Exercice : Etude d'une dynamique chaotique

1. si $\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$, on rappelle que

avec le changement de variable : $(q_1, p_1) \longrightarrow (q_2, p_2)$,
l'élément d'aire est changé par :

$$dq_2 \cdot dp_2 = \underbrace{|\det(M)|}_{\text{Jacobien}} \, dq_1 \cdot dp_1$$

ici $\det(M) = 2.1 - 1.1 = 1$ donc $dq_2 \, dp_2 = dq_1 \, dp_1$ = aire préservée.

2. Calcul des valeurs propres :

Polynome caractéristique $D(\mu) = \det \begin{pmatrix} 2-\mu & 1 \\ 1 & 1-\mu \end{pmatrix} = \mu^2 - \underbrace{3}_{Tr(M)} \mu + \underbrace{1}_{Det(M)}$

$$\rightarrow \quad \mu_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

avec $\Delta = 9 - 4 = 5$

on a $\begin{cases} \mu_+ \simeq 2,6 \\ \mu_- \simeq 0,4 \end{cases}$ $\qquad 0 < \mu_- < 1 < \mu_+$

$\mu_+ \cdot \mu_- = \det(M) = 1$

$\mu_+ + \mu_- = Tr(M) = 3$

On note $\begin{cases} \mu_+ = e^{\lambda} \\ \mu_- = e^{-\lambda} \end{cases}$

avec $\lambda = \log(\mu_+) > 0$.

Vecteurs propres : posons $V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ v_+ \end{pmatrix}$, $MV_+ = \mu_+ V_+$

$\Longleftrightarrow \quad 2 + v_+ = \mu_+ \cdot 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v_+ = \mu_+ - 2 \simeq 0,6$

et $V_- = \begin{pmatrix} -1 \\ v_- \end{pmatrix}$. $MV_- = \mu_- V_- \Longleftrightarrow -2 + v_- = -\mu_-$

$\Longleftrightarrow v_- = 2 - \mu_- \simeq 1,6$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v_+ & v_- \end{pmatrix}$: matrice de Passage

