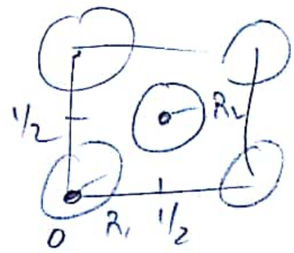
26/6/13

Simulation numérique d'un billard de Sinaï à horizon fini

Voir billard_Sinaï.cc 1



- Notations :

1 $$\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

2 $$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

3 N cercles disjoints : $\begin{cases} \text{centre} & c^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{Rayon} & R^{(j)} > 0 \end{cases}$

4 on suppose horizon fini sur $\mathbb{R}^2$: $\leq \boxed{L > 0}$ connu.

4' on suppose distances $> \delta > 0$.

- Problème d'intersection d'une droite avec un cercle :

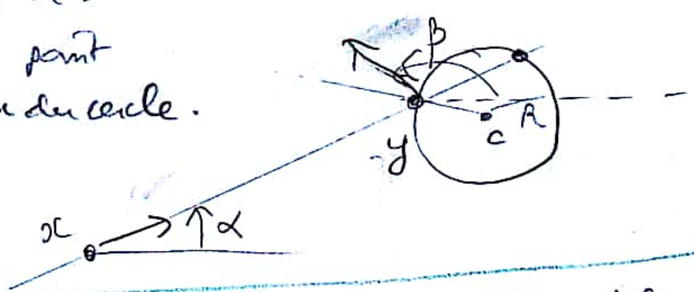
données :

5 $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^2 & \text{: position} \\ \alpha \in \mathbb{R} \pmod{2\pi} & \text{: direction} \end{cases}$

6 $\begin{cases} c = (c_1, c_2) & \text{: centre} \\ R > 0 & \text{: rayon} \end{cases}$

on suppose le point à l'extérieur du cercle.

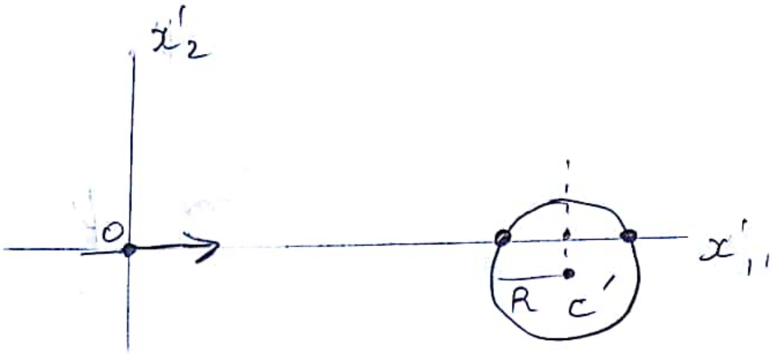
7



8 Sortie : déterminer si il y a intersection, et si oui, donner $\begin{cases} y \in \mathbb{R}^2 & \text{: nouvelle position} \\ \beta \in \mathbb{R} & \text{: nouvelle direction.} \end{cases}$

$\boxed{\text{Solution}}$: par translation et rotation,

on a les nouvelles variables :

9 

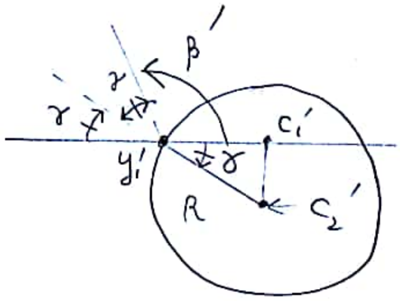
10 cad $c' = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{rotation de } (-\alpha)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 - x_1 \\ c_2 - x_2 \end{pmatrix}}_{\text{translation}}$

