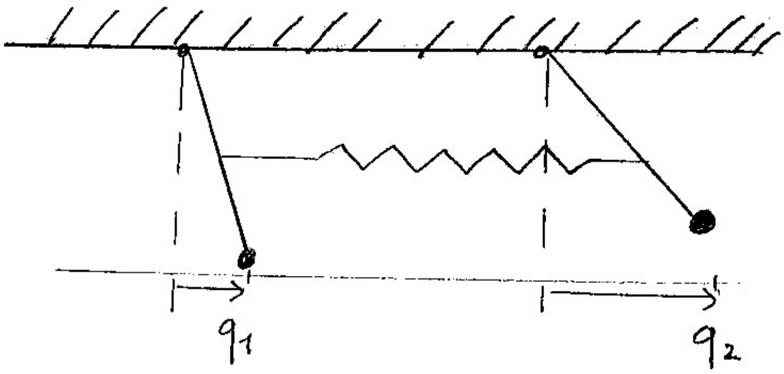
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2010-11
TD de Mécanique Analytique

TD n°8
Transformations canoniques.

Exercise 1. Modes normaux d 'oscillations

On considère deux pendules identiques reliés entre eux. Voir figure.



La position des pendules est notée q_1, q_2 respectivement, et l'on suppose que $q_1 = 0$, et $q_2 = 0$ est la position d'équilibre stable. On s'intéresse aux petites oscillations, c'est à dire $q_1, q_2 \ll 1$. Le Hamiltonien est (dans des variables sans unité)

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + U(q_1, q_2)$$

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{2}\alpha(q_1 - q_2)^2, \qquad \alpha \geq 0$$

1. Commenter le sens physique de chaque terme. Où est intervenue l'hypothèse des petites oscillations ?
2. D'après la théorie mathématique des formes quadratiques, il existe une transformation linéaire orthogonale qui "diagonalise" la forme quadratique U et par conséquent H. Soit la transformation de variables :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2), \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) \\ Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2), \qquad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) \end{aligned}$$

Montrer que (Q_1, P_1, Q_2, P_2) sont des variables canoniques. Exprimer l'énergie potentielle U puis le Hamiltonien H dans ces nouvelles variables.

3. Déduire que le problème est constitué de deux oscillateurs harmoniques découplés, appelés **modes normaux**. Trouver leur fréquence respective $\omega_1(\alpha), \omega_2(\alpha)$ et les tracer en fonction de α.
4. On étudie le premier mode (en supposant que le deuxième mode est au repos $Q_2 = 0, P_2 = 0$) : décrire le mouvement $q_1(t), q_2(t)$ des pendules. De même pour le deuxième mode.
5. **(Optionnel)** On suppose que à $t = 0$, le pendule 2 est immobile $q_2 = 0$, $p_2 = 0$. Décrire le mouvement des pendules $q_1(t), q_2(t)$. Dans le cas d'un couplage faible $\alpha \ll 1$, cela s'appelle "effet de résonance" et est similaire à l'effet tunnel en mécanique quantique.

Exercise 2. Particule en champ magnétique

On considère une particule de charge e (un proton par exemple) de masse m dans un champ magnétique uniforme et constant B selon l'axe z : $\vec{B} = (0, 0, B)$ (on négligera les forces autres que la force de Lorentz).

1. Montrer que
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right)$$
est une expression possible pour le potentiel vecteur, appelée "Jauge symétrique", et que le potential scalaire est $\phi = 0$. Écrire (sans développer) le Hamiltonien de la particule $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$.
2. On propose d'effectuer le changement de variables suivant $(x, p_x, y, p_y) \to (Q, P, q, p)$:
$$\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt{eB}}\left(p_x + \frac{eB}{2}y\right) \\ P = \frac{1}{\sqrt{eB}}\left(p_y - \frac{eB}{2}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{eB}}\left(p_x - \frac{eB}{2}y\right) \\ p = -\frac{1}{\sqrt{eB}}\left(p_y + \frac{eB}{2}x\right) \end{cases},$$
Calculer les crochets de Poisson des fonctions (Q, P, q, p) deux à deux, pour vérifier que ce sont bien des variables canoniques.
3. En introduisant la fréquence cyclotron $\omega = eB/m$, donner l'expression de H en fonction des nouvelles variables (Q, P, q, p, z, p_z). Quel modèle standard de dynamique obtient t-on ?
4. Ecrire les équations de mouvement de Hamilton pour ces nouvelles variables canoniques et déduire l'allure des trajectoires en variables (Q, P, q, p, z, p_z) puis en variables (x, y, z, p_x, p_y, p_z). Que se passe t-il si la charge e est négative (électron par exemple) ?