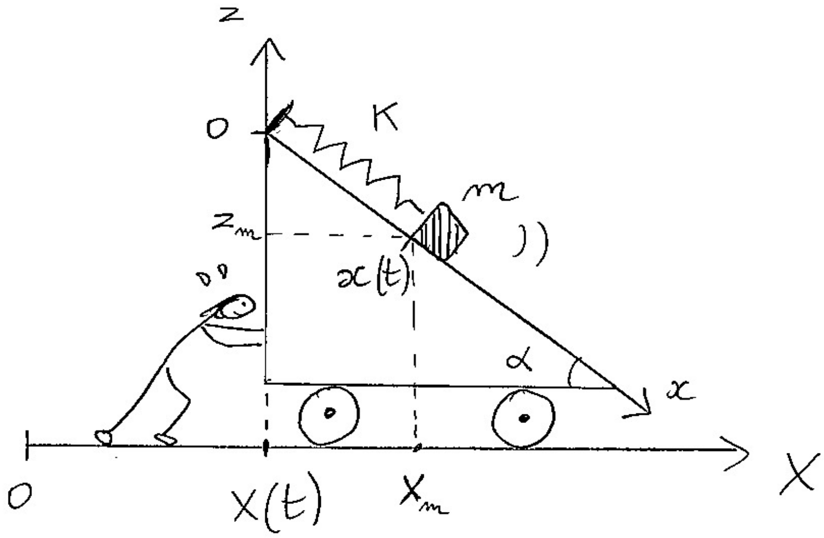
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
Examen Mécanique Analytique, janvier 2012.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. L'examen est noté sur 20. Le signe ($\star$) signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent. **Encadrer les résultats demandés.**

1 Ressort et plan incliné

On considère une masse m glissant sans frottement sur un plan, incliné d'un angle α. Sa position est notée x. La masse m est attachée à un ressort de masse nulle, de raideur K et longueur au repos nulle. Le plan incliné est caractérisé par sa position horizontale $X(t)$ qui est imposée.



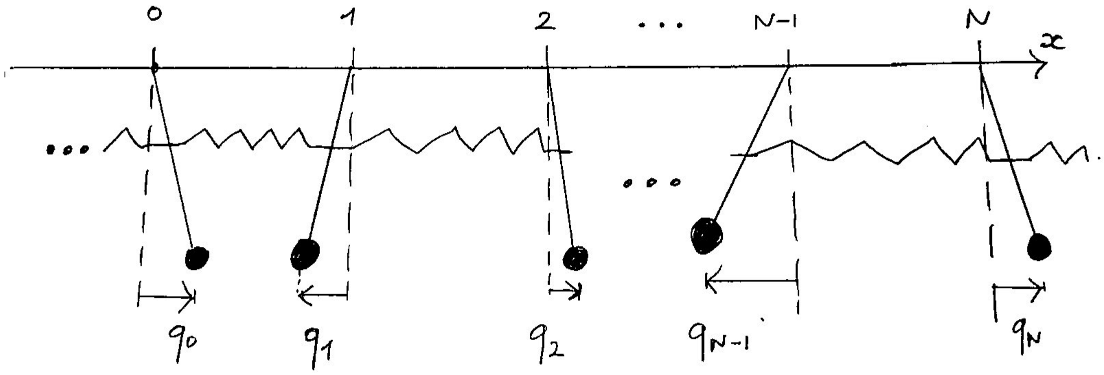
1. ($\star$) (**3**) Ecrire le Lagrangien $L(x, V_x)$ de la masse m, où $V_x = \frac{dx}{dt}$. (Aide : au passage utiliser les variables X_m, z_m indiquées sur la figure).
2. (**2**) Déduire l'impulsion p_x et le Hamiltonien $H(x, p_x)$ où on pourra ne pas écrire les termes indépendants de (x, p_x) qui ne contribueront pas aux équations du mouvement.
3. (**1**) Ecrire les équations de mouvement de Hamilton pour $x(t), p_x(t)$ et montrer que l'on obtient
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$$
avec ω et $f(t)$ que l'on exprimera à partir des données du problème.
4. ($\star$)(**2**) Trouver le mouvement $x(t)$ de la masse dans le cas où on impose un mouvement périodique $X(t) = A\cos(\Omega t) = \mathrm{Re}\left(Ae^{i\Omega t}\right)$. (Si on ne connait pas $f(t)$ on pourra supposer $f(t) = a + b\mathrm{Re}\left(e^{i\Omega t}\right)$)

2 Chaine périodique d'oscillateurs

On considère N particules identiques indicées par $j = 0, 1, \dots (N-1)$ et disposées sur un axe x. On note q_j l'écart de la particule j par rapport à sa position d'équilibre. On suppose que l'ensemble des particules est décrit par le Hamiltonien suivant exprimé avec des variables sans dimension

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} p_j^2 + \frac{1}{2} K q_j^2 + \frac{1}{2} \alpha \left(q_{j+1} - q_j\right)^2 \tag{1}$$

avec des paramètres $K \geq 0$, $\alpha \geq 0$ et des variables canoniques vérifiant [1] $\{q_j, p_k\} = \delta_{j,k}$. On suppose que la chaine est périodique c'est à dire que la particule $N + j$ est identique à la particule j pour tout $j \in \mathbb{N}$, autrement dit $q_N = q_0$, $p_N = p_0$, etc. Le but du problème est de trouver les modes normaux, de décrire le mouvement des oscillations et de montrer qu'à la limite continue ($N \to \infty$) on obtient un modèle d'onde similaire au modèle relativiste de Klein-Gordon.



