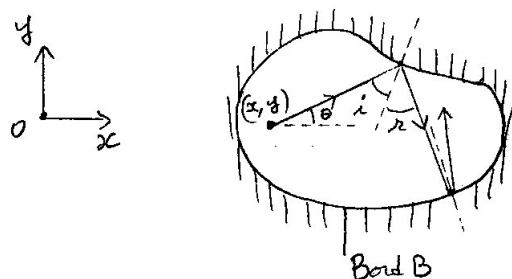
Voici une [vidéo](#) de ce système.

3.6 Billards

Le billard est une autre situation où on étudie une particule “libre”, i.e. sans force extérieure dans l’espace Euclidien (sauf sur les bords qui concentrent de la courbure).

Dans le plan \mathbb{R}^2 horizontal avec les coordonnées $q = (q_1, q_2)$ on considère une courbe fermée B qui est le bord du billard. Dans le billard, une particule ponctuelle de masse m se déplace en ligne droite à vitesse constante (on suppose qu’il n’y a pas de frottements) et elle rebondit parfaitement sur le bord B (angle de réflexion = angle d’incidence et la norme de la vitesse est conservée).

La question est de prédire la trajectoire $q(t)$ suivit par la particule.



Description en terme de forces et de Hamiltonien

- Dans le billard, la particule subit aucune force dans le plan horizontal, donc $0 = F(q) = -\text{grad}(V(q))$ donc l'énergie potentielle est $V(q) = \text{cste} = 0$ (on peut choisir la constante nulle). Le Hamiltonien est donc seulement constitué de l'énergie cinétique :

$$E = H(q, p) = \frac{1}{2}m \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 = \frac{\|p\|^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2)$$

avec le vecteur impulsion $p = m \frac{dq}{dt} = (p_1, p_2)$.

- La conservation de l'énergie E implique que la norme de la vitesse $\left\| \frac{dq}{dt} \right\| = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ est constante. Donc à une énergie donnée E , les variables qui peuvent évoluer sont les trois variables (q_1, q_2, θ) où θ est la direction de la vitesse (et de p). La **couche d'énergie** $\Sigma_E = H^{-1}(E)$ est donc de dimension $2d - 1 = 4 - 1 = 3$.
- Dans le billard, le mouvement entre deux rebonds est une translation rectiligne et uniforme. En effet l'équation de Newton $\frac{dp}{dt} = F = 0$ (ou l'équation de Hamilton $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$) implique que $p = m \frac{dq}{dt}$ est constant.

Intérêt en physique Le modèle du billard parfait est un problème très simplifié, mais qui peut servir à décrire des particules piégées dans des cavités, par exemple

- des molécules dans un volume (modèle du gaz parfait sans interactions mutuelles)
- des électrons libres dans un conducteur métallique,
- des neutrons et protons dans le noyau nucléaire,
- des rayons lumineux dans une cavité aux parois réfléchissantes,
- des ondes (acoustiques, électromagnétiques, sismiques) dans des cavités ou dans des guides d'ondes.

Section de Poincaré

Pour simplifier l'étude des trajectoires dans cet espace $\Sigma_E = H^{-1}(E)$ de dimension trois on introduit la notion importante de Section de Poincaré.

À chaque rebond de la bille sur le bord B , on note \tilde{q} l'**abscisse curviligne** (comptée à partir d'un point du bord de référence), et i l'**angle entre la normale au bord et la**

vitesse. On note

$$\tilde{p} := \sin(i) \in]-1, 1[$$

La suite des rebonds définit une suite :

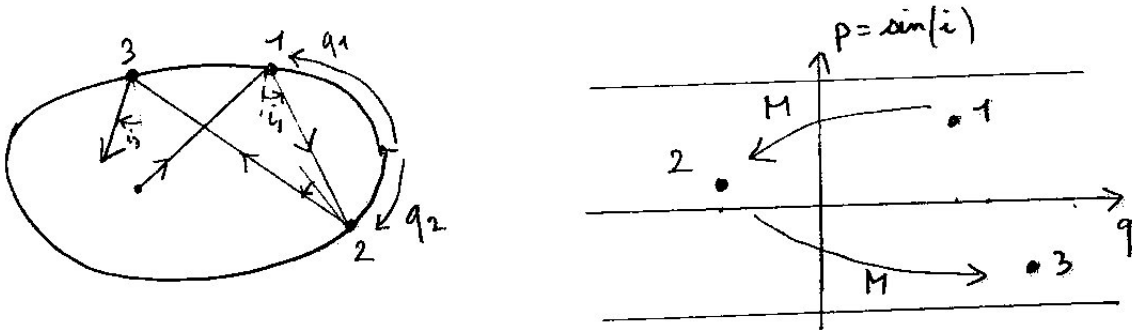
$$(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) \rightarrow (\tilde{q}_2, \tilde{p}_2) \rightarrow (\tilde{q}_3, \tilde{p}_3) \dots$$

qui est une trajectoire discrète. Il est clair graphiquement que la connaissance d'un seul couple $(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)$ détermine la suite entière. On note

$$M : (\tilde{q}_j, \tilde{p}_j) \rightarrow (\tilde{q}_{j+1}, \tilde{p}_{j+1})$$

appelée **application de Poincaré**.

C'est une dynamique discrète sur un **espace de dimension 2**, appelé **Section de Poincaré**.



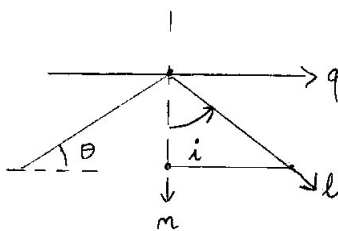
On a l'analogie du **Théorème de Liouville** :

Proposition 3.6.1. *L'application de Poincaré conserve l'élément d'aire $d\tilde{q}d\tilde{p}$.*