11 alors : • si $|c_2'| \geq R$ ou $c_1' < 0$: il n'y a pas d'intersection

12 • sinon (si $|c_2'| < R$) et $c_1' > 0$, il y a intersection et

alors

13 $(c_1' - y_1')^2 + c_2'^2 = R^2$

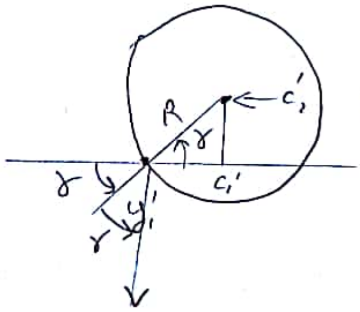


: si $c_2' < 0$
$\gamma < 0$

14 $\rightarrow \boxed{y_1' = c_1' - (R^2 - c_2'^2)^{1/2}}$

15 $\sin\gamma = \dfrac{c_2'}{R}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

16 $\beta' = \pi + 2\gamma$



: $c_2' > 0$
$\gamma > 0$

on déduit que :

17 $$\boxed{\begin{cases} \beta = \beta' + \alpha \\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}}$$

18 on ramène β dans $0 \leq \beta < 2\pi$: optimal.

• rem : la longueur parcourue est :

1 $$\ell = |y - x| = \left((y_2 - x_2)^2 + (y_1 - x_1)^2 \right)^{1/2}$$

• **Evolution d'un point dans le billard de Sinaï**

2 • donnée initiale : $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: position

3 avec $\begin{cases} 0 \leq x_1 < 1 \\ 0 \leq x_2 < 1 \end{cases}$

4 et direction : $0 \leq \alpha < 2\pi$.

• sortie : position $\begin{cases} y = (y_1, y_2) \text{ du prochain impact} \\ \beta \in \mathbb{R} \quad : \text{nouvelle direction} \end{cases}$

5

6 et $\ell > 0$: longueur parcourue.

solution :

comme l'horizon est $\leq L$,

7 Le prochain impact est dans les images :

$n \in \mathbb{Z}^2$ tq $|n| \leq L$.

De plus si $(\cos\alpha) \geq 0$, il suffit de chercher pour $n_1 = 0 \to +L$

8 si $(\cos\alpha) \leq 0$, " , $n_1 = 0 \to -L$

si $(\sin\alpha) \geq 0$, $n_2 = 0 \to +L$

$(\sin\alpha) \geq 0$, $n_2 = 0 \to -L$

(1b) On fait donc une boucle sur $\overset{(2\text{-}8)}{m=(n_1, n_2)}$ avec les bornes ci-dessus (2-8)

- boucle sur les cercles : $j = 1 \longrightarrow N$.

pour chaque cercle, décalé de n,

on détermine d'après (1-8) si il y a collision ou pas

si il y a collision, on mémorise :

$$(\underbrace{y,\beta}_{(1\text{-}17)}, \underset{(2\text{-}1)}{\ell})$$

(2) Parmi les collisions trouvées, on sélectionne celle de longueur ℓ minimale. ($\triangle$ longueur sur $\mathbb{R}^2$)
↳ sur $\mathbb{R}^2$

Si pas de collision ⟶ "message d'erreur" : "il faut augmenter la valeur L de l'horizon".

(3) On peut tracer le segment $(x-y)$.

OK

rem : on peut tracer la trajectoire sur $\mathbb{R}^2$ à grande échelle pour observer un mvt Brownien., TCL etc..

OK

Evolution d'un nuage de points indépendants dans le billard de Sinaï

Entrée :

∘ on a N points initiaux :

1 $\begin{cases} x^{(p)}, & p = 1 \to N \quad \text{: position} \\ \alpha^{(p)} & \text{: directions.} \end{cases}$

2 pas de temps : $\delta t > 0$ tq $\delta t < \delta$ (1.4').

Sortie : à chaque instant discret :

3 $t_k = k \cdot \delta t, \quad k \in \mathbb{N},$

4 on veut la $\begin{cases} \text{position } x^{(p)}, \\ \text{direction } \alpha^{(p)} \end{cases}$ de chaque point $p = 1 \to N$

5 → image et vidéo.

