Masses et ressort

(1) L'énergie cinétique est :

$$E_{cin} = 2 \times \frac{1}{2} m (a\dot{\theta})^2 = m a^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle est :

$$E_{pesanteur} = 2 m g z = 2 m g (-a \cos\theta)$$

$$E_{ressort} = \frac{1}{2} k (2a\cos\theta)^2 = 2 k a^2 \cos^2\theta$$

Le <u>Lagrangien</u> est donc

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_{cin} - (E_{pes.} + E_{ressort})$$

$$= m a^2 \dot{\theta}^2 + 2 m g a \cos\theta - 2 k a^2 \cos^2\theta$$

impulsion :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 m a^2 \dot{\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2ma^2} p_\theta$$

<u>Hamiltonien</u> :

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \cdot \dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - m a^2 \frac{p_\theta^2}{(2ma^2)^2} + E_{pes} + E_{ressort}$$

$$= \frac{p_\theta^2}{4ma^2} + U(\theta)$$

avec $U(\theta) = -2 m g a \cos\theta + 2 k a^2 \cos^2\theta$

② $U'(\theta) = 2\,m g a \sin\theta - 4\,k a^2 \cos\theta \sin\theta$

on a $U'(\theta_0) = 0 \iff 2 m g a - 4 k a^2 \cos\theta_0 = 0$ si $\sin\theta_0 \neq 0$

$$\iff \cos\theta_0 = \frac{mg}{2ka}$$

$$\iff \theta_0 = \operatorname{acos}\left(\frac{mg}{2ka}\right) \quad \text{si} \quad \frac{mg}{2ka} \leqslant 1.$$

Donc :

- si $k < \dfrac{mg}{2a}$ ("ressort mou")

  la position d'équilibre est $\theta_0 = 0$

- si $k \geqslant \dfrac{mg}{2a}$ ("ressort dur")

  la position d'équilibre est $\theta_0 = \operatorname{acos}\left(\dfrac{mg}{2ka}\right)$ et aussi $\theta_0 = 0$

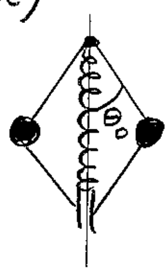
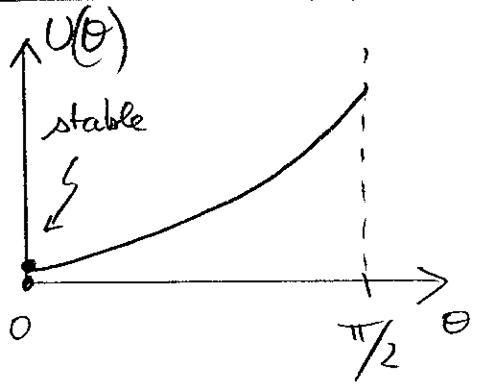
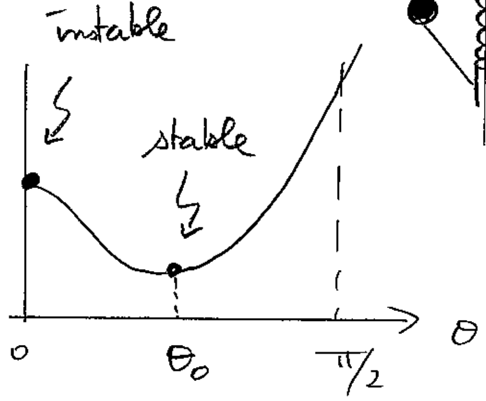


Schéma du potentiel $U(\theta)$:



si $k < \dfrac{mg}{2a}$



si $k \geqslant \dfrac{mg}{2a}$

3 $U''(\theta) = 2mga\cos\theta + 4ka^2\sin^2\theta - 4ka^2\cos^2\theta$

donc

- Si $k < \dfrac{mg}{2a}$, la fréquence des oscillations près de la position d'équilibre stable $\theta_0 = 0$ est :

$$\omega_0 = \left(\frac{U''(0)}{2ma^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{a} - \frac{2k}{m}\right)^{1/2}$$