Démonstration. Voici 2 preuves différentes. On verra une 3eme preuve en exercice 3.6.5. Preuve 1 : ([27, p.340]). Un état dans le billard a les coordonnées (q_1, q_2, θ) (θ : direction de la vitesse), et les équations du mouvement sont $\dot{\theta} = 0, \dot{q}_1 = V \cos \theta, \dot{q}_2 = V \sin \theta$ qui est un champ de vecteur de divergence nulle ($\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_2} = 0$) donc préserve l'élément de volume $d\mu = dq_1 dq_2 d\theta$. Au bord du billard, pour un rebond, si on utilise les coordonnées (\tilde{q}, n, i) où \tilde{q} est le long du bord, n normale au bord et i est l'angle d'incidence, on a $d\mu = dq_1 dq_2 d\theta = d\tilde{q} dn di$ (car on a effectué une rotation). Si l est la coordonnée le long de la trajectoire, alors $dn = \cos(i) dl$ et avec $\tilde{p} = \sin(i)$ on a

$$d\mu = d\tilde{q} dn di = d\tilde{q} \cos(i) dldi = d\tilde{q} d\tilde{p} dl$$

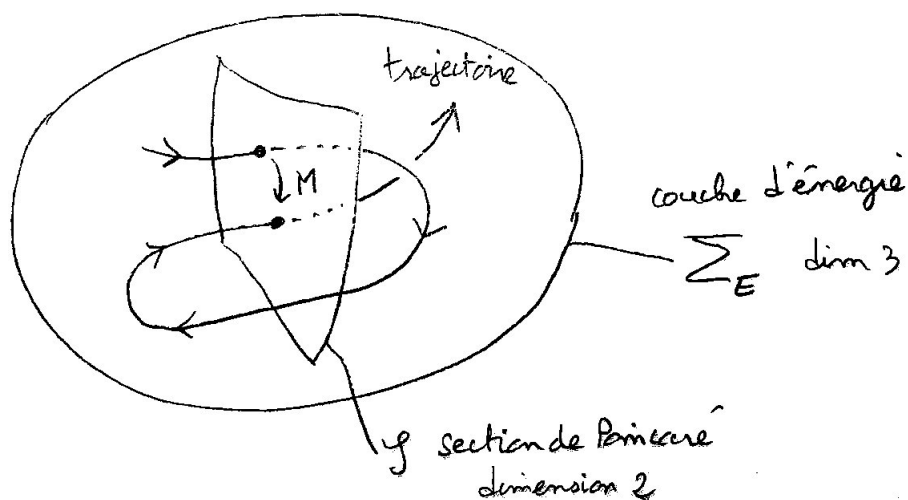
qui est préservé. dl est préservé donc $d\tilde{q}d\tilde{p}$ est préservée. □



Démonstration. Preuve 2 plus simple, mais qui utilise la dérivée extérieure ([38] p.4) : Notons $D(\tilde{q}_j, \tilde{q}_{j+1})$ la distance entre les rebonds. On vérifie sur un schéma que $\frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_{j+1}} = -\sin(i_{j+1}) = -\tilde{p}_{j+1}$, $\frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_j} = \tilde{p}_j$. Donc la différentielle est $dD = \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_j} d\tilde{q}_j + \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_{j+1}} d\tilde{q}_{j+1} = \tilde{p}_j d\tilde{q}_j - \tilde{p}_{j+1} d\tilde{q}_{j+1}$. Et $0 = ddD = d\tilde{p}_j \wedge d\tilde{q}_j - d\tilde{p}_{j+1} \wedge d\tilde{q}_{j+1}$, soit $d\tilde{p}_{j+1} \wedge d\tilde{q}_{j+1} = d\tilde{p}_j \wedge d\tilde{q}_j$. \square

Généralisation :

- On a vu que la couche d'énergie Σ_E est de dimension 3. Les trajectoires sont des courbes de dimension 1 qui évoluent dans la couche d'énergie Σ_E qui est de dimension 3. La section de Poincaré \mathcal{S} est comme une surface de dimension 2 imaginaire, fixe dans cet espace Σ_E , et chaque fois que la trajectoire traverse \mathcal{S} l'intersection donne un point, de coordonnées (\tilde{q}, \tilde{p}) ici. Voir figure.
- La section de Poincaré se généralise de la façon suivante pour un système Hamiltonien indépendant du temps : pour d degrés de liberté, l'espace de phase $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2d}$ est de dimension $2d$. La couche d'énergie Σ_E est de dimension $2d - 1$. Comme une trajectoire évoluant dans Σ_E est de dimension 1, la **section de Poincaré** \mathcal{S} doit être un sous espace de dimension $\dim(\Sigma_E) - 1 = 2d - 2$. L'**application de Poincaré** $M : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est l'application qui à une intersection fait correspondre l'intersection suivante. On peut montrer (même preuve que ci-dessus) que M préserve le volume sur \mathcal{S} .



Voir Exercice 3.4.5 sur la dynamique dans un billard circulaire.

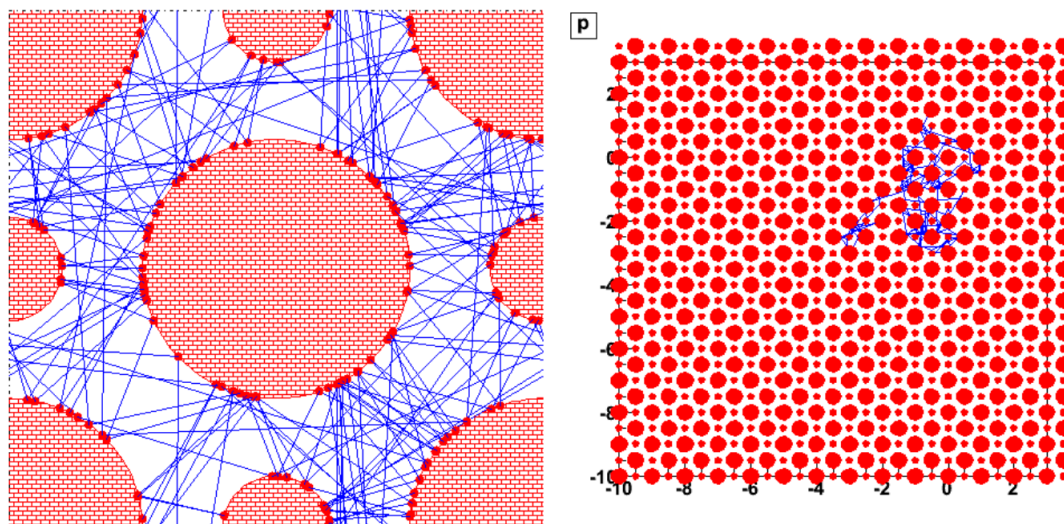
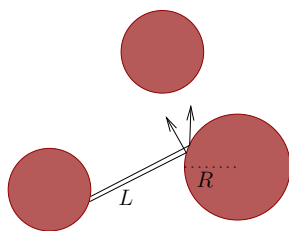


FIGURE 3.6.1 – En bleu, une trajectoire dans le billard de Sinai (tore T^2 avec des obstacles convexes circulaires). Sur le recouvrement \mathbb{R}^2 , la trajectoire semble suivre une marche aléatoire.