on a $M = P . D . P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$

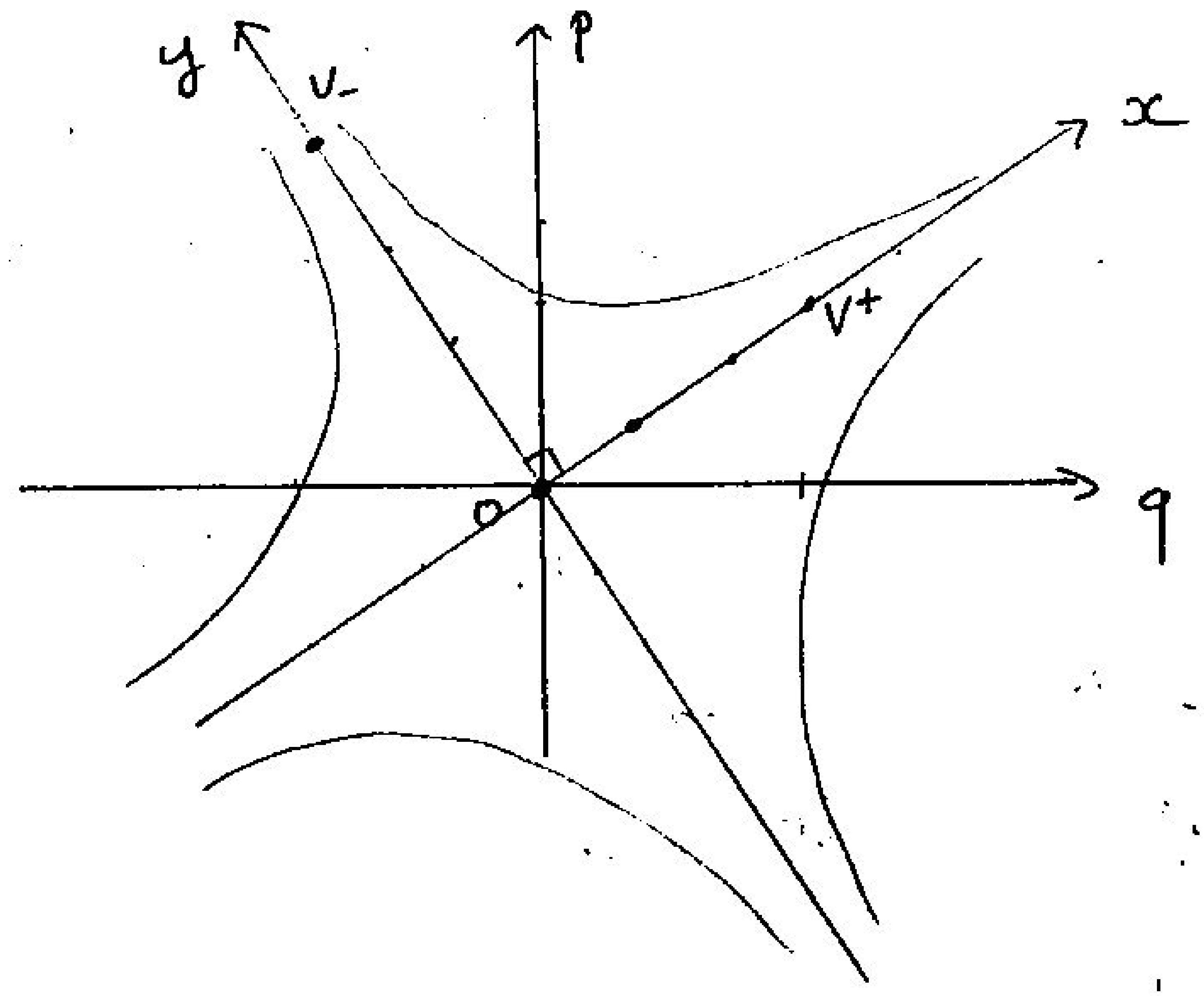
Soit le changement de variable : $E = (q, p) \longrightarrow X = (x, y)$

par : $X = P^{-1} E$

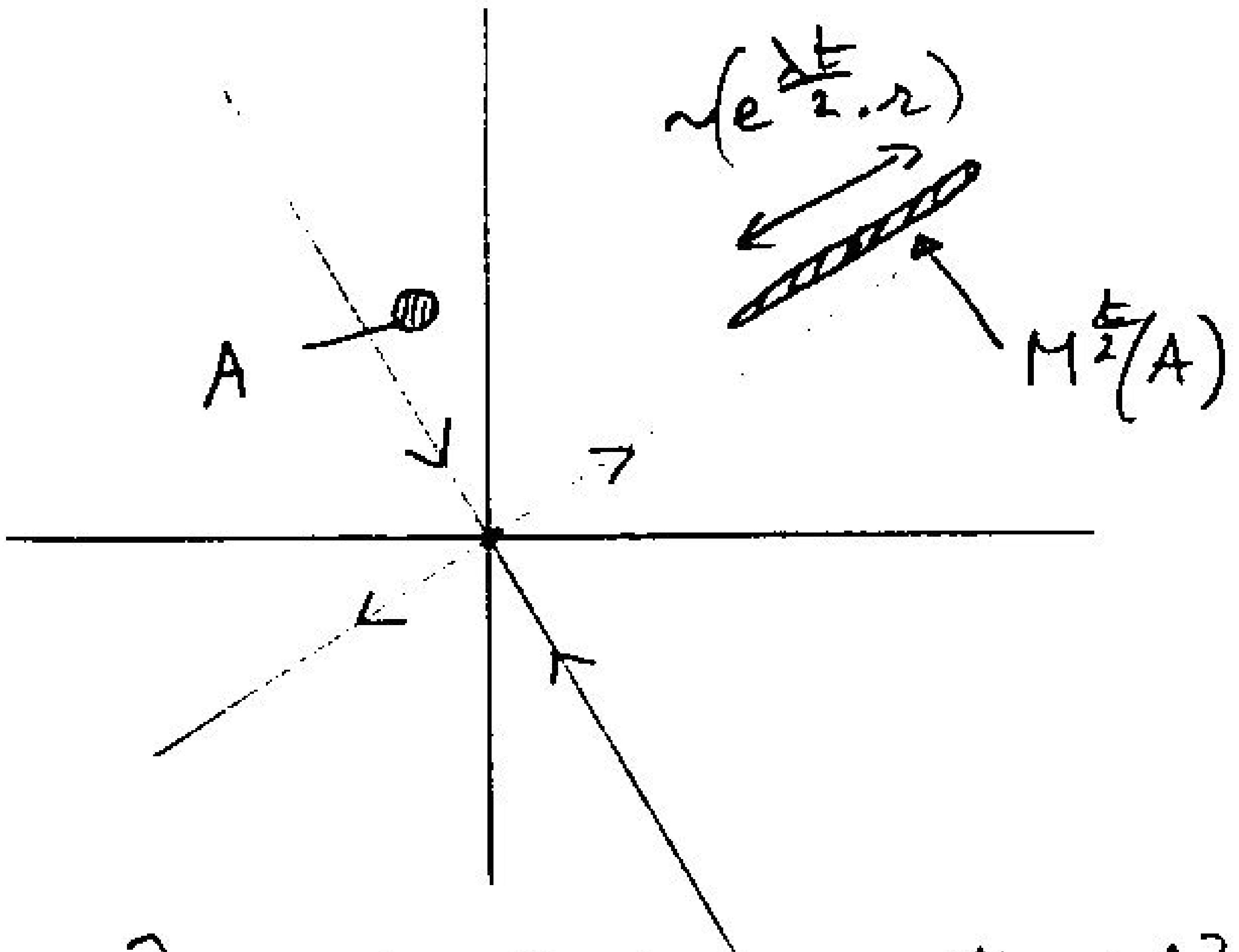
alors $E_{t+1} = M E_t \iff X_{t+1} = D X_t = D^t X_0$