- Si $k \geqslant \dfrac{mg}{2a}$, le facteur d'instabilité de la position $\theta_0 = 0$ est :

$$\lambda_0 = \left(\frac{-U''(0)}{2ma^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{a}\right)^{1/2}$$

et la fréquence des oscillations près de la position stable $\theta_0 = \arccos\left(\dfrac{mg}{2ka}\right)$ est :

$$\omega_0 = \left(\frac{U''(\theta_0)}{2ma^2}\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} U''(\theta_0) &= 2mga\cos\theta_0 + 4ka^2(1-\cos^2\theta_0) - 4ka^2\cos^2\theta_0 \\ &= 4ka^2 - 8ka^2\cos^2\theta_0 + 2mga\cos\theta_0 \\ &= 4ka^2 - 8ka^2\left(\frac{mg}{2ka}\right)^2 + 2mga\left(\frac{mg}{2ka}\right) \\ &= 4ka^2 - \frac{m^2g^2}{k} \end{aligned}$$

donc

$$\omega_0 = \left(\frac{2k}{m} - \frac{mg^2}{2ka^2}\right)^{1/2}$$

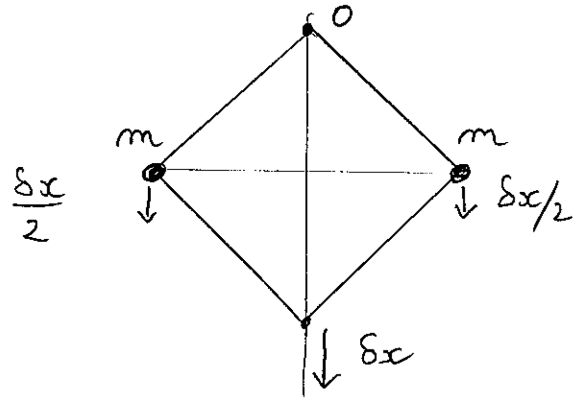
- Si $k \to 0$, $\qquad \omega_0 \approx \sqrt{\dfrac{g}{a}}$

  ce sont les oscillations du pendule.

- Si $k \to \infty$, $\qquad \omega_0 \approx \left(\dfrac{2k}{m}\right)^{1/2}$

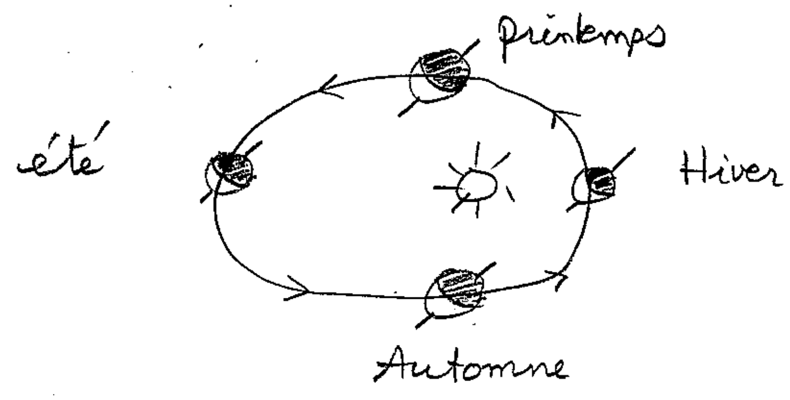
  ce sont les oscillations du ressort pour une "masse $\frac{m}{2}$". (Cela est dû à la géométrie du Losange : un allongement δx déplace les masses de $\frac{\delta x}{2}$,

  et $$\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\right)}_{\text{masse inertielle effective}}(\delta x)^2$$



Précession des équinoxes

1) L'été, l'hémisphère nord reçoit plus de soleil donc :



2) $$dU = -\frac{G M_s \,(\mu\, d^3\vec{x})}{r}$$ ⟶ masse de l'élément de volume

3) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\vec{SM}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\vec{SO}+\vec{OM}\right)^2}} = \frac{1}{\left(\vec{SO}^2 + \vec{OM}^2 + 2\vec{SO}\cdot\vec{OM}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\left(R^2 + \vec{x}^2 + 2R\,\vec{u}\cdot\vec{x}\right)^{1/2}} = \frac{1}{R}\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{R^2}\vec{x}^2 + \frac{2\vec{u}\cdot\vec{x}}{R}}_{\alpha}\Big)^{-1/2}$$