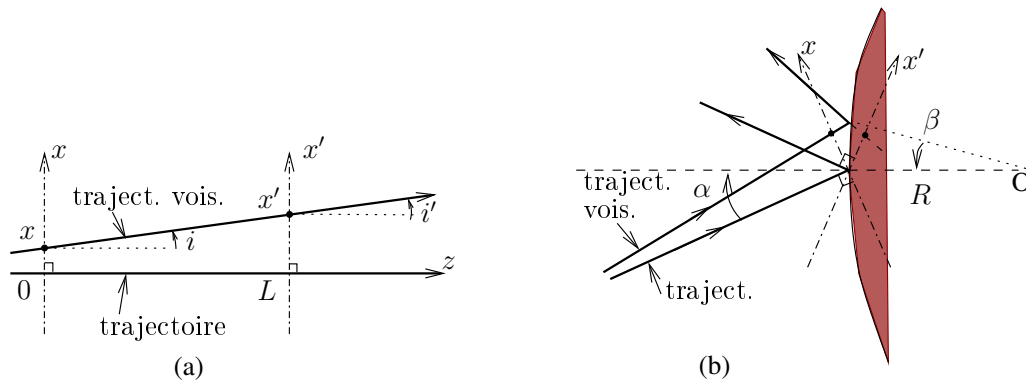
Exercice 3.6.2. Hyperbolicité d'un billard dispersif.

Le but du problème est de montrer que la dynamique d'une particule dans un billard à obstacles convexes (par exemple des disques) est « complètement chaotique » au sens précis : « **sensibilité aux conditions initiales** » ou plus précisément « uniformément hyperbolique ». Un tel billard est appelé « billard dispersif » ou “billard de Sinai”. Voir simulations numériques.

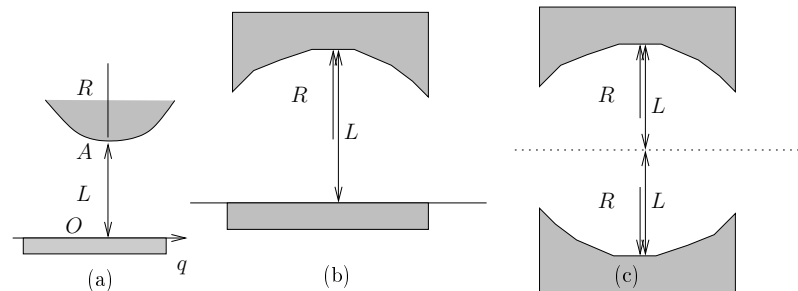


Pour montrer cela on remarque que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles.

1. Traitons d'abord la propagation, voir figure (a). On considère une trajectoire de référence (c'est l'axe z) et on note x l'axe orthogonal, qui sert de section de Poincaré : une trajectoire voisine coupe l'axe x à la position x et avec un angle i . On supposera $x, i \ll 1$. Après une longueur L donnée, exprimer les nouvelles valeurs (x', i') en fonction de (x, i) sous forme matricielle (cad au premier ordre).



- On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence α sur une paroi ayant un rayon de courbure R au point de réflexion, voir figure (b). Avec les mêmes définitions de (x, i) que précédemment, montrer qu'au point de réflexion, au premier ordre, on a
$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}.$$
- On souhaite étudier la **stabilité de la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma (a) suivant. On appelle $L = OA$ et $R > 0$ le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que $R < 0$ signifierait une courbure dans l'autre sens (i.e. obstacle concave, figures (b), (c)).



Avec les notations précédentes, montrer que

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

avec une matrice M que l'on exprimera à partir de R, L . Calculer les valeurs propres³ de la matrice M et déduire la stabilité de l'orbite périodique OA .

- Dans les billards (b) et (c) où $R < 0$, déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale selon les valeurs de $L/|R|$. Remarques : avec des miroirs, ces géométries sont utilisées dans des cavités optiques Laser par exemple.

3. Aide : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec $T = \text{Tr}(M) > 2$ et $\text{Det}(M) = 1$ alors ses valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4})$. On observe que $|\lambda_+| > 1$ si $T > 2$ ou $T < -2$. On dit alors que la matrice est hyperbolique. On a $\lambda_- = 1/\lambda_+$.

5. Pour une propagation de longueur L suivie d'une réflexion (comme sur la figure 6.1.2), déduire que la matrice qui transforme (x, i) en (x', i') en fonction de $L, R, \cos \alpha$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.1)$$

Pour un **billard dispersif**, trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice M (3.6.1) et déduire qu'il y a une **instabilité uniforme** de la dynamique.

Exercice 3.6.3. "Application de $SL(2, \mathbb{R})$ ". Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle qui représente une application de Poincaré linéaire dans le plan (q, p) ayant $(0, 0)$ comme point fixe (= point d'équilibre). La conservation de l'aire $dqdp$ est équivalente à la condition $\text{Det}(M) = ad - cb = 1$ que l'on supposera. (On dit que $M \in SL(2, \mathbb{R})$). Soit $T = \text{Tr}(M) = a + d$ la trace de la matrice. Montrer que

1. Si $|T| > 2$ alors on peut écrire $M = PDP^{-1}$ (qui s'interprète comme un changement de base) où $D = \pm \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$ est diagonale contenant les valeurs propres et $\lambda = \log \left(\frac{T + \sqrt{T^2 - 4}}{2} \right) > 0$ appelé **coefficient de Lyapounov**. Chaque trajectoire $(q_n, p_n) = M^n(q_0, p_0)$ est sur une hyperbole. Les vecteurs propres donnent les directions instable et stable. Déduire que le point $(0, 0)$ est instable. On dit que la matrice est **hyperbolique**.
2. Si $-2 < T < 2$ alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \pm \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$ et la fréquence $\omega = \arg \left(\frac{T + i\sqrt{4 - T^2}}{2} \right)$. On dit que la matrice est **elliptique**.
3. Si $|T| = 2$ alors $M = PDP^{-1}$, avec $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que la matrice est **parabolique**. Que dire de la stabilité de $(0, 0)$?