$$\iff \begin{cases} x_t = e^{\lambda t} x_0 & \longrightarrow +\infty \quad \text{pour } t \to \infty \\ y_t = e^{-\lambda t} y_0 & \longrightarrow 0 \quad \text{''} \end{cases}$$

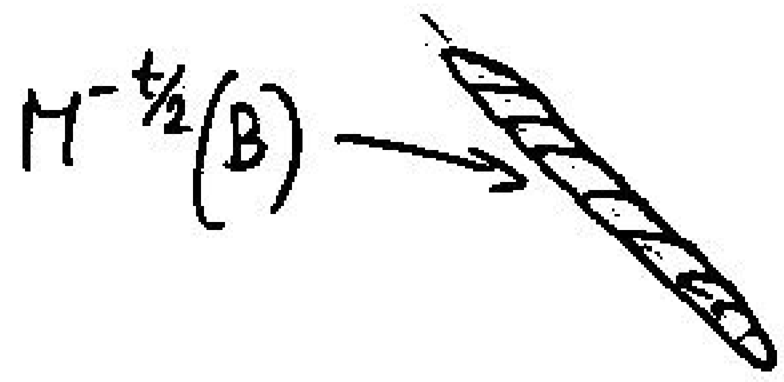
on a $x_t y_t = x_0 y_0 = \text{cste}$ donc $(x_t, y_t) \in$ hyperbole



2) Soit A un petit disque sur le plan (q,p), de rayon r.
D'après ci-dessus pour $t \gg 1$, $M^{\frac{t}{2}}(A)$ est une ellipse de même aire mais étirée dans la direction instable de $\frac{1}{2}$ grand axe $\simeq e^{\lambda\frac{t}{2}}.r \gg 1$ et $\frac{1}{2}$ petit axe $\simeq e^{-\lambda\frac{t}{2}}r \ll 1$

