Particule chargée en champ magnétique

① on a
$$\vec{Rot}\,\vec{A} = \begin{cases} \partial_y A_z - \partial_z A_y & = 0 \\ \partial_z A - \partial_x A_z & = 0 \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x & = B \end{cases} = \vec{B}$$

d'après le cours,
$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} \left| \vec{p} - e\vec{A} \right|^2$$
$$= \frac{1}{2m}\left((p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2m}\left(\left(p_x + \frac{e}{2}By\right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{2}Bx\right)^2 + (p_z)^2 \right)$$

② $$\{Q, P\} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial p_x} - \frac{\partial Q}{\partial p_x}\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial p_y} - \frac{\partial Q}{\partial p_y}\frac{\partial P}{\partial y} \right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{eB}}\frac{1}{\sqrt{eB}}\left(-\frac{eB}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{eB}}\frac{eB}{2}\frac{1}{\sqrt{eB}}$$
$$= 1$$

autre méthode:
$$\{Q, p\} = \frac{1}{\sqrt{eB}}\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\{p_x, x\}}_{(-1)} - \frac{1}{\sqrt{eB}}\left(\frac{eB}{2}\right)\left(\frac{1}{eB}\right)\underbrace{\{y, p_y\}}_{1}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{eB}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{eB}} = 0$$

de même
$$\{q, p\} = 1$$

et autres crochets nuls.

donc ce sont des variables canoniques.

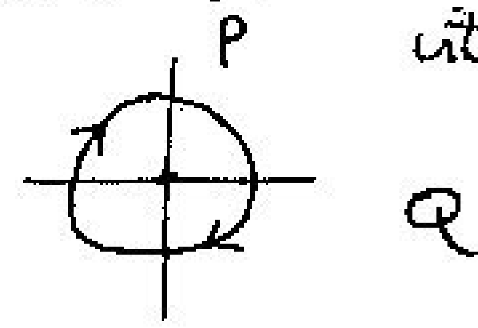
(3) D'après 1 et 2,

$$H = \frac{1}{2m}\left((eB)\,Q^2 + (eB)\,P^2 + p_z^2\right)$$

$$= \underbrace{\omega\,\frac{1}{2}\left(P^2+Q^2\right)}_{\text{"oscillateur harmonique"}} + \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{\text{particule libre en } z.}$$

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega P \\[2mm] \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = -\omega Q \end{cases} \longrightarrow$$

$Q(t)$, $P(t)$ tournent à la vitesse angulaire ω



sens indirect si $\omega > 0$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m}\,p_z = \text{cste} = v_z \longrightarrow z(t) = v_z \cdot t + z(0)$$

translation

les autres variables $q(t)$, $p(t)$, $p_z(t)$ sont constantes.

D'après (2), on revient aux variables :

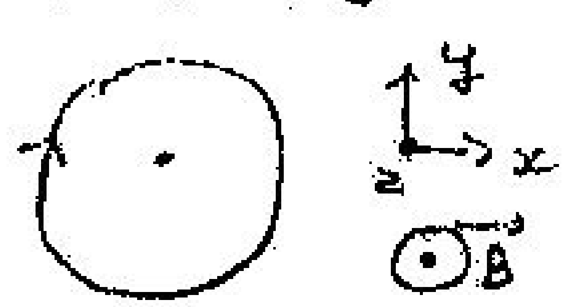
$$x = -p - \frac{1}{\sqrt{eB}}\,P$$

$$p_x = \frac{eB}{2}\,q + \frac{1}{2}\sqrt{eB}\,Q$$

$$y = -q + \frac{1}{\sqrt{eB}}\,Q$$

$$p_y = -\frac{eB}{2}\,p + \frac{1}{2}\sqrt{eB}\,P$$

On déduit que les trajectoires $x(t)$ $y(t)$ forment des cercles de même vitesse angulaire, même sens (conformément à la force de Lorentz $e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$)



si $e<0$, la particule tourne dans l'autre sens.

$(-p, -q)$ est le centre du cercle (cstes).

Modes normaux d'oscillations

① $$H = \underbrace{\frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right)}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2}_{\text{énergie potentielle d'oscillation}} + \frac{1}{2}\alpha\underbrace{(q_1-q_2)^2}_{\text{énergie pot. d'interaction (couplage)}}$$

α correspond à la "constante de raideur".

On a utilisé l'hypothèse des petites oscillations $|q_1| \ll 1$, $|q_2| \ll 1$, pour négliger les termes de degrés $\geqslant 3$ dans U.

② $$\{Q_1, P_1\} = \frac{1}{2}\{q_1, p_1\} + \frac{1}{2}\{q_2, p_2\} = 1$$
$$\{Q_2, P_2\} = \frac{1}{2}\{q_1, p_1\} - \frac{1}{2}\{q_2, p_2\} = 0$$

etc...