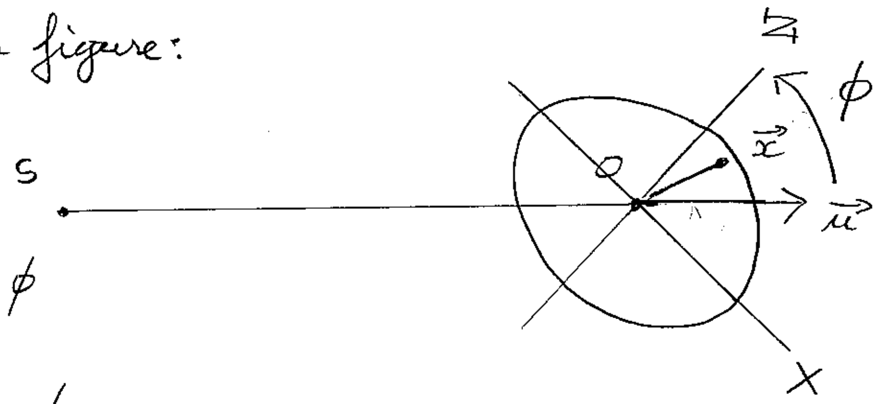
$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + o(\alpha^2)\right)$$

avec $\alpha^2 = \frac{4(\vec{u}\cdot\vec{x})^2}{R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)$

$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{x}}{R} - \frac{\vec{x}^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{u}\cdot\vec{x})^2}{R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

(4) On choisissant l'axe X dans le plan équatorial tel que X soit dans le plan $(\vec{SO}, Z)$

on a d'après la figure :



$$\vec{u} = \begin{cases} u_X = \sin\phi \\ u_Y = 0 \\ u_Z = \cos\phi \end{cases}$$

donc si $\vec{x} = (X, Y, Z) \in$ Terre,

$$\vec{u}\cdot\vec{x} = X\sin\phi + Z\cos\phi, \qquad (\vec{u}\vec{x})^2 = X^2\sin^2\phi + Z^2\cos^2\phi + 2XZ\cos\phi\sin\phi$$

$$\vec{x}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

et

$$U = \int_{\text{Terre}} dU = -\mathcal{G} M_S \mu \int_{\text{Terre}} \frac{1}{r}\, d^3\vec{x}$$

$$= -\frac{\mathcal{G} M_S \mu}{R} \int \left(1 - \frac{\vec{u}\vec{x}}{R} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{u}\vec{x})^2}{R^2} - \frac{\vec{x}^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) d^3\vec{x}$$

- Comme O est un centre de symétrie, on a $\int (\vec{u}\cdot\vec{x})\, d^3\vec{x} = 0$
- La symétrie de révolution : $(X, Y, Z) \to (-X, -Y, Z)$

  donne $\int XZ\, d^3x = 0$
- On a aussi $\int \mu\, d^3\vec{x} = M_T$

Il reste

$$U = -\frac{\mathcal{G} M_s}{R}\left(M_T + \frac{3}{2R^2}\left(\sin^2\phi\, I_x + \cos^2\phi\, I_z\right) - \frac{1}{2R^2}\left(I_x + I_y + I_z\right) + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

$$\left(\text{or } \sin^2\phi = 1-\cos^2\phi \text{ et } I_y = I_x\right)$$

$$\boxed{U = -\frac{\mathcal{G} M_s}{R}\left(M_T + \frac{1}{2R^2}\left(I_x - I_z\right)\left(1-3\cos^2\phi\right)\right)}$$

remarque : si la Terre est sphérique, alors $I_x = I_z$,

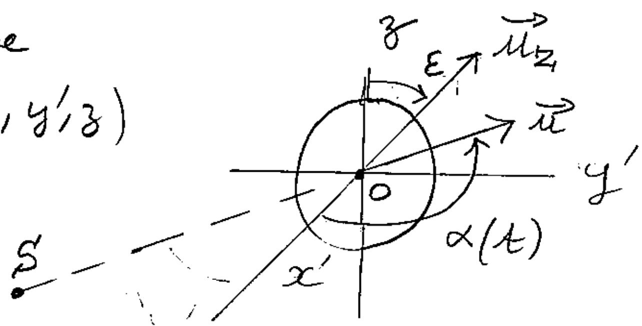
et $U = -\dfrac{\mathcal{G} M_s M_T}{R}$: résultat identique à celui d'une masse ponctuelle.

