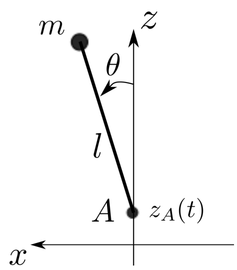
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2010-11
Examen Mécanique Analytique, Controle Continu, octobre 2010.

Durée 1h30. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses.

Le pendule inversé oscillant.

On considère un "pendule" constitué d'une masse m attachée à une tige rigide de longueur l (de masse négligeable) et elle même attachée à un point A. On néglige tous les frottements. On étudie le mouvement de la masse m dans le champ de pesanteur et dans le plan vertical (x, z). On suppose que le point $A(t)$ bouge verticalement en $x = 0$ selon un mouvement imposé et périodique $z_A(t)$. A l'instant initial la masse est très proche de la position verticale ($\theta \ll 1$). Le but du problème est de montrer que cette position verticale est stable sous certaines conditions.



1. **(4)** Exprimer x, z en fonction de $l, \theta, z_A(t)$ puis l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique E_c du pendule en fonction de $m, g, l, \theta(t), z_A(t)$. Déduire l'expression du Lagrangien $L(\theta, V, t) = E_c - U$ avec $V \equiv \frac{d\theta}{dt}$.
2. **(5)** Déduire l'expression de l'impulsion $p = \frac{\partial L}{\partial V}$ et du Hamiltonien $H(\theta, p, t) = pV - L$.
3. **(1)** Ecrire les équations de mouvement de Hamilton qui expriment $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{dp}{dt}$ en fonction de $\theta(t), p(t), m, g, l, \dot{z}$ où $\dot{z} \equiv \frac{dz_A(t)}{dt}$.
4. **(3)** Linéariser les équations précédentes en ne gardant que les termes du premiers ordre en θ, p. Poser $X(t) = (\theta(t), p(t))$ et montrer que les équations de mouvement linéarisées s'écrivent sous la forme $\frac{dX}{dt} = A(t) X(t)$ avec une matrice $A(t)$ que l'on explicitera. Par quelle propriété simple de cette matrice s'exprime le théorème de Liouville sur la conservation du volume dans l'espace de phase ?
5. **(5)** Pour simplifier l'écriture on fait le changement de variable

$$z \to \tilde{z} = \frac{z}{l}, \qquad p \to \tilde{p} = \frac{p}{m g^{1/2} l^{3/2}} \quad t \to \tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{l/g}}$$

quelles sont les unités physiques des nouvelles variables ? Pour simplifier, on décide de noter encore z, p, t ces nouvelles variables (sans tilde). Montrer que les équations de mouvement linéarisées s'écrivent $\frac{dX}{dt} = A(t) X(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dot{z} & 1 \\ 1 - (\dot{z})^2 & -\dot{z} \end{pmatrix}$$

6. **(5)** On suppose que mouvement périodique du point A est sous forme "triangle" c'est à dire tel que $\dot{z} = V$ pour $t \in I_1 = [0, \tau[$ et $\dot{z} = -V$ pour $t \in I_2 = [\tau, 2\tau[$ avec $V \geq 0$ une vitesse constante. (A l'aide des rappels ci-dessous) diagonaliser la matrice $A_1 = A = PDP^{-1}$ dans l'intervalle de temps I_1 et déduire l'expression de la matrice $M_1 = \exp(\tau A_1) = Pe^{\tau D}P^{-1}$ pour la valeur $\tau = \log 2$. De même déduire l'expression de la matrice $M_2 = \exp(\tau A_2) = Pe^{\tau D}P^{-1}$ dans l'intervalle de temps I_2. Déduire alors la matrice $M = M_2 M_1$ qui exprime le mouvement du point sur une période $t = 0 \to 2\tau$:
$$\begin{pmatrix} \theta(2\tau) \\ p(2\tau) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \theta(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$
7. **(2)** On rappelle qu'une matrice M de taille 2×2, telle que $\det(M) = 1$ est dite **elliptique et décrit un mouvement stable**[1] si $|\mathrm{Tr}(M)| < 2$ et est dite **hyperbolique et décrit un mouvement instable** si $|\mathrm{Tr}(M)| > 2$. Dans le cas présent discuter la stabilité du point fixe $(\theta, p) = (0, 0)$ selon la valeur de V.

Rappels

Diagonalisation d'une matrice 2×2 : On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice A se diagonalise :
$$A = PDP^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} a - d + \sqrt{\Delta} & a - d - \sqrt{\Delta} \\ 2c & 2c \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix},$$
avec
$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc$$
Remarque : la matrice P contient les vecteurs propres en colonne, et ils sont définis à la multiplication près par un nombre.

Inverse d'une matrice 2×2 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Det}(A) = ad - bc \neq 0$ alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Pour vraiment avoir une stabilité il faut supposer qu'il y a une légère dissipation ou que $z_A(t)$ est C^∞ pour invoquer le théorème KAM.