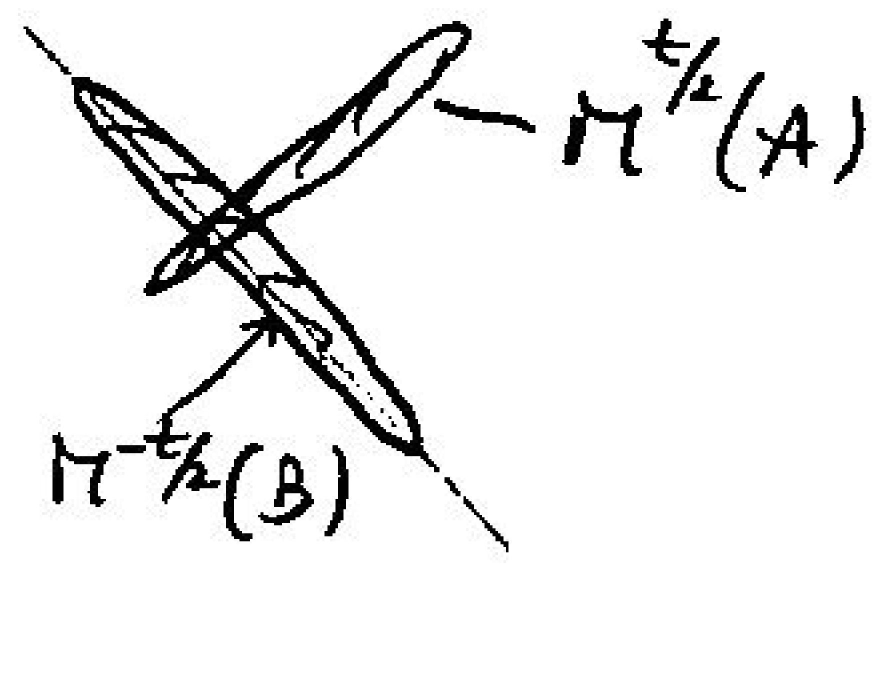


De même si B est un autre petit disque, $M^{-\frac{t}{2}}(B)$ a l'allure étirée (dans le passé) selon la direction stable.



si t est tel que $(e^{\frac{\lambda t}{2}}r) \gg 1$
alors modulo 1, $M^{\frac{t}{2}}(A)$ et $M^{-\frac{t}{2}}(B)$ vont forcément s'intersecter :

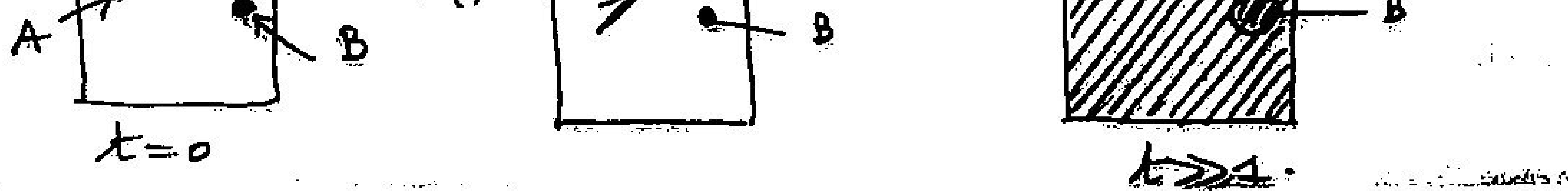
$$\left(M^{t/2}(A) \cap M^{-t/2}(B)\right) \neq \phi$$



$$\Longrightarrow \left(M^{t}(A) \cap B\right) \neq \phi \quad \text{: modulo 1.}$$

(en appliquant $M^{t/2}$).

La signification est que sur $\mathcal{S} = [0,1[^2$, l'ensemble $M^t(A)$ va intersecter tout disque B aussi petit soit-il, à partir d'une certaine date t :



Autrement dit l'ensemble $M^t(A)$ se "mélange" sur $\mathcal{S}$.
Si le petit rayon de r représente notre méconnaissance de l'état initial, à partir d'une certaine date, $M^t(A)$ est complètement mélangé $\Leftrightarrow$ la méconnaissance sur l'état E_t est totale. C'est le chaos