5. L'angle $\phi(t)$ varie au cours de l'année.

Si $\vec{u}_z$: vecteur unitaire selon l'axe z_1, alors

$$\cos\phi = \vec{u}_z \cdot \vec{u}$$

Or dans le repère (O, x', y', z), où (x', y') est dans le plan de l'écliptique tel que l'axe z_1 soit dans le plan (O, y', z)



on a

$$\vec{u} = \begin{cases} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_z = \begin{cases} 0 \\ \sin\varepsilon \\ 0 \end{cases}$$

donc $\cos\phi = \vec{u}_z \cdot \vec{u} = \sin\varepsilon \cdot \sin\alpha(t)$

$$\cos^2\phi = \sin^2\varepsilon \ \sin^2\alpha = \sin^2\varepsilon \ \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\alpha)\right)$$

Sur une année, $\alpha(t) = 0 \longrightarrow 2\pi$, donc en moyenne :

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\alpha)\, d\alpha = 0, \quad \text{donc} \quad \langle \cos^2\phi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon$$

donc

$$\langle U \rangle = -\frac{\mathcal{G} M_S}{R}\left(M_T + \frac{1}{2R^2}\left(I_x - I_z\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right)\right)$$

⑥ On a $\vec{\omega} = \Omega\,\vec{u}_z + \dot{\psi}\left(\cos(-\varepsilon)\,\vec{u}_z + \sin(-\varepsilon)\,\vec{u}_x\right) + \dot{\varepsilon}\,\vec{u}_y$

$$= \omega_x\,\vec{u}_x + \omega_y\,\vec{u}_y + \omega_z\,\vec{u}_z$$

avec
$$\begin{cases} \omega_x = -\dot{\psi}\sin(\varepsilon) \\ \omega_y = \dot{\varepsilon} \\ \omega_z = \Omega + \dot{\psi}\cos(\varepsilon) \end{cases}$$

- <u>Complément d'explications (non demandé)</u>

Soit $\mathcal{R}_{xyz}$: le repère $(O\,x\,y\,z)$ fixe par rapport aux étoiles

$\mathcal{R}_{XYZ}$: le repère $(O\,X\,Y\,Z)$ fixe par rapport à la Terre.

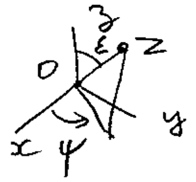
Alors par construction on a :

$$\mathcal{R}_{XYZ} = \left(R_Z(\alpha)\ \underbrace{R_z(\psi)\ R_y(\varepsilon)}_{\hat{R}}\right)\mathcal{R}_{xyz}$$

rotation de ε / axe y

rotation de $\alpha = \Omega t$ / axe Z

rotation de ψ / axe z



Le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ est défini par : $\quad \vec{\omega} \wedge \vec{u} = \left(\frac{d\hat{R}}{dt} \cdot \hat{R}^{-1} \right) \vec{u}, \qquad \forall \vec{u}$

on calcule :

$$\frac{d\hat{R}}{dt} \cdot \hat{R}^{-1} = \left(\Omega L_{u_z} \hat{R} + R_z(\alpha) R_3(\psi) \dot{\psi} L_{u_3} R_y(\varepsilon) + \hat{R} \; \dot{\varepsilon} L_{u_y} \right) \hat{R}^{-1}$$

avec $L_{u_z} = \vec{u_z} \wedge \cdot \quad$: él^t de l'alg. de Lie $so(3)$ (générateur)

donc

$$\frac{d\hat{R}}{dt} \cdot \hat{R}^{-1} = \Omega L_{u_z} + \dot{\psi} \hat{R} \underbrace{\left(R_y(-\varepsilon) L_{u_3} R_y(\varepsilon) \right)}_{\left(\cos(-\varepsilon) u_3 + \sin(-\varepsilon) u_x \right)} \hat{R}^{-1} + \dot{\varepsilon} \underbrace{\hat{R} L_{u_y} \hat{R}^{-1}}_{L_{u_y}}$$

$$= \Omega L_{u_z} + \dot{\psi} L_{u_w} + \dot{\varepsilon} L_{u_y}$$

on déduit que

$$\vec{\omega} = \Omega u_z + \dot{\psi} u_w + \dot{\varepsilon} u_y$$

comme annoncé.

