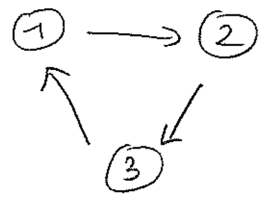
Matrice d'adjacence d'un graphe, Solution

1. • Soit P la matrice d'adjacence d'un graphe.

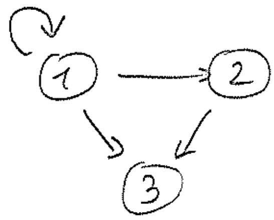
c'est à dire $\begin{cases} P_{j,i} = 1 & \text{si arête } i \to j \\ P_{j,i} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

• ex : graphe 1 :



$$P_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

graphe 2 :



$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• On va montrer que $(P^n)_{j,i}$ = nombre de chemins reliant i à j au temps $n \geqslant 0$.

• Par ex. $P_2^4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et il y a en effet

3 chemins : $\begin{cases} 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \\ 1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \\ 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 1 \end{cases}$

reliant 1 à 1 au temps $n = 4$.

- <u>Rappel</u> : si A, B sont deux matrices alors

$$(AB)_{j,i} = \sum_k A_{j,k} \, B_{k,i} \quad : \text{"produit de matrices"}$$

- donc

$$P^n = \underbrace{P \cdot P \cdot P \cdots P}_{n}$$

$$(P^n)_{j,i} = \sum_{\substack{k_1 = 0 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1}}}^{m} P_{j,k_{n-1}} \cdots P_{k_2,k_1} \, P_{k_1,i}$$

$$i \to \underbrace{k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_{n-1}}_{\text{on somme sur les points intermédiaires}} \to j$$

On observe que :

$$P_{j,k_{n-1}} \cdots P_{k_2,k_1} \, P_{k_1,i} = 1$$

si et seulement si tous les termes sont égaux à 1

c'est à dire ssi le chemin $i \to k_1 \to \cdots \to k_{n-1} \to j$ existe. Ce produit est nul sinon.

Donc $$(P^n)_{j,i} = \sum_{\substack{\text{chemins} \\ i \to j \\ \text{au temps } n}} 1 = \#\{\text{chemins } i \to j \text{ au temps } n\}$$

- Conséquence le nombre de chemins <u>périodiques</u> est :

$$\#\text{ chemins de période } n = \sum_i (P^n)_{i,i} = \mathrm{Trace}(P^n)$$

<u>ex</u> : # chemins de période 4 sur le graphe 2 $= \mathrm{Tr}(P_2^4) = 5$

2 On suppose la matrice P mélangeante

C'est à dire :

$$\exists n, \quad \forall i,j \quad (P^n)_{i,j} > 0.$$

D'après le théorème de Perron Frobenius (voir cours), P admet une valeur propre $\lambda > 0$ strictement dominante.

Par conséquent pour $n \to \infty$,

$$P^n = \lambda^n \pi_\lambda + o(\lambda^n))$$

avec $\pi_\lambda = |U_\lambda\rangle\langle V_\lambda|$: projecteur spectral de rang 1 associé.

et U_λ, V_λ vecteurs propres à gauche et à droite, de composantes $(U_\lambda)_j > 0$, $(V_\lambda)_i > 0$, $\forall i,j$.

donc

$$(P^n)_{j,i} = \lambda^n (U_\lambda)_j (V_\lambda)_i + o(\lambda^n)$$

$$h_{top} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\#\text{ chemins } i \to j, \text{ tps } n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\lambda^n (U_\lambda)_j (V_\lambda)_i + o(\lambda^n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n \log\lambda + \log\left(\underbrace{(U_\lambda)_j (V_\lambda)_i}_{>0} + o(1)\right)\right)$$

$$= \log\lambda$$