Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

TD 5. ***Instabilité de Turing en morphogénèse***

---

1 Modèle de réaction diffusion en écologie des populations

(inspiré d'un exposé de Arnd Scheel). Dans ce TD, en quelques étapes, on construit un modèle en écologie des populations basé sur le phénomène de "réaction diffusion" étudié au départ par A. Turing. Dans une première étape on considère un modèle local linéaire pour lequel $v = 0$ est un point fixe **stable**. Dans une deuxième étape, un modèle spatial avec diffusion qui rend ce point fixe 0 **instable**. Ce phénomène à priori surprenant (car la diffusion est habituellement considéré comme de la dissipation) est appelé "**instabilité de Turing**".

1.1 Modèle local de réaction

Commençons par un modèle de "réaction" local (non spatial). Dans une région donnée, on note $u_1(t)$ la quantité de souris et $u_2(t)$ la quantité de chouettes à la date t. On notera $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. On considère une population $u(t) = p + v(t)$ avec $p \in \mathbb{R}^2$ une valeur fixe et $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ représentant des fluctuations autour de la valeur fixe. On suppose que ces fluctuations sont gouvernées à l'ordre linéaire par les règle suivantes : en moyenne, chaque semaine, pour $v_1 = 5$ souris (et $v_2 = 0$ chouette) il y a naissance de 5 autres souris et de 1 chouette. Pour $v_2 = 1$ chouette (et $v_1 = 0$ souris) il y a disparition de 10 souris et de μ chouettes avec $\mu > 0$.

1. Écrire cela sous la forme :
$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{A}v, \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
avec les éléments de matrice que l'on précisera.
2. Pour quelles valeurs de μ est-ce que $v(t)$ est stable/instable pour $t \to +\infty$?
3. On cherche un modèle réaliste de dynamique sous la forme $\frac{du}{dt} = f(u)$. Dans le plan $u = (u_1, u_2)$ dessiner l'allure du champ de vecteur $f(u) \in \mathbb{R}^2$ auquel vous pensez puis proposer une expression mathématique sous forme polynomiale.

1.2 Diffusion en espace

On considère maintenant l'aspect spatial. Tout d'abord sans les "réactions". Il y a plusieurs sites sur un réseau unidimensionnel de positions x_j, distants de $\delta = 100m.$, indicés par $j = 1, 2 \ldots$, et on suppose que il y a "diffusion" de la population $k = 1, 2$ (souris ou chouette) par la loi :

$$\frac{dv_k(x_j)}{dt} = d_k(v_k(x_{j+1}) - v_k(x_j)) + d_k(v_k(x_{j-1}) - v_k(x_j)),$$

avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 50$.

1. Expliquer ce modèle de diffusion et ces valeurs.
2. Que donne ce modèle dans la limite du continuum ? Résoudre les équations obtenues et discuter.

1.3 Réaction et diffusion

On combine les phénomènes précédant de "réaction locale" et "diffusion"par un modèle sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.$$

1. En utilisant le théorème de Turing, discuter l'apparition de "structures" dans les densités de population selon les valeurs de μ et d_1, d_2.
2. Calculer la "longueur d'onde" λ_c de ces structures au seuil d'instabilité.