Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

TD 4. ***Dynamique sur un attracteur fractal***

---

1 « Dimension fractale »

On rappelle que par définition, si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de points, soit $\mathcal{N}_\epsilon$ le nombre minimal de boules (ou boites) de rayon $\epsilon > 0$ qui recouvrent $\mathcal{A}$. La **dimension fractale de Minkowski** de $\mathcal{A}$ est

$$\dim_M(\mathcal{A}) := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \right)$$

1) Ensemble de Cantor : On considère l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ que l'on divise en trois parties égales $1, 2, 3$ de largeur $1/3$ chacune. On définit E_1 comme étant l'union des deux parties $1, 3$. Chaque segment est redivisé en 3 parties égales et E_2 est formé de 2^2 intervalles (le 1 et 3 de chaque) de largeur $1/3^2$. Etc, E_n est formé de $\mathcal{N} = 2^n$ intervalles de largeur $\epsilon = 1/3^n$. Ces ensembles E_n sont contenus les uns dans les autres et on appelle F l'ensemble limite, appelé ensemble de Cantor. Calculer $\dim_M(F)$.

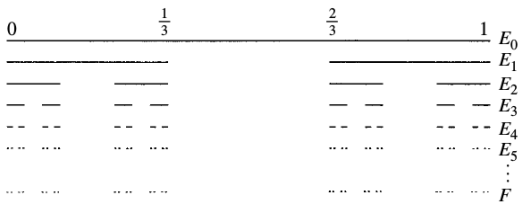


FIGURE 1 – Ensemble de Cantor

2) Fractale A La figure 2 (A) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

3) Une fractale arborescente B : La figure 2 (B) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

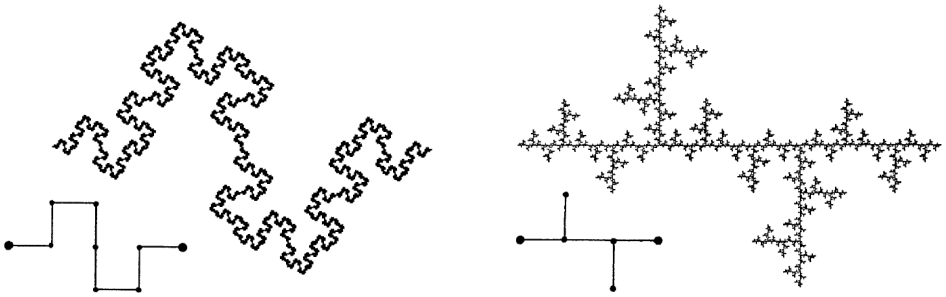


FIGURE 2 – (A) Fractale A. (B) Fractale arborescente B.

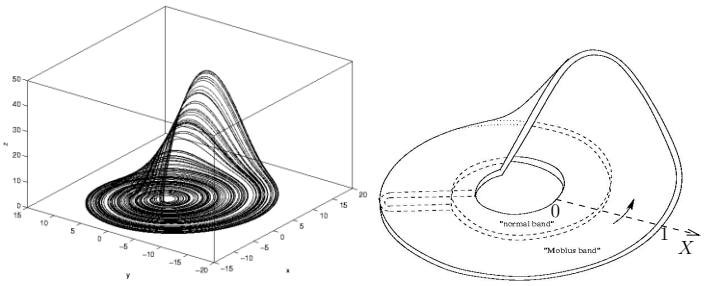
2 "Dynamique chaotique de Rössler"

En 1976, E.Rössler a proposé le modèle suivant qui décrit l'évolution de trois variables $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}$ en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & -y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt} = & x(t) + ay(t) \\ \frac{dz}{dt} = & b + (x(t) - c)\, z(t) \end{cases} \tag{1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ sont des paramètres fixés. Ces équations se rencontrent en chimie pour décrire l'évolution de la concentration de certains composés dans une réaction spécifique. Ce modèle est aussi interessant par lui même car il possède un attracteur étrange chaotique comme le modèle de Lorenz, en étant plus simple par certains aspects.

1. Préciser si le système dynamique (1) est : (a) à temps continu ou temps discret ? (b) déterministe ou non déterministe ? (c) linéaire ou non linéaire ? (d) Conservatif, expansif ou dissipatif ?
2. Trouver le nombre de points fixes du système (1) et leur position (x, y, z) en fonction des paramètres a, b, c.
3. La figure (a) suivante montre l'attracteur $\mathcal{A}$ du système (1) pour les paramètres $a = b = 0.2$, $c = 5.7$ obtenu par simulation numérique. Le schéma (b) qui suit montre que les trajectoires tournent autour d'un point fixe instable dans une "bande". La partie intérieure de cette bande appelée "bande normale" reste dans le plan horizontal, s'étire en largeur, fait un tour puis se place dessous. La partie extérieure appelée "bande de Moebius" fait aussi un tour en s'étirant, mais s'élève et se retourne, avant de se placer dessus. Etc.



(a) (b)

FIGURE 3

Dans ce mécanisme, on suppose que les deux bandes sont remplies de trajectoires de façon dense et reviennent contractées en épaisseur d'un facteur $\epsilon < 0.5$. Rappeler la définition de la dimension fractale d'un ensemble de points. Calculer la dimension fractale de l'attracteur $\dim\mathcal{A}$ en fonction de ϵ. Application numérique : calculer $\dim\mathcal{A}$ si $\epsilon = 1/16$?

4. On appelle $X \in [0, 1]$ la position transverse d'une trajectoire lorsqu'elle traverse l'axe X de la figure (b). On note $f : X_n \to X_{n+1} = f(X_n)$ l'application de retour de Poincaré après un tour. En observant la figure (b), tracer l'allure du graphe de la fonction $Y = f(X)$.
5. On souhaite simplifier le modèle.
   (a) Pour approcher la fonction $f(X)$ avec $X \in [0, 1]$, quelle fonction proposez vous parmi les fonctions f_1 et f_2 suivantes ?

$$f_1(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2X - 1 & \text{si } X > 1/2 \end{cases}, \qquad f_2(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2 - 2X & \text{si } X > 1/2 \end{cases},$$

   (b) Pour les fonctions $f = f_1$ puis $f = f_2$, décrire précisément la valeur en temps long $n \gg 1$ du système dynamique $X_{n+1} = f(X_n)$ à partir de la valeur initiale X_0 est écrit en base 2, c'est à dire $X_0 = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$ avec des bits $b_j \in \{0, 1\}$.
   (c) Soit $\delta \ll 1$ l'incertitude sur X_0 à la date $n = 0$. Après quel temps $n(\delta)$ cette petite incertitude $\delta \ll 1$ rend la prévision impossible ?