Exercice 3.6.4. Etude de l'instabilité d'une trajectoire :

On peut étudier l'instabilité d'une trajectoire particulière, qui est la trajectoire périodique horizontale, voir figure 3.6.2. Calculer l'application linéarisée de l'application de Poincaré M le long de la trajectoire périodique instable horizontale, après deux rebonds.

Aide : calculer la différentielle de l'application $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0) \rightarrow (\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) = M(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ au point $\tilde{q}_0 = 0, \tilde{p}_0 = \sin(i_0) = 0$. Montrer que la matrice obtenue est de la forme :

$$DM_0 = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \frac{1}{c} \sinh \lambda \\ c \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

avec $c > 0$, $\lambda > 0$ que l'on relie à la géométrie de la cavité (demi-grand axe a et rayon de courbure R). On a $\det(DM_0) = 1$, et $\text{Trace}(DM_0) = 2 \cosh \lambda > 2$. C'est une matrice hyperbolique, dont les valeurs propres sont $e^\lambda > 1$, $e^{-\lambda} < 1$.

Solution : $\cosh \lambda = 1 - \frac{2a}{R}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{a(a-R)}}$.

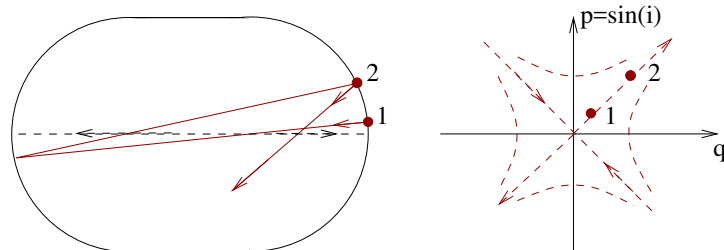


FIGURE 3.6.2 – Section de Poincaré de la trajectoire horizontale instable au voisinage de $\tilde{q} \simeq 0$, $\tilde{p} = \sin i \simeq 0$.

Noter que l'espace de la section de Poincaré (\tilde{q}, \tilde{p}) est compact, et donc l'étirement exponentiel observé dans l'approximation linéaire ne continue pas à l'infini. Nous verrons qu'il y a étirement et repliement de la dynamique sur la section de Poincaré, et cela permet d'expliquer le chaos, observé sur la figure 3.6.3, avec une trajectoire.

Si on lance un paquet concentré de plusieurs billes, dans un billard chaotique, très rapidement les billes se dispersent et remplissent uniformément la cavité. C'est une autre manifestation du chaos.

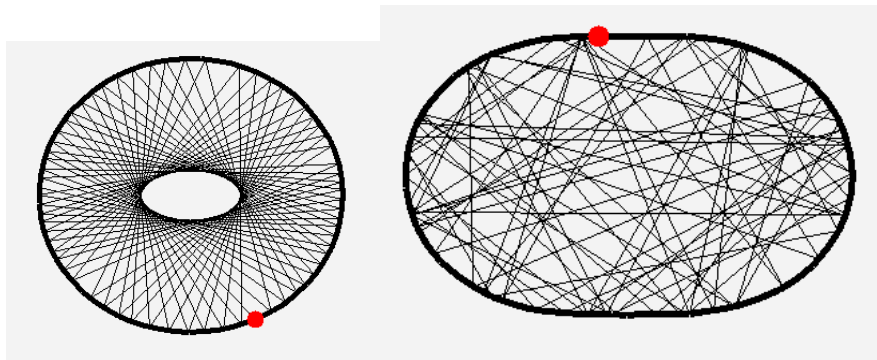
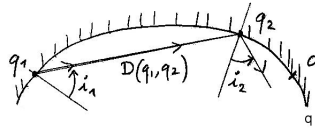


FIGURE 3.6.3 – Trajectoire dans un billard régulier (proche d'une ellipse) ou chaotique.

Exercice 3.6.5. Fonction génératrice d'un billard. Dans un billard, on considère les points de rebonds d'une trajectoire sur le bord. Pour un point de rebond, on note \tilde{q} son abscisse curviligne (à partir d'une référence $\tilde{q} = 0$), i l'angle de réflexion et $\tilde{p} = \sin(i)$. Si $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$ et $(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ caractérisent deux rebonds successifs d'une trajectoire, on note $D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ la longueur du segment entre les deux rebonds.



1. Montrer (graphiquement) que $\frac{\partial D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)}{\partial \tilde{q}_2} = \tilde{p}_2$, $\frac{\partial D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)}{\partial \tilde{q}_1} = -\tilde{p}_1$. On dit que $D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ est une **fonction génératrice**.
2. Soient \tilde{q}_1, \tilde{q}_3 l'abscisse curviligne de deux points fixés sur le bord, et soit \tilde{q}_2 un point quelconque sur le bord. Montrer que la suite $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ correspond aux rebonds d'une vraie trajectoire si et seulement si la distance $\mathcal{D}(\tilde{q}_2) = D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) + D(\tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ est extrémale par rapport à \tilde{q}_2 . (Utiliser (1)).
3. On définit les fonctions Q, P par $\tilde{q}_2 = Q(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$ et $\tilde{p}_2 = P(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$. On note $\tilde{D}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) := D(\tilde{q}_1, Q(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1))$ qui est la longueur du segment après le rebond $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$. En calculant $\frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{p}_1}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial \tilde{p}_1 \partial \tilde{q}_1}$ montrer que

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{q}_1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_1} - \frac{\partial Q}{\partial \tilde{p}_1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{q}_1}$$

Montrer que cela s'interprète comme le fait que l'élément d'aire $d\tilde{q}_2 d\tilde{p}_2 = d\tilde{q}_1 d\tilde{p}_1$ est conservé entre chaque rebond.

3.7 Apparition du chaos dans un billard circulaire déformé

On peut voir des vidéos associées à ce qui suit sur ce [site](#).

Dans cette Section on décrit et observe un système particulier : une famille de billards dont la forme peut varier entre un cercle, la dynamique sera très simple, et un ovale, la dynamique sera chaotique. Cet exemple montre en fait le scénario général “d'apparition du chaos” que l'on peut observer lorsque l'on perturbe un système intégrable en mécanique Hamiltonienne avec $d = 2$ degrés de liberté (la couche d'énergie est de dimension $2d - 1 = 3$).