On a des variables canoniques.

inversement,
$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2)$$
$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$
$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_2)$$
$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 - P_2)$$

$$H = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + U$$

$$U = \frac{1}{4}\left(Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 + Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\right) + \alpha Q_2^2$$
$$= \frac{1}{2}Q_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)Q_2^2$$

: somme de carrés $\to$ "diagonalisée"

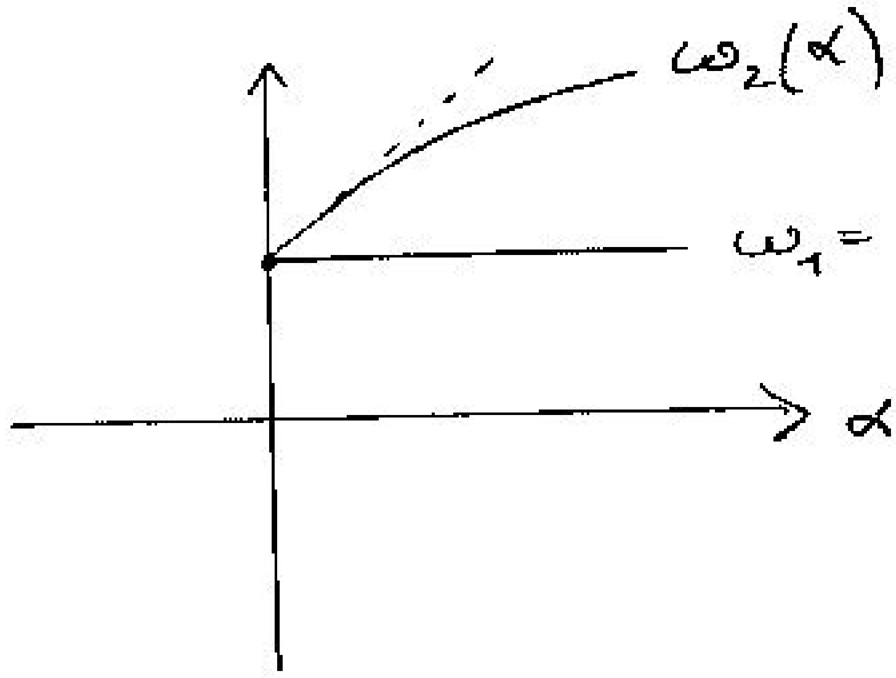
(3) $H(Q_1, P_1, Q_2, P_2) = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + Q_1^2\right)$

$$+ \frac{1}{2} P_2^2 + \left(\frac{1}{2}+\alpha\right) Q_2^2$$

ce sont deux "oscillateurs harmoniques" découplés.

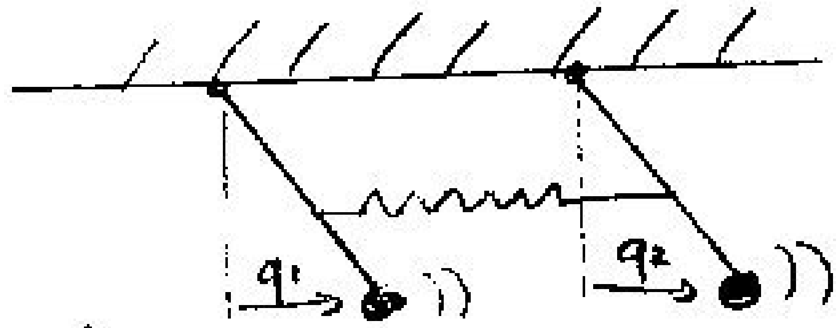
de fréquence $\begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \omega_2 = \text{"}\sqrt{\frac{K}{m}}\text{"} \\ \quad = \sqrt{1+2\alpha} \end{cases}$ (pour $\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} K Q^2$) d'après le cours, ici $m = 1$, $K = 1+2\alpha$

pour $\alpha \ll 1$, $\omega_2(\alpha) = (1+2\alpha)^{1/2} \simeq 1 + \alpha + O(\alpha^2) \geqslant \omega_1$



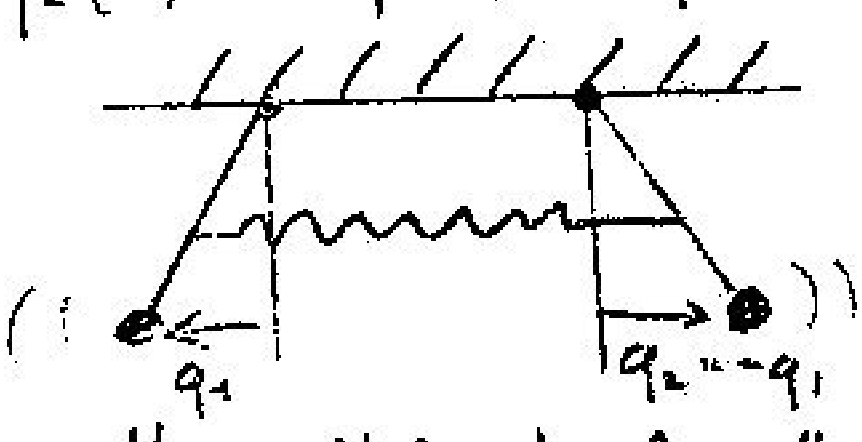
(4) • si $Q_2 = P_2 = 0$, alors $q_1(t) = q_2(t)$ et $p_1(t) = p_2(t)$

seul le 1er mode oscille à la fréquence $\omega_1 = 1$



oscillateurs en "phase" à ω_1

• si $Q_1 = P_1 = 0$, seul le 2ème mode oscille, fréquence $\omega_2 > 1$. Alors $q_2(t) = -q_1(t)$, $p_2(t) = -p_1(t)$



"opposition de phase"