Cette date t est donnée par $e^{\lambda t/2} r \gg 1$

$$\Leftrightarrow \quad t \geq \frac{2}{\lambda} \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad = \quad 55$$

pour $r = 10^{-5}$

(3) $\tilde{E}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ est périodique de période t

$$\Leftrightarrow \quad M^t(\tilde{E}_0) = \tilde{E}_0 \text{ modulo } 1$$

$$\Leftrightarrow \quad M^t(\tilde{E}_0) = \tilde{E}_0 + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

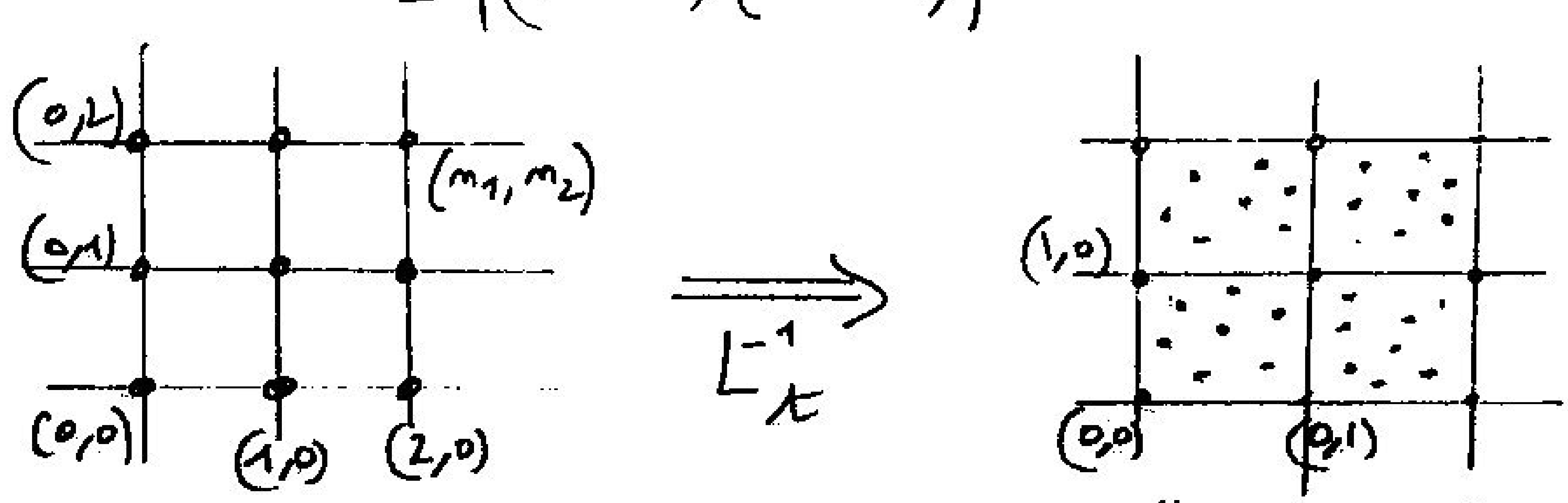
$$\Leftrightarrow \quad (M^t - Id)\, \tilde{E}_0 = N \qquad \text{avec } N = (n_1, n_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{E}_0 = (M^t - 1)^{-1}(N)$$

Les points périodiques sont donc l'image du réseau $\mathbb{Z}^2$ par l'application linéaire L_t^{-1}, avec $L_t := (M^t - 1)$.

on a $\left| \mathrm{Det}(L_t) \right| = \left| \mathrm{Det}(M^t - I) \right| = \left| \mathrm{Det} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} - 1 \end{pmatrix} \right|$

$$= \left| (e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - 1) \right| = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t} \xrightarrow[t \infty]{} \infty$$



$\left| \mathrm{Det}(L_t^{-1}) \right| = \left| \mathrm{Det}(L_t) \right|^{-1} \ll 1$ cad L_t^{-1} est "contractante" par le facteur $\left| \mathrm{Det}(L_t) \right|^{-1} \ll 1$

Le nombre de points périodique (dans $\mathcal{S} = [0,1[^2$)

est donc $\mathcal{N}_t = |\mathrm{Det}(L_t)| = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t}$