On soulève deux questions

1. **“Paradoxe de la flèche du temps”**. Comment expliquer la contradiction apparente entre
 - (a) Les lois physiques, qui sont **réversibles** (ex : bille dans un billard)
 - (b) et la **disymétrie passé/futur** des phénomènes physiques ?
2. **“Paradoxe du chaos déterministe”**. On observe parfois du chaos (= imprévisibilité) avec des lois déterministes. **Comment peut il y avoir des lois déterministes donnant un mouvement chaotique (imprévisible) ?**

3.7.1 Modèle étudié

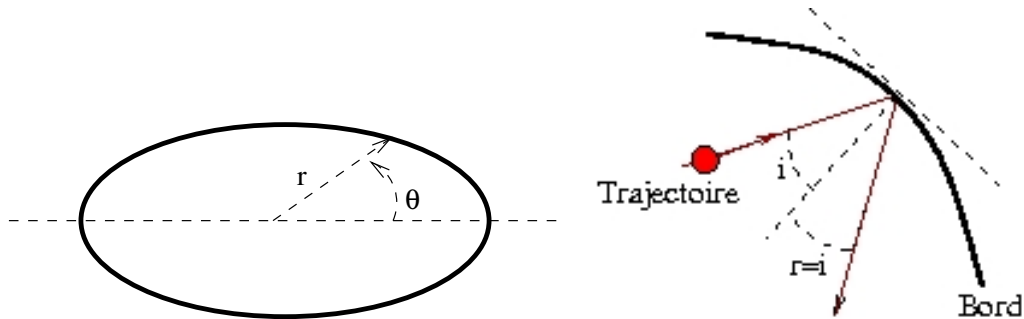
Forme du billard On choisit une forme très simple de billard qui dépend d'un paramètre de déformation :

$$0 \leq a < 1 : \text{paramètre de déformation}$$

Dans le plan $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, en coordonnée polaire (r, θ) définies par $q_1 = r \cos \theta$, $q_2 = r \sin \theta$ le bord du billard est la courbe :

$$r(\theta) = 1 + a \cos(4\pi\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

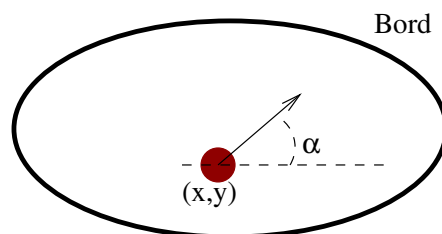
On rappelle que dans le billard, une trajectoire est une ligne droite à vitesse constante et qu'il y a réflexion parfaite sur le bord :



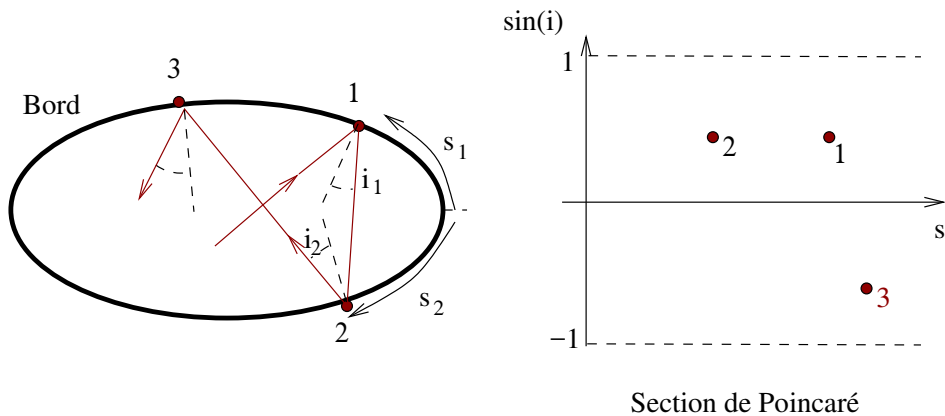
Espace des états

Voir Section 3.6. On a vu que

- Le billard est un **système déterministe** avec $d = 2$ degrés de liberté (q_1, q_2) .
- L'état d'une bille est caractérisé par son état : position (q_1, q_2) et vitesse (v_{q_1}, v_{q_2}) (ou impulsion (p_1, p_2)).
- Mais l'énergie est conservée donc la vitesse $v = \sqrt{v_{q_1}^2 + v_{q_2}^2}$ est fixée. En fait un état est caractérisé par seulement **trois paramètres libres** (q_1, q_2, α) , où α est la direction de la vitesse :



Section de Poincaré Pour simplifier la description, on considère seulement à chaque rebond, la suite des **états** : (position curviligne s , angle i)



Ainsi une **trajectoire** est codée par la suite de ces valeurs aux rebonds : $(s_1, \sin(i_1)), (s_2, \sin(i_2)), (s_3, \sin(i_3))$. Cela forme une **dynamique discrète déterministe** et de **dimension 2**. (qui conserve l'aire $dsd\tilde{p}$ avec $p = \sin i$)

3.7.2 Billard circulaire ($a = 0$)

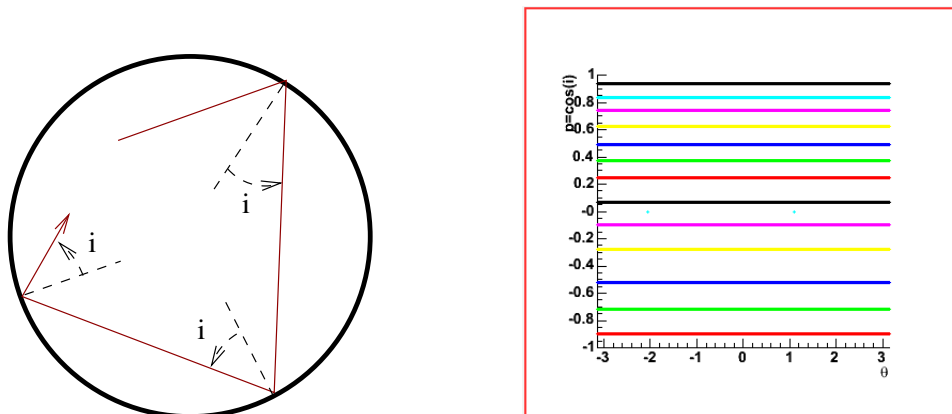
Avec le paramètre $a = 0$, le billard est circulaire. Pour une trajectoire, l'angle i est conservé (donc $\tilde{p} = \sin i$ conservé) et la position évolue selon la loi de translation :

$$\tilde{q}_{t+1} = \tilde{q} + \tilde{p} \text{ modulo } 2\pi.$$

Par conséquent sur la section de Poincaré chaque trajectoire se situe sur la ligne $\tilde{p} = \sin i$.

