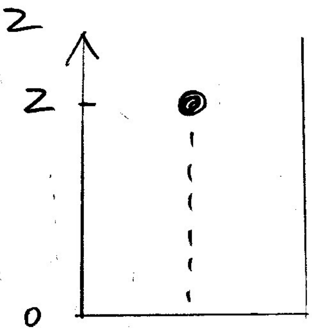
Balle dans un ascenseur

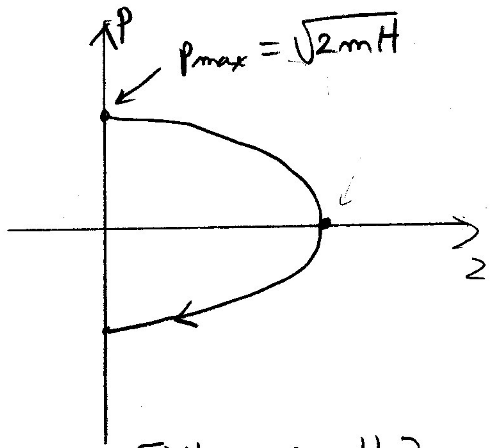


(1) $$H(z,p) = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

: balle dans ascenseur immobile.

La trajectoire d'énergie H fixée, $H = \frac{p^2}{2m} + mgz$

est une parabole dans l'espace de phase (z,p)



de Surface : $$S = \int_{-p_{max}}^{p_{max}} z\, dp$$

$$= 2\int_0^{p_{max}} \left(H - \frac{p^2}{2m}\right)\frac{1}{mg}\, dp$$

$$= \frac{2H}{mg} p_{max} - \frac{1}{m^2 g}\frac{p_{max}^3}{3} = p_{max} \cdot \left[\frac{2H}{mg} - \frac{2mH}{3m^2 g}\right]$$

$$= \frac{2H\, p_{max}}{mg}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8\, H^{3/2}\sqrt{2m}}{3mg}$$

l'action est $$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}\; H^{3/2}}{3\pi\sqrt{m}\; g}$$

donc $$H = \left(\frac{3\pi\sqrt{m}\, g}{4\sqrt{2}}\, I\right)^{2/3}$$

(2) Si l'ascenseur a une accélération $a(t)$, alors le Hamiltonien devient : $$H(z,p,t) = \frac{p^2}{2m} + m\big(g + a(t)\big) z$$ (peut se justifier avec l'approche Lagrangienne)

si $a(t)$ varie lentement, alors I est un invariant adiabatique

et d'après ci dessus : $$H(t) = \left(\frac{3\pi\sqrt{m}\,(g + a(t))}{4\sqrt{2}}\; I\right)^{2/3}$$

③ on a $H = m\,(g + a(t))\cdot z_{max}(t)$

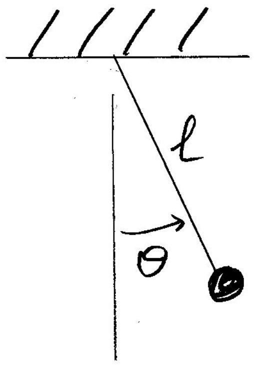
donc $z_{max}(t) = \dfrac{H(t)}{m\,(g+a(t))} = \left(\dfrac{3\pi\, I}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3} \dfrac{1}{(g+a(t))^{1/3}\; m^{2/3}}$

donc

$$z_{max}(t) = z_{max}(0)\cdot\left(\frac{g}{g+a(t)}\right)^{1/3}$$

(car $a(0)=0$).

Pendule dont la longueur varie



1) avec la variable de position θ,

- énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m |V|^2$

avec $|V|^2 = (\ell \dot{\theta})^2 = (\ell V_\theta)^2$

- énergie potentielle de pesanteur : $U = mgz$
$$= -mg\ell\cos(\theta)$$

donc Lagrangien :
$$L(\theta, V_\theta) = E_c - U = \frac{1}{2} m \ell^2 V_\theta^2 + mg\ell\cos(\theta)$$

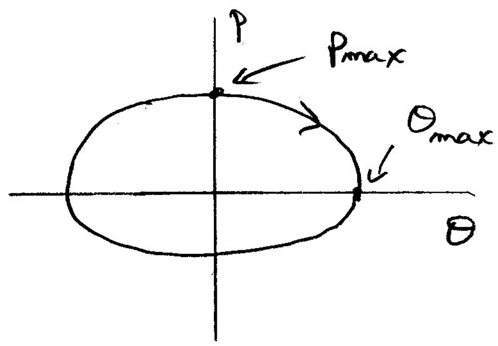
impulsion : $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial V_\theta} = m\ell^2 V_\theta \iff V_\theta = \frac{p_\theta}{m\ell^2}$

Hamiltonien : $H(\theta, p_\theta) = p_\theta \cdot V_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{m\ell^2} - \frac{1}{2} m\ell^2 \frac{p_\theta^2}{(m\ell^2)^2} - mg\ell\cos(\theta)$
$$= \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos(\theta)$$

2) si $\theta \ll 1$, alors $\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4)$

donc
$$H(\theta, p) \simeq \underbrace{\frac{p^2}{2m\ell^2} + \frac{1}{2} mg\ell\theta^2}_{\text{"modèle de l'oscillateur harmonique"}} + \text{cste}$$

Dans l'espace de phase, les trajectoires sont sur des ellipses, de surface :



$$S = \pi\,\theta_{max}\,p_{max}$$
$$= \pi\sqrt{\frac{2H}{mg\ell}} \cdot \sqrt{2m\ell^2 H}$$
$$= 2\pi H\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

L'action est donc $I = \frac{1}{2\pi} S = H \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$\leftrightarrow \quad H(I) = \omega \cdot I \quad$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$: fréquence.

car $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega$

③ D'après le théorème adiabatique, $I(t)$ est un invariant adiabatique, donc varie peu : $I(t) \simeq I(0) = $ cste.

donc $H(t) = \omega(t) \cdot I \quad$ avec $\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{\ell(t)}}$

④ D'après (2), $\quad \theta_{max}(t) = \sqrt{\frac{2H}{mg\ell}} = \sqrt{\frac{2\,\omega(t) \cdot I}{mg\,\ell(t)}}$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{2I}{m}}}_{\text{cste}} \cdot \frac{1}{(\ell(t))^{3/4}}$$

donc $\quad \theta_{max}(t) = \theta_{max}(0) \cdot \left(\frac{\ell(0)}{\ell(t)}\right)^{3/4}$