(7) Le lagrangien est $L = E_c - \langle U \rangle$.

On calcule l'impulsion

$$p_\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varepsilon}} = I_2 \, \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\varepsilon}} = I_2 \dot{\varepsilon}$$

par ailleurs,

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = I_1 \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \varepsilon} + I_3 \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \varepsilon}$$

$$= +I_1 \dot{\psi}^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon - I_3 (\Omega + \dot{\psi} \cos\varepsilon) \dot{\psi} \sin\varepsilon$$

$$- \frac{\mathcal{G} M_s}{2R^3} (I_x - I_z) \left(\frac{3}{2} \right) 2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon$$

on a $\quad I_1 - I_3 = I_2 - I_x$

L'équation de Euler Lagrange $\frac{d}{dt} p_\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}$ donne donc :

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{I_2}\left(-\left(I_x - I_z\right)\dot{\psi}^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon - I_3 \Omega \dot{\psi} \sin\varepsilon - \frac{3\mathcal{G} M_S}{2R^3}\left(I_x - I_z\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right)$$

(8) On néglige $\dot{\psi}^2 \ll \Omega\dot{\psi}$, et suppose $\dot{\varepsilon} = 0$.

L'équation précédente devient

$$0 = \quad - I_3 \Omega \dot{\psi} \sin\varepsilon - \frac{3\mathcal{G} M_S}{2R^3}\left(I_x - I_z\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{\psi} = -\frac{3\mathcal{G} M_S}{4R^3\Omega}\,\frac{\left(I_x - I_z\right)}{I_x}\cos\varepsilon$$

$\left(\text{car } I_3 = I_x + I_y = 2I_x\right)$.

(9) On a $$\dot{\psi} = -\frac{3\mathcal{G}\cos\varepsilon}{2\,\Omega}\,\frac{\left(R_e - R_p\right)}{R_T}\left(\frac{M_S}{R^3} + \frac{M_L}{R_L^3}\right)$$

effet du Soleil

effet de la Lune

donc $$\Delta R = \frac{2\Omega R_T |\dot{\psi}|}{3\mathcal{G}\cos\varepsilon\left(\frac{M_S}{R^3} + \frac{M_L}{R_L^3}\right)}$$

<u>A. N.</u> : $\left(\frac{M_L}{R_L^3}\right) / \left(\frac{M_S}{R^3}\right) = 2{,}17$ donc la Lune a un effet 2,17 fois plus fort que le Soleil

autrement dit

La Lune contribue pour $\frac{2{,}17}{2{,}17+1} = 68\%$

et le Soleil pour 32 %.

On calcule $\Omega = \frac{2\pi}{1\text{ jour}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{sec}^{-1}$

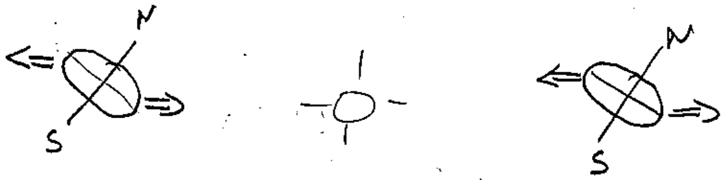
$$\dot{\psi} = -\frac{2\pi}{25785\text{ ans}} = -2{,}820 \cdot 10^{-9}\ \text{sec}^{-1}$$

$\varepsilon = 0{,}4089$ rad

$\Delta R = 20{,}7$ km

Comparable à la valeur observée : $\Delta R = 21{,}4$ km.

(1 bis) D'après la figure (1) le soleil (et la Lune) exercent un couple sur la Terre toujours dans le m̂ sens



d'après la loi $\vec{\dot{\Omega}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\text{Force}}$,

on déduit que cela induit un mouvement de precession dans le sens indirect, cad $\dot{\varphi} < 0$.