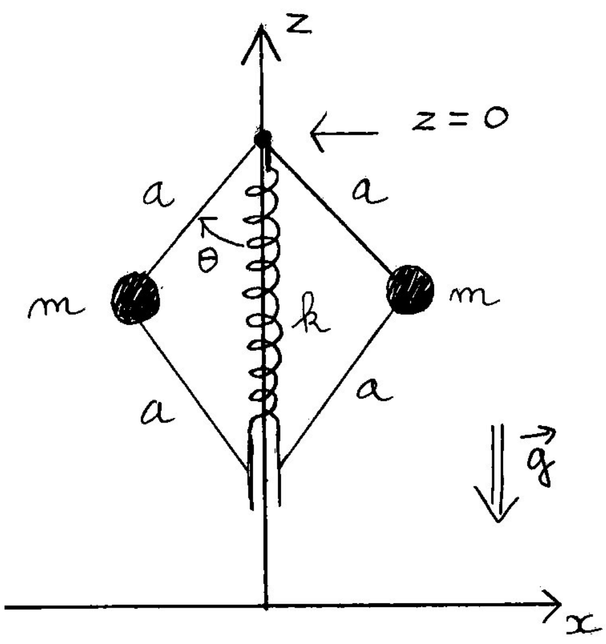
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2010-11
Examen Mécanique Analytique, janvier 2011.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. L'examen est noté sur 20. Le signe ($\star$) signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent.

1 (8) Oscillations d'un système mécanique

On considère le système mécanique représenté sur la figure. Le ressort de raideur k a une longueur nulle au repos. Le point $z = 0$ est fixe, l'autre extrémité du ressort est libre de coulisser sur la tige verticale. Il y a deux masses ponctuelles m aux extrémités de tiges rigides de longueur a, le reste du système est de masse négligeable. Il y a un champ de pesanteur $\vec{g}$. Le système évolue dans le plan (x, z). Sa configuration est caractérisée par l'angle θ.



1. **(2)** Ecrire le Lagrangien $L\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ puis le Hamiltonien $H\left(\theta, p_\theta\right)$ du système.
2. **(3)** Trouver la (les) position(s) d'équilibre θ_0 du système. Discuter selon les valeurs de k. Tracer l'allure de l'énergie potentielle totale $U\left(\theta\right)$.
3. **(3)** Pour les différentes positions d'équilibre trouvées, déterminer la fréquence ω_0 des oscillations autour de cette position (ou le facteur d'instabilité λ_0). Discuter les limites $k \to 0$ et $k \to \infty$.

2 (17) Précession des équinoxes

La terre tourne sur elle-même en 1 jour, et tourne autour du Soleil en 1 an dans le **plan de l'écliptique**. Son **axe de rotation** Sud-Nord est incliné de $\varepsilon = 23^o 26'$ par rapport à l'axe z qui est orthogonal au plan de l'écliptique. Cet angle est responsable du phénomène des saisons. Voir figures 1 et 2. Dans ce problème O est le centre de la Terre. (x, y, z) sont des axes fixes par rapport aux étoiles. (O, X, Y, Z) est un repère fixe par rapport à la Terre où l'axe Z est l'axe de rotation Sud-Nord et $(0, X, Y)$ est le plan de l'équateur. S désigne le Soleil, L est la lune et T est la Terre.

L'axe de rotation Z Sud-Nord n'est pas fixe et bouge lentement par rapport aux étoiles. L'axe Z est repéré dans le repère $(0, x, y, z)$ par ses coordonnées sphériques (ε, ψ). Voir figure 2. L'angle $\varepsilon(t)$ oscille avec une période de 18.6 ans appelée **nutation** et l'angle $\psi(t)$ tourne avec une période de 25785 ans appelée **précession des équinoxes**. Dans ce problème on montre que ces 2 mouvements de l'axe sont dus aux forces gravitationnelles exercées par le Soleil et la Lune sur la Terre, considérée comme un objet de forme **non sphérique** de révolution (en effet la Terre est très légèrement applatie aux poles, c'est donc un phénomène qui se produit sur une échelle de temps très longue).

