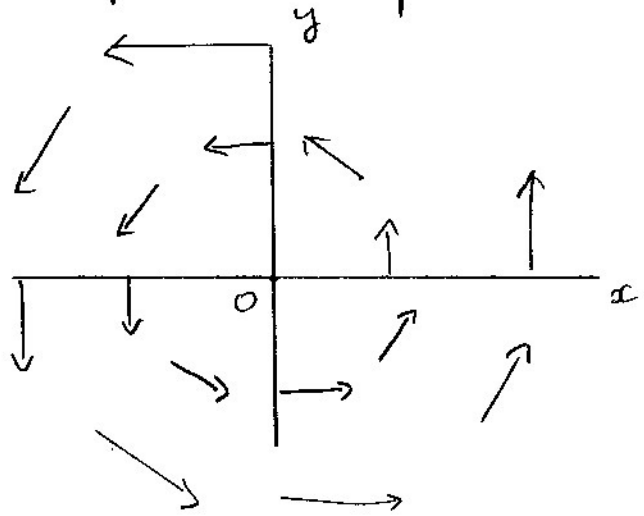
Champ de Vecteur et flot

(1) C'est un champ de vecteur qui tourne :



on écrit

$$V = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$$

car $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$

$$= \omega \left(- r \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$= V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y}$$

avec $\begin{cases} V^x = -(r\sin\theta)\omega = -y \cdot \omega \\ V^y = (r\cos\theta)\omega = x\,\omega \end{cases}$

de même :

$$V = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} \right)$$

car $z = re^{i\theta}$
$\bar{z} = re^{-i\theta}$

$$= \omega \left(i r e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial z} - i r e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$= V^z \cdot \frac{\partial}{\partial z} + V^{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

avec $V^z = i r e^{i\theta} \omega = i z \omega$, $\quad V^{\bar{z}} = \overline{V^z} = -i\omega \bar{z}$

(2) en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = V^\theta = \omega \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = V^r = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta(t) = \theta(0) + \omega t \\ r(t) = r(0) \end{cases}$$

(facile à résoudre)

en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V^x = -\omega \cdot y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = V^y = \omega x \end{cases}$$

: + compliqué à résoudre

en coordonnées complexes :

$$\frac{dz}{dt} = V^z = (i\omega) z \longrightarrow z(t) = z(0) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = V^{\bar{z}} = (-i\omega)\bar{z}$$

facile à résoudre.

en coordonnées polaires le flot est :

$$\phi_t : \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \theta(t) = \theta(0) + \omega t \\ r(t) = r(0) \end{cases}$$

c'est une rotation de vitesse angulaire ω.

(3) $f_t(X) = f(\phi_{-t}(X))$ donc en coordonnées polaires :

$$f_t(r,\theta) = f(r, \theta - \omega t)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-\omega t)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \qquad \text{(Taylor en } t=0\text{)}$$

$$= \exp\left(-(\omega t)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) f = e^{-tV} f$$

avec $V = -\omega \dfrac{\partial}{\partial \theta}$

4 on a vu que en 1 $V = V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y}$

$$= \omega \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$= i\omega \left(-y (-i) \frac{\partial}{\partial x} + x (-i) \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$= i\omega \left(x \hat{p}_y - y \hat{p}_x \right)$$

$\boxed{\text{Groupe et algèbre de rotations}}$ (suite)

1 On peut choisir les axes tels que la rotation est autour de z, donc $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

à l'exercice 1, question 4, on a montré que le champs de vecteur est alors (cas $\omega = 1$ et $t = \alpha$)

$$V_{\vec{u}} = i \left(x \hat{p}_y - y \hat{p}_x \right)$$

dans ce cas on a bien :

$$i \left(\vec{L} \cdot \vec{u} \right) = i L_z = i \left(x p_y - y p_x \right) = V_{\vec{u}}$$

L'opérateur de transfert est (voir cours)

$$R_{\alpha, \vec{u}} = e^{-\alpha V_{\vec{u}}} = e^{-i\alpha (\vec{L} \cdot \vec{u})}$$