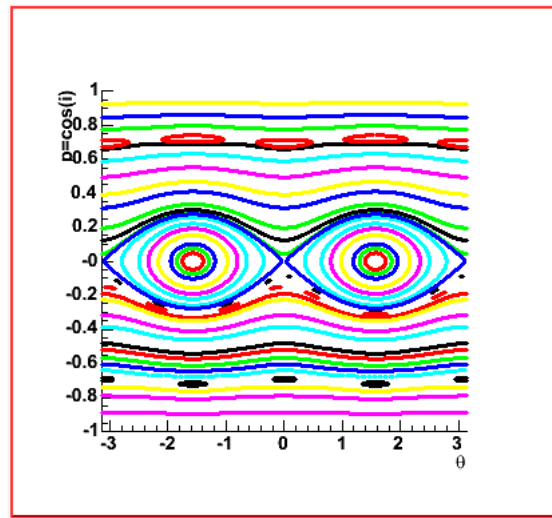
- On montre (voir TD) que si $\tilde{p}/\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est rationnel alors la trajectoire est périodique, faisant a tours et b rebonds.
- Si $\tilde{p}/\pi \notin \mathbb{Q}$ est irrationnel (ce qui arrive avec probabilité 1) alors la trajectoire remplit de façon dense la ligne horizontale \tilde{p} .
- Remarquer que dans l'espace des phases (q_1, q_2, p_1, p_2) de dimension 4, une telle trajectoire est située sur un tore \mathbb{T}^2 est la trajectoire est une translation de pente irrationnelle, come étudiée en (3.4.2).

Le comportement de chaque trajectoire est donc prévisible, on dit que la dynamique est **régulière** (non chaotique).



3.7.3 Billard légèrement déformé ($a = 0.02$)

Voici le dessin numérique de la Section de Poincaré si $a = 0.02$. Chaque couleur est pour une trajectoire différente.

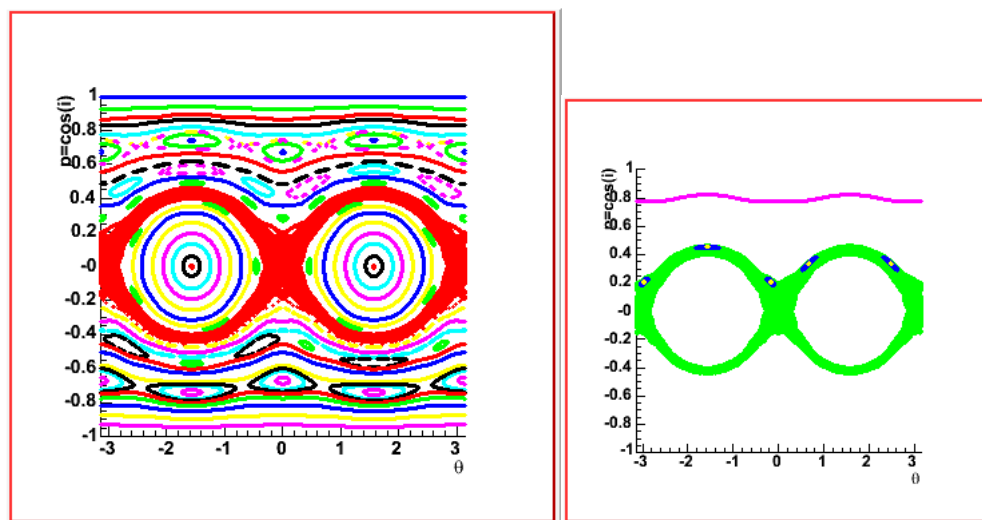


En $\tilde{p} = \sin i = 0$ on voit **deux points fixes stables** et **deux points fixes instables** (hyperboliques). Ils correspondent respectivement aux trajectoires verticales et horizontales dans le billard. (Voir vidéos)

- Si on met un nuage de particules de petite taille (afin de traduire notre méconnaissance de l'état initial) sur la trajectoire stable (verticale), ce nuage reste confiné. Le mouvement est donc régulier et prévisible.
- Si on met un nuage de particules sur la trajectoire stable (verticale), initialement, ce nuage s'étale exponentiellement vite à un rythme exponentiel :

$$L(t) = \lambda^t L(0), \quad \lambda > 1 \text{ : Coef. d'expansion}$$

Cette forte **sensibilité aux conditions initiales** implique une **imprévisibilité** de la trajectoire. Mais cette trajectoire est une exception dans l'espace des phases, le nuage ne se répand pas dans tout l'espace de phase, seulement sur une courbe. On ne parle pas encore de système chaotique.

3.7.4 Billard plus déformé ($a = 0.05$)

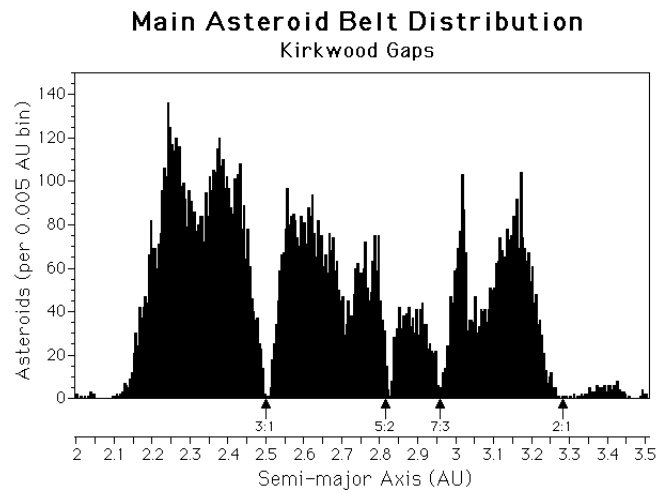
Structure très riche observée sur la Section de Poincaré :