$= |\mathrm{Det}(M^t - 1)|$

- Il y a $\mathcal{N}_1 = |\mathrm{Det}(M-1)| = 1$ point de période 1

  c'est $(0,0) \xrightarrow{M} (0,0)$

- Il y a $\mathcal{N}_2 = |\mathrm{Det}(M^2-1)| = 5$ points de période 2

  Ce sont : $(0,0) \xrightarrow{M} (0,0) \xrightarrow{M} (0,0)$

  $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ modulo 1

  $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ modulo 1

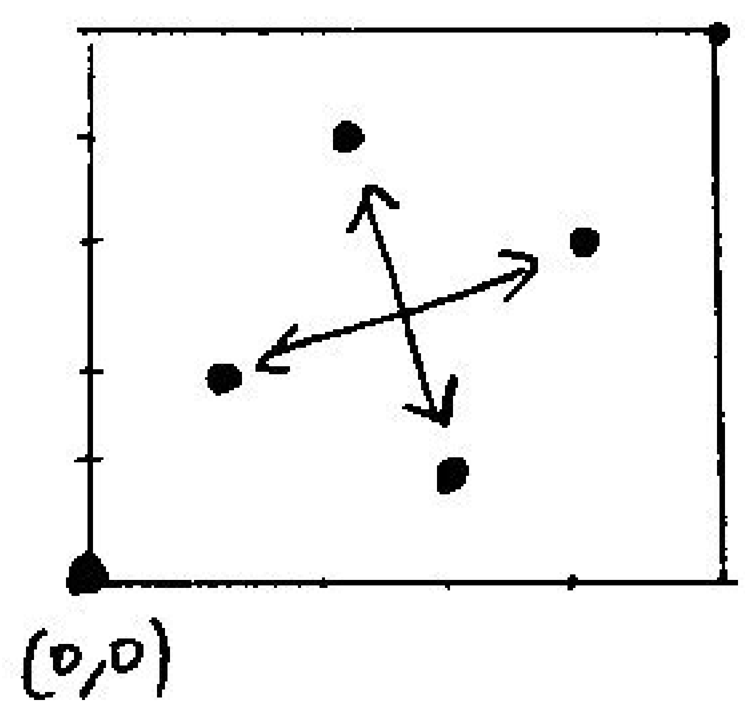
  obtenus par $(0,0) = L_2^{-1}(0,0)$

  $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = L_2^{-1}(2,1)$

  $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = L_2^{-1}(3,2)$

  $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = L_2^{-1}(4,2)$

  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = L_2^{-1}(5,3)$



④ D'après la formule ci-dessus, $\tilde{E}_0 = (M^t - 1)^{-1}(N)$

comme $(M^t - 1)$ est une matrice à coefficients entiers

alors $(M^t - 1)^{-1}$ a des coef. rationnels, et N entiers

donc $\tilde{E}_0$ a des coef. rationnels.

Réciproquement, soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons tous les points de la forme $\tilde{q}_0 = \frac{a}{N}$, $\tilde{p}_0 = \frac{b}{N}$ avec a, b entiers et $0 \leq a < N$, $0 \leq b < N$.

Il y a N^2 points de la sorte. Comme $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est à coef entiers alors $\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix}$ est encore de la sorte

Donc la trajectoire de $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ parmi ces N^2 points est forcément périodique. Conclusion : si $\tilde{q}_0 = \frac{a_1}{b_1}$, $\tilde{p}_0 = \frac{a_2}{b_2}$ est un point de coordonnées rationnelles on a :

$$\tilde{q}_0 = \frac{a_1 \cdot b_2}{N}, \quad \tilde{p}_0 = \frac{a_2 \cdot b_1}{N}$$ avec $N = b_1 \cdot b_2$ et on

déduit que c'est un point périodique.

5 on a calculé $\mathcal{N}_t = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t} \underset{t\infty}{\sim} e^{\lambda t}$

donc
$$h = \lim_{t\infty} \frac{1}{t} \log(\mathcal{N}_t) = \lambda = \log(\mu_+) \simeq 0{,}41$$

la signification est "la croissance de la complexité à chaque pas de temps" ou le taux de perte d'information au cours du temps.