(2) $$L_x = y\,p_z - z\,p_y = (-i)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y = z\,p_x - x\,p_z = (-i)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

si $f(x,y,z)$ est une fonction, alors :

$$L_x\left(L_y(f)\right) = (-1)\left[y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial f}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial f}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial f}{\partial x}\right) + z\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

$$= (-1)\left[y\frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - yx\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right]$$

de même

$$L_y\left(L_x(f)\right) = (-1)\left[x\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right]$$

donc

$$[L_x, L_y]f = L_x\left(L_y(f)\right) - L_y\left(L_x(f)\right)$$

$$= (-1)\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= i\left(x(-i)\frac{\partial f}{\partial y} - y(-i)\frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\,L_z(f)$$

- On note : $(1,2,3) = (x,y,z)$.

alors $$[V_{\vec{U}}, V_{\vec{W}}] = [i(\vec{L}\cdot\vec{U}),\, i(\vec{L}\cdot\vec{W})] = -[\vec{L}\cdot\vec{U}, \vec{L}\cdot\vec{W}]$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{3}[L_i\cdot U^i, L_j\cdot W^j] = -\sum_{i,j=1}^{3} U^i W^j [L_i, L_j]$$

or $[L_i, L_j] = i\sum_k \varepsilon_{ij}^k L_k$,

et $(\vec{U}\wedge\vec{W})^k = \left(\sum_{i,j} U^i W^j \varepsilon_{ij}^k\right)$

$$= -i\sum_k\left(\sum_{i,j} U^i W^j \varepsilon_{ij}^k\right)L_k$$

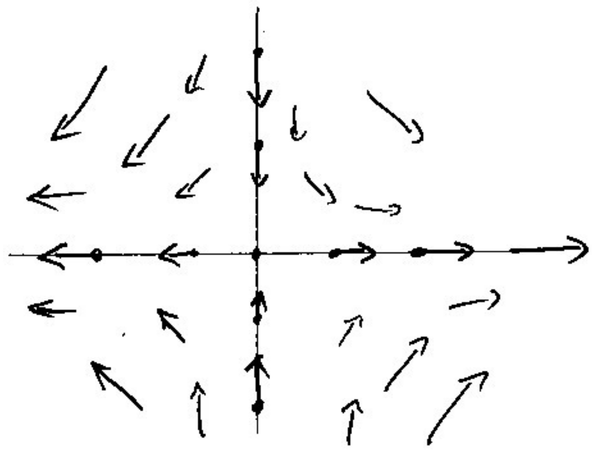
$$= -i\,(\vec{U}\wedge\vec{W})\cdot\vec{L}$$

$$= -V_{\vec{U}\wedge\vec{W}}$$

Champ de Vecteurs et flots

Soit $V = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$

cad composantes $\begin{cases} V^x = x \\ V^y = -y \end{cases}$

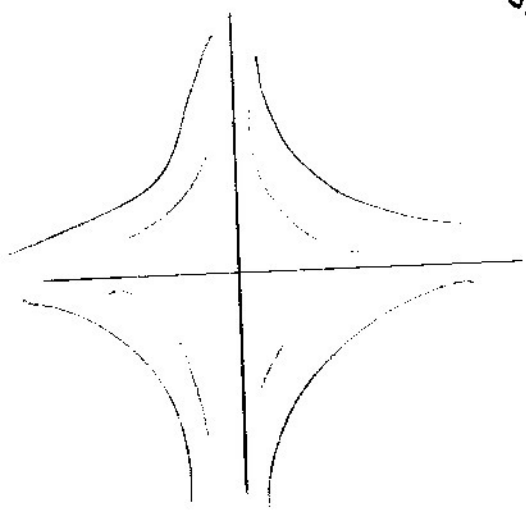


équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V^x = x \\ \frac{dy}{dt} = V^y = -y \end{cases}$$

$\rightarrow$ flot : $\phi_t : \begin{cases} x \\ y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = x \cdot e^{t} \\ y(t) = y \cdot e^{-t} \end{cases}$

on a $\underbrace{x(t)\,y(t) = x(0)\,y(0)}_{= \text{cste}/t}$ donc les trajectoires sont des hyperboles



$\boxed{\text{Exercice crochets de Poisson :}}$ voir notes