- Elargissement de la zone instable (en rouge). On dit que c'est une “**zone chaotique**”.
- Ilots de résonances :
 - Un peu partout, il apparaît des “**ilots de résonance**” (qui sont issues des trajectoires périodiques $\tilde{p} = \pi \frac{a}{b}$ du cas circulaire). Par exemple pour la **résonance 5 : :2** = 5 impacts pour 2 tours.
 - Comme il y a une infinité de rapports entiers $p :: q$, les ilots de résonances forment une **structure fractale**
 - Entre chaque ilot il y a une orbite instable, qui donnera naissance à du chaos.
- Courbes invariantes :
 - Certaines trajectoires sont encore confinées sur des courbes. Le **théorème KAM**, montre l'existence des ces courbes et qu'elles occupent un espace de mesure non nulle, et qu'elles proviennent en effet lignes $\tilde{p} = \text{cste}$ du cas circulaire avec \tilde{p}/π “très irrationnel” (par exemple le nombre d'or donnera une courbe qui persiste à une forte perturbation). Dans l'espace des phases du billard, ces courbes forment des tores. On parle de “**tore KAM**”.

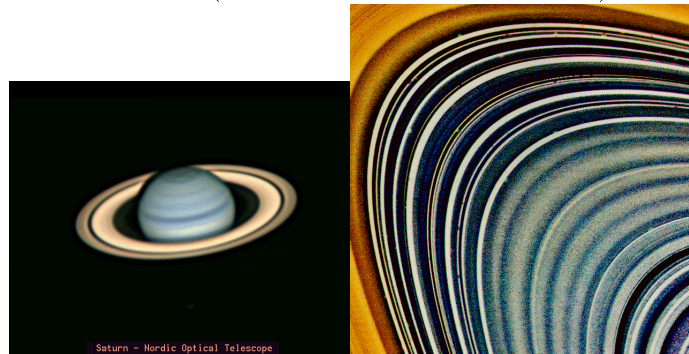
Cette structure très riche observée ici dans un billard circulaire légèrement déformé est en fait très générale dans les systèmes mécaniques proches d'une situation intégrable “**Théorie KAM**”. Voir **KAM theory**. Voici un exemple observé dans la mécanique céleste du système solaire, qui est proche d'un système intégrable (problème à 2 corps) :

Des résonances dans le système solaire :

- Gaps observés dans la répartition des millions d'astéroïdes situés entre mars et Jupiter : **gaps de Kirkwood (1866)** si période T telle que $T = \frac{p}{q} T_{\text{Jupiter}}$ (A cause des instabilités voisines, ils subissent des chocs et se font éjecter).

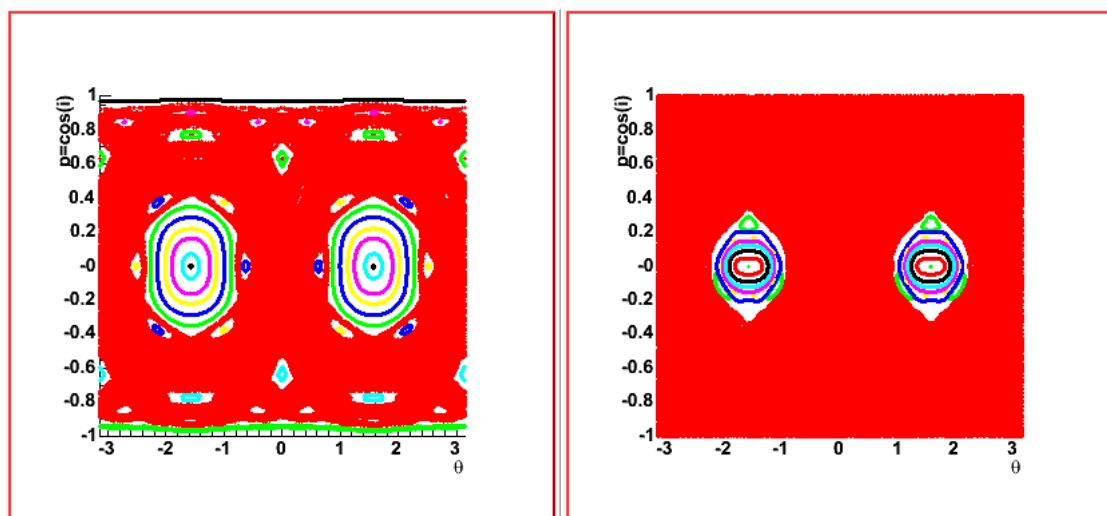


- Gaps dans les **anneaux de Saturne** : les cailloux de période $T = \frac{p}{q}T_{Titan}$ vont être éjectés à cause des instabilités (chocs avec d'autres cailloux).



- Satellites d'Uranus prédits à partir de gaps observés dans les anneaux

3.7.5 Billard déformé ($a = 0.1 - 0.2$)



Observations :

- Les instabilités se sont rejoint en une vaste **“zone chaotique”**.
- Il subsiste des **ilots de régularité**.
- Dans une simulation numérique, le nuage de conditions initiales **s’étire et se replie** indéfiniment, donc **se mélange, comme la pate feuilletée du boulanger** ; montré par **Poincaré 1885**.
 - Chaque trajectoire est instable. La trajectoire d’une bille est **imprévisible au delà d’une date τ** : si imprécision initiale L_0 , alors $L(\tau) = \lambda^\tau L_0 = 1$ pour $\tau = \log(1/L_0) / \log \lambda$ qui est très court.
 - Le nuage de particules converge vers une **distribution d’équilibre** indépendant de la distribution initiale. L’information fuit vers l’infiniment petit. Il y a **augmentation du désordre, de l’entropie**. Pour décrire l’évolution, on doit utiliser non **plus des lois déterministes** mais des **lois probabilistes**, sur l’ensemble chaotique. (Birkhoff , Arnold, Moser, ... 60’, Ruelle,... 80’)

Cette observation résout le paradoxe du chaos déterministe.