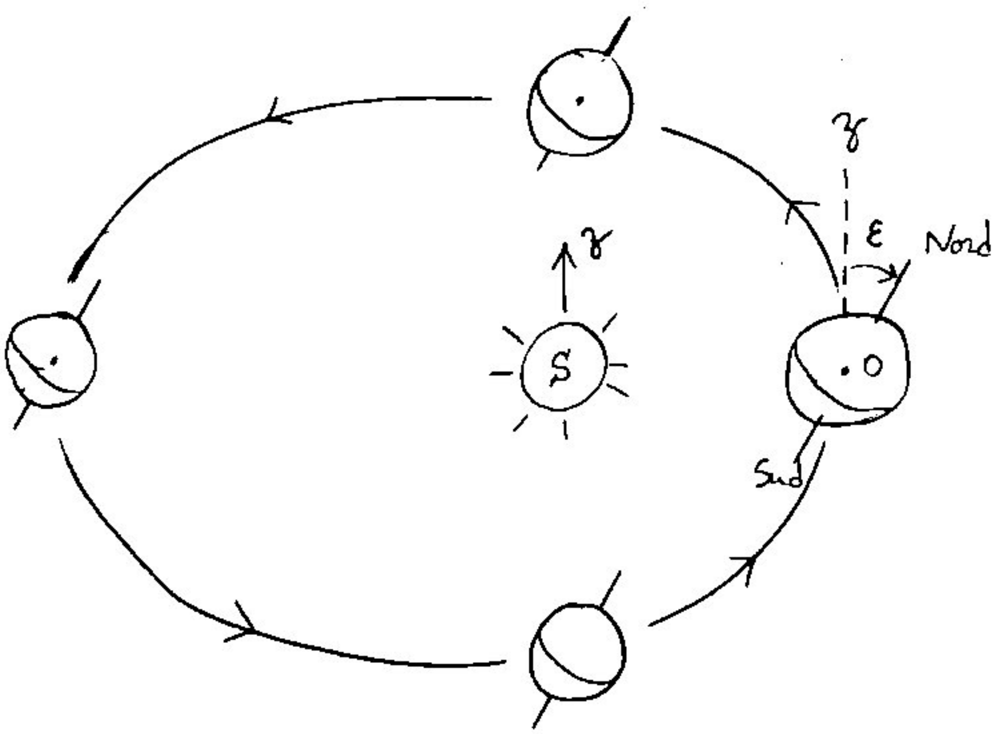
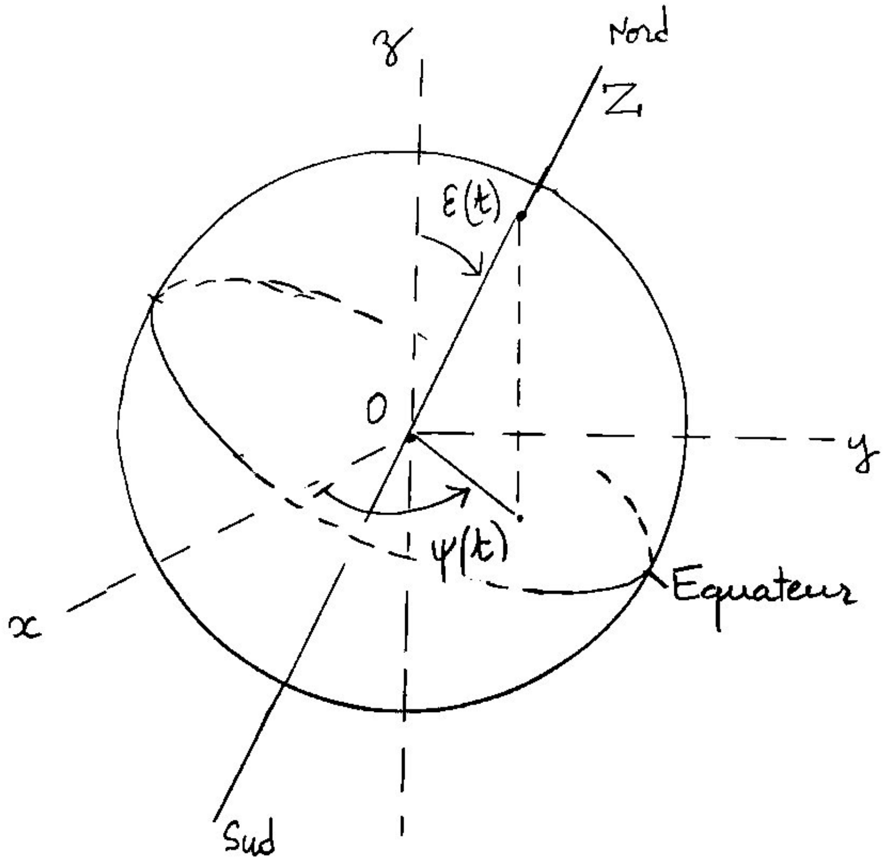


FIGURE 1 – Orbite Terrestre.

Données : $\mathcal{G} = 6,673.10^{-11} Jm/kg^2$. $M_S = 1,989.10^{30} kg$. $M_L = 7,35.10^{22} kg$. $M_T = 5,974.10^{24} kg$. $R_T = 6367\, km$. $R = |SO| = 1,496.10^8 km$. $R_L = |LO| = 3,844.10^5 km$.

