Exercice : "Dynamique chaotique de Rössler"

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) - z(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + a\,y(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = b + \left(x(t) - c\right) z(t) \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

① c'est une dynamique à temps continu, déterministe, non linéaire (à cause du terme $x(t) \cdot z(t)$)

② (x, y, z) est point fixe $\Longleftrightarrow$ $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$ et $\frac{dz}{dt} = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ x + ay = 0 \\ b + (x-c)z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ y = -\frac{1}{a}x \quad : \text{si } a \neq 0 \\ b + (x-c)\frac{1}{a}x = 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow (x-c)x + ba = 0 \; ; \; y = -\frac{1}{a}x \; ; \; z = -y$

$\Longleftrightarrow x^2 - cx + ba = 0$ " "

$\Delta = c^2 - 4ba$

- si $\Delta \geqslant 0$, alors $\begin{cases} x_\pm = \dfrac{c \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ y_\pm = -\frac{1}{a} x_\pm \\ z_\pm = \frac{1}{a} x_\pm \end{cases}$: deux points fixes

- si $\Delta < 0$, pas de point fixe.
- si $a = 0$, alors $x = 0$, $z = \frac{b}{c}$, $y = -\frac{b}{c}$: si $c \neq 0$

(3) si on recouvre un ens de points $\mathcal{A}$ par $\mathcal{N}_n$ boules de rayon ε_n, de façon minimale, alors.

$$\dim \mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathcal{N}_n}{\log(1/\varepsilon_n)} \quad \text{si } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ici en épaisseur, après n tours, il y a $2^n = \mathcal{N}_n$ rubans d'épaisseur $\sim \varepsilon_n = \varepsilon^n$

donc

la dimension en épaisseur (direction z) est

$$\dim_z \mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n} = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

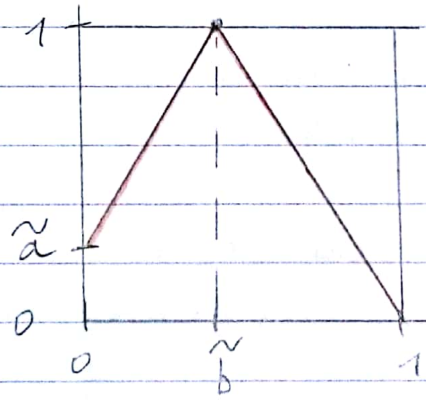
Si on suppose que $\mathcal{A}$ est dense dans le plan (x,y) (dimension 2) alors :

$$\dim \mathcal{A} = 2 + \frac{\log 2}{\log(1/\varepsilon)}$$

<u>A.N</u> : $\varepsilon = \frac{1}{16}$; $\quad \dim \mathcal{A} = 2 + \frac{\log 2}{\log 16} = 2 + \frac{\lg 2}{\lg 2^4}$

$$= 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$$

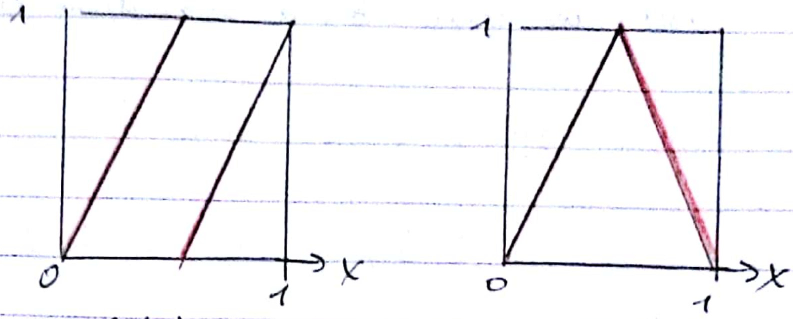
(4) Allure du graphe de $f(X)$:



avec des paramètres $\tilde{a} \gtrsim 0$, $\tilde{b} \simeq \frac{1}{2}$.

⑤

a)



$f_1(X)$ $\qquad$ $f_2(X)$

la fonction $f(X)$ ressemble plutôt à $f_2(X)$.
avec $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = 1/2$

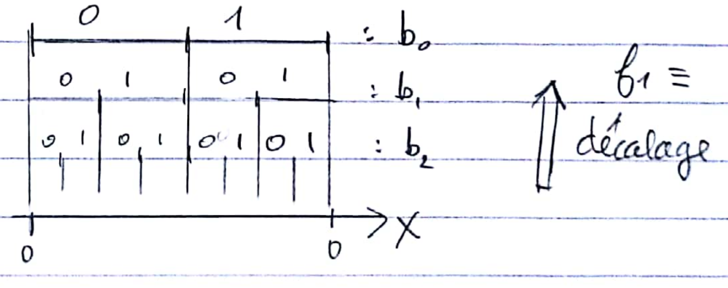
b) si $X_0 = 0, b_0\, b_1\, b_2 \dots$, $\quad b_j \in \{0,1\}$ bit

et $X_{n+1} = f_1(X_n)$, alors

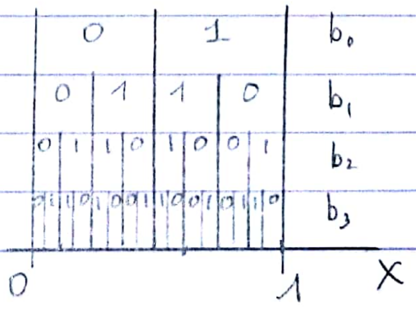
$$X_n = f_1^n(X_0) = 0, b_n\, b_{n+1}\, b_{n+2} \dots$$

: décalage à gauche de l'écriture en base 2

d'après le schéma suivant



• Pour la fonction f_2 ; la branche $f_1(X) = 2X$ effectue un décalage, mais $f_2(X) = 2 - 2X$ effectue un décalage et inversion :



(c) une erreur $\delta \ll 1$ s'amplifie comme :

$$\delta(n) \simeq 2^n \cdot \delta \text{, donc } \delta(n) \simeq 1$$

$$\Longleftrightarrow 2^n \delta \simeq 1 \Longleftrightarrow n \log 2 = \log 1/\delta$$

$$\Longleftrightarrow n = \frac{\log(1/\delta)}{\log 2}$$