Du chaos dans le système solaire :

- Exemple : Hypérion, satellite de Saturne qui a une “forme de cacahuète” et une rotation propre chaotique,

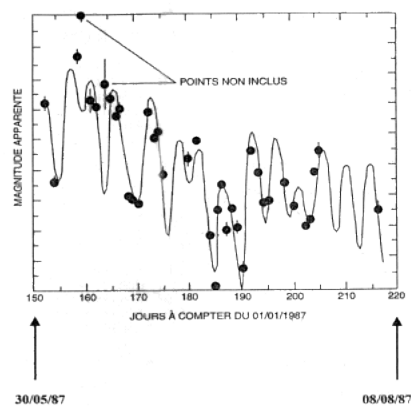
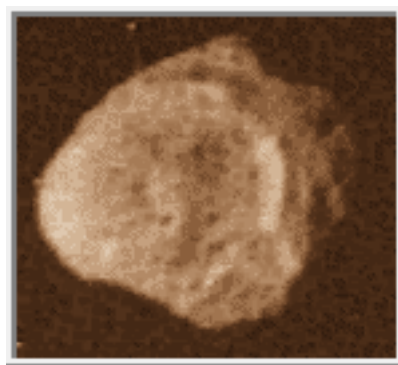


Figure 12 : variations aléatoires observées dans la luminosité d’Hypérion.

- Des études récentes en astronomie (J. Laskar) montrent que sur une échelle de temps de l’ordre de $\tau = 40$ Millions d’années, **les trajectoires des planètes (Venus, Terre, Mars,...) sont chaotiques**, mais dans des intervalles de distance planète-Soleil, qui ne se rencontrent pas. Cela explique qu’il n’y a pas eu de collisions (sauf au début du système solaire).
- La climat terrestre (périodes glaciaires) dépend fortement de la trajectoire de la terre, et est donc chaotique sur une grande échelle de temps.

Ce même système solaire est remarquablement régulier sur des périodes plus courtes, et est à l’origine du développement des sciences chez l’homme (?).

3.8 Exemples de perturbation de modèles intégrables, apparition du chaos Hamiltonien, avec $d = 2$ degrés de liberté

Dans cette Section on discute de modèles de dynamique Hamiltonienne avec $d = 2$ degrés de liberté, i.e. $q = (q_1, q_2)$, $p = (p_1, p_2)$ et avec $H(q, p)$ indépendant du temps. Par conséquent l'énergie est conservée, les trajectoires sont sur la couche d'énergie $\Sigma_E = H^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^4$ qui est de dimension $2d - 1 = 3$.

Une Section de Poincaré donnera une dynamique discrète sur une surface de dimension $(2d - 1) - 1 = 2$. L'application de Poincaré est conservative (comme le flot Hamiltonien) et préserve donc l'aire de la surface.

On considère une famille de modèles dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$ (ou $K \in \mathbb{R}$) et on suppose que pour $a = 0$, le système est intégrable, c'est à dire qu'il y a une grandeur conservée en plus de l'énergie. (Par exemple l'angle $\tilde{p} = \sin i$ dans le cas du billard circulaire). Dans cette situation intégrable, les trajectoires sont sur des tores (rationnels ou irrationnels).

Ensuite en faisant $a \neq 0$, on étudie la perturbation de cette situation intégrable et régulière pour observer comme dans l'exemple du billard :

- Les tores rationnels disparaissent pour laisser place à des îlots elliptiques entourés de “zones chaotiques”. Ces îlots forment une structure en fractale. Dans les zones chaotiques il y a phénomène de étirement et repliement. Cela est la cause du chaos (imprévisibilité).
- Les tores très irrationnels persistent à la perturbation. (Théorème KAM). Dans la Section de Poincaré ils apparaissent sous forme de courbes.

3.8.1 L'application standard (“standard map”)

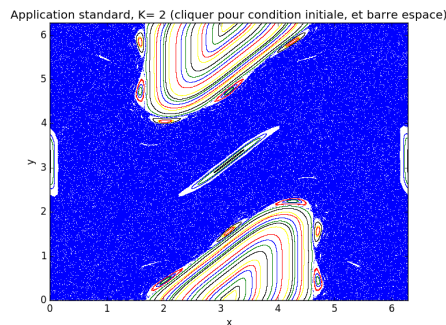
C'est un “modèle jouet” Pour l'application de Poincaré discutée ci-dessus. C'est le modèle le plus simple que l'on puisse écrire et qui est donc sujet à de nombreux travaux théoriques et mathématiques.

On considère $(x_1(t), x_2(t)) \in [0, 2\pi]^2$ qui dépend du temps discret $t \in \mathbb{Z}$ et qui satisfait l'équation de récurrence $(x_1(t+1), x_2(t+1)) = \phi(x_1(t), x_2(t))$,

$$\phi : \begin{cases} x_2(t+1) &= x_2(t) + K \sin(x_1(t)) \text{ modulo } 2\pi \\ x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t+1) \text{ modulo } 2\pi \end{cases} \quad (3.8.1)$$

avec le paramètre $K \in \mathbb{R}$. On appelle (3.8.1) l'application standard. Il est clair que pour $K = 0$, la quantité $x_2(t)$ est constante et $x_1(t)$ subit une rotation sur S^1 d'angle x_2 .

3.8. EXEMPLES DE PERTURBATION DE MODÈLES INTÉGRABLES, APPARITION DU CHAOS



Voir le site [Travaux pratiques](#).

3.8.2 Le pendule magnétique

Étudié en TP.

Un pendule sans frottement dans \mathbb{R}^3 dans le champ de pesanteur est un système dynamique Hamiltonien avec $d = 2$ degrés de liberté. Si il y a symmétrie de révolution, le moment angulaire est conservé et le système est intégrable.

On suppose le pendule aimanté et on rajoute trois aimants en triangle dans un plan horizontal sous le pendule, jusqu'à ce que la position verticale immobile soit une position d'équilibre instable. Le paramètre de perturbation est la distance des aimants (ou force des aimants).

3.8.3 Le problème à trois corps réduit

Ce problème a une grande importance historique, étudié par Poincaré.

On suppose deux étoile en formation binaire (orbites de Kepler) et une petite planète qui subit la force de ces deux étoiles. En retour, la planète légère n'influence pas les étoiles. Pour cela on dit que c'est le problème à trois corps réduit.

La planète peut être en orbite très proche d'une des deux étoiles. Sa trajectoire sera alors proche d'une ellipse de Kepler. Le paramètre de perturbation et d'apparition du chaos est par exemple la distance à une des deux étoiles.