1. $(\star)$**(1)** Donner le sens physique de chacun des trois termes dans H par rapport à la figure.
2. $(\star)$**(1)** Cette question établie des résultats utiles pour la suite. Si $(X_0, \dots X_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ est un vecteur à N composantes on dit que sa **transformée de Fourier discrète** est le vecteur $(Y_0, \dots Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ obtenu par

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} X_j$$

Montrer la **formule d'inversion de Fourier**

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} Y_k$$

1. rappel : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$.

et la **relation de Parseval** [2]

$$\sum_{k=0}^{N-1} Y_k^* Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} X_j^* X_j$$

Aide : remarquer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \bmod N \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. $(\star)$(**3**) Comme H est invariant par translation, il est naturel de définir de nouvelles variables (complexes) pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ par transformée de Fourier dicrète :

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} q_j, \qquad \pi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} p_j$$

Montrer que

$$H = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(\pi_k^* \pi_k + \omega_k^2 \phi_k^* \phi_k\right)$$

avec une expression de ω_k que l'on donnera en fonction de K, α, k, N. (Aide : on pourra utiliser l'observation que $e^{i2\pi\frac{k}{N}}\phi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi\frac{jk}{N}} q_{j+1}$ et la relation de Parseval pour chacun des 3 termes de H.)

4. (**1**) Tracer le graphe de ω_k en fonction de $k \in \mathbb{N}$ (appelée **"relation de dispersion"**), dans le cas $K > 0$ et dans le cas particulier $K = 0$.

5. $(\star)$(**2**) Pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ on définit des variables complexes

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sigma_k}\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\pi_k\right)$$

où $\sigma_k > 0$, $\sigma_{-k} = \sigma_k$, sera choisi plus loin. Calculer les crochets de Poisson $\{z_k, z_l\}$ et $\{z_k, z_l^*\}$ pour tous $k, l \in \{0, \ldots, N-1\}$.

6. (**1**) On décompose $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iP_k)$ avec des variables réelles X_k, P_k. Déduire de la question précédente les crochets de Poisson $\{X_k, X_l\}$,$\{P_k, P_l\}$ et $\{X_k, P_l\}$ pour tous k, l. Commenter ce résultat.

7. $(\star)$(**2**) Avec un choix de σ_k que l'on précisera montrer que

$$H = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k \frac{1}{2}\left(P_k^2 + X_k^2\right)$$

Commenter. (Aide : on pourra montrer et utiliser $\phi_k^* = \phi_{-k}$, $\pi_k^* = \pi_{-k}$.)

2. On note $z^* = \overline{z}$ le complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$.

8. ($\star$)(**3**) Pour k donné, on appelle **“mode normal** n° k de la chaine” le mouvement où seules les variables (X_k, P_k) sont non nulles.

   (a) Donner l'expression de $z_k(t)$ et déduire $q_j(t)$ pour tout j, qui décrit l'aspect de la chaine. (Aide : remarquer que $\phi_{-k} = \phi_k^*$. Il faut traiter à part les cas $k = 0$ et $k = N/2$).

   (b) Dessiner l'aspect de la chaine, montrer qu'il y a une onde progressive et donner l'expression de sa vitesse de phase et sa longueur d'onde en fonction de ω_k, k et L (qui est la longueur de la chaine).

9. ($\star$)(**3**) On note L la longueur totale de la chaine et $\Delta x = L/N$ l'espace entre deux oscillateurs. On note $(\nabla q)_j = \frac{1}{\Delta x}(q_{j+1} - q_j)$ la “dérivée discrète”.

   (a) Montrer à partir de (1) que les équations de mouvement de Hamilton donnent :

$$\frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} - c^2 (\triangle q)_j + \frac{(Mc^2)^2}{\hbar^2} q_j = 0 \tag{2}$$

   appelée “**équation d'onde relativiste de Klein Gordon**”, avec

$$(\Delta q)_j = \frac{1}{\Delta x}\left((\nabla q)_j - (\nabla q)_{j-1}\right)$$

   appelé “Laplacien discret” et avec des paramètres $c, (M/\hbar)$ que l'on identifiera en fonction des paramètres de départ K, α. (Aide : On montrera que $\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_l (q_{l+1} - q_l)^2 = -2(\Delta x)^2 (\Delta q)_j$).

   (b) Pour justifier cette terminologie, montrer que dans la limite continue où on considère $\Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ alors l'onde plane de De-Broglie $q(x,t) = \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar} + i\frac{px}{\hbar}\right)$ est solution de l'équation (2) à condition que E, p vérifient une équation que l'on écrira.