Figure 2 – La Terre



1. **(2)** Reproduire la figure 1 et placer les 4 saisons pour l'hémisphère nord : solstice d'hiver et d'été, équinoxes de printemps et d'automne.
2. $(\star)$ **(1)** On considère un petit élément de volume $d^3\vec{x}$ en un point M quelconque dans la Terre. La Terre est supposée homogène de masse volumique μ. On note r la distance $r = \left|\vec{SM}\right|$. Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle dU exercée par le Soleil sur cet élément de volume.
3. $(\star)$ **(3)** On note $R = \left|\vec{SO}\right|$. Montrer que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{x}}{R} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{u}.\vec{x})^2}{R^2} - \frac{\vec{x}^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)$$

où $\vec{u} = \frac{\vec{SO}}{|SO|}$ est un vecteur unitaire et $\vec{x} = \vec{OM}$. Aide : $(1+\alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + o(\alpha^2)$.
4. $(\star)$ **(3)** Les moments d'inertie de la Terre sont définis par $I_X = \int_{Terre} X^2 \mu d^3\vec{x} = I_Y = \int_{Terre} Y^2 \mu d^3\vec{x}$, $I_Z = \int_{Terre} Z^2 \mu d^3\vec{x}$. On note ϕ l'angle entre $\vec{u}$ et l'axe polaire Z.

Montrer que l'énergie potentielle de la Terre $U = \int_{Terre} dU$ est donnée par (Aide : choisir l'axe X tel que $\vec{u}, Z, X$ soient coplanaires) :

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_S}{R}\left(M_T + \frac{1}{2R^2}\left(I_X - I_Z\right)\left(1 - 3\cos^2\phi\right)\right)$$

Faire une remarque sur ce que deviendrait ce résultat si la Terre était sphérique ?

5. ($\star$) **(2)** D'après la théorie de la moyenne, sur une durée très longue par rapport à l'année, la Terre subit une énergie potentielle effective $\langle U\rangle$ qui est U moyennée sur un an. Montrer que

$$\langle U\rangle = -\frac{\mathcal{G}M_S}{R}\left(M_T + \frac{1}{2R^2}\left(I_X - I_Z\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right)\right)$$

6. ($\star$) **(1)** D'après les données du problème, le vecteur rotation instantané de la Terre est $\vec{\omega} = \Omega\vec{u}_Z + \dot{\psi}\vec{u}_W + \dot{\varepsilon}\vec{u}_Y$ où $\Omega = 2\pi/(1jour)$ est la fréquence de rotation de la Terre, $\vec{u}_Z$ est le vecteur unitaire sur l'axe Z, $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$, etc. $\vec{u}_W = \cos(-\varepsilon)\,\vec{u}_Z + \sin(-\varepsilon)\,\vec{u}_X$. Ecrire $\vec{\omega}$ sous la forme $\vec{\omega} = \omega_X\vec{u}_X + \omega_Y\vec{u}_Y + \omega_Z\vec{u}_Z$ en précisant les composantes $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$.

7. **(2)** L'énergie cinétique de rotation de la Terre sur elle-même est

$$E_c = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_X^2 + I_2\omega_Y^2 + I_3\omega_Z^2\right)$$

avec $I_1 = I_Y + I_Z$, $I_2 = I_X + I_Z$, $I_3 = I_X + I_Y$. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = E_c - \langle U\rangle$. A partir de l'équation de mouvement de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varepsilon}$ pour la variable $\varepsilon(t)$, exprimer $\ddot{\varepsilon}$ en fonction de $I_X, I_Z, \varepsilon, \Omega, \dot{\psi}, \mathcal{G}, M_S, R$.

8. **(1)** Pour simplifier, on suppose que ε est constant (pas de nutation) et on néglige $\dot{\psi}$ devant Ω. Déduire que la fréquence de la précession est donnée par

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}M_S\cos\varepsilon}{R^3\Omega}\left(\frac{I_X - I_Z}{I_X}\right) \qquad (1)$$

9. ($\star$) **(2)** La lune L de masse M_L, située à une distance $R_L = |LO|$ de la Terre, tourne aussi dans le plan de l'écliptique (en première approximation) et exerce donc un effet similaire sur la Terre qui s'ajoute à celui du Soleil. Si R_e, R_p désignent respectivement les rayons de la Terre à l'équateur et au pôle, on admettra que $\left(\frac{I_X - I_Z}{I_X}\right) = \frac{2(R_e - R_p)}{R_T}$ (c'est un calcul qui considére la Terre comme un ellipsoide). Déduire de ce qui précède la différence de rayons $\Delta R = R_e - R_p$ responsable du phénomène de precession des équinoxes. Application numérique : donner les contributions relatives du Soleil et de la Lune sur le phénomène de précession des équinoxes. Calculer ΔR et comparer à la valeur mesurée par satellite : $\Delta R = 21,4\text{km}$.