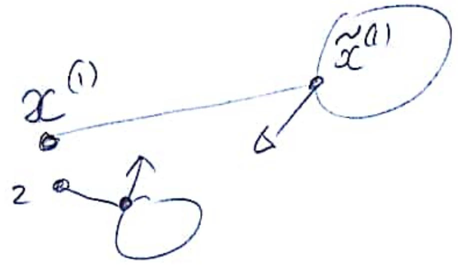
Solution : pour chaque point (p),

6 – on calcule le prochain impact (y, β) et longueur ℓ d'après (2-5),(2-6).

on mémorise : pour $p = 1 \to N$:

7 $\begin{cases} \tilde{x}_p = y \\ \tilde{\alpha}_p = \beta \end{cases}$ } prochain impact
$\tilde{t}_p = t_p + \ell$: prochaine date.

ancien



- pour chaque particule,
  - si $\tilde{t}_p < t + \delta t$ cad impact à venir, dans le prochain intervalle,

  alors on calcule la prochaine position par :

$$x^{(p)} = \tilde{x}^{(p)} + \ell' . \tilde{v}$$

avec $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha}_p \\ \sin \tilde{\alpha}_p \end{pmatrix}$: nouvelle vitesse

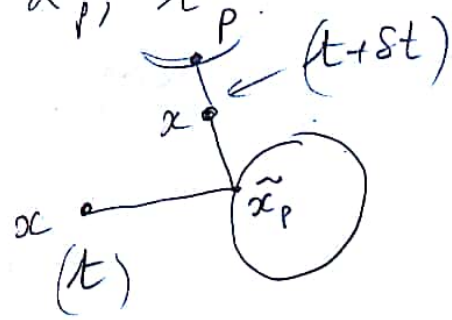
$\ell' = (t + \delta t - \tilde{t}_p)$: longueur parcourue.

et nouvelle direction :

$$\alpha^{(p)} = \tilde{\alpha}^{p}$$

on calcule aussi le prochain impact : que l'on mémorise comme en (3-7) :

$$\tilde{x}_p, \ \tilde{\alpha}_p, \ \tilde{t}_p.$$



- sinon, si $t + \delta t < \tilde{t}_p$, on se contente d'avancer en ligne droite :

$$\begin{cases} x^{(p)} = x^{(p)} + \delta t . v \\ \alpha^{(p)} \text{ inchangé} \end{cases} \quad \text{avec } v = \begin{pmatrix} \cos \alpha^{(p)} \\ \sin \alpha^{(p)} \end{pmatrix}$$

- si on sort du carré, on recommence.

- Etudes intéressantes

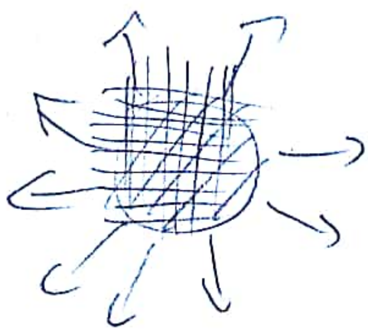
  - évolution d'un nuage de points $N \simeq 10^5$
    - voir la projection de la variété instable (marche $\forall$ nuage initial concentré)
    - convergence vers l'équilibre.

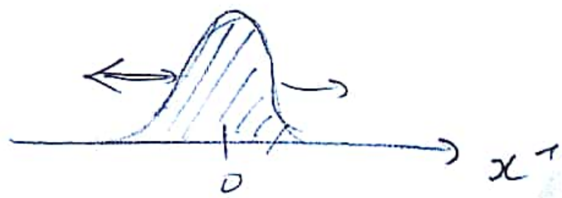
- Aspect statistiques

  on peut mémoriser la position $x \in \mathbb{R}^2$ (pas mod $\mathbb{Z}^2$) de la particule ou du nuage et montrer la répartition, la diffusion à grande échelle, qui est une loi Gaussienne de taille $\sim \sqrt{t}$ d'après TCL

  avec large deviations : $|x| \leq t \cdot U_{max}$ $= < 1$ si orbite périodique par exemple.

  et TCL local





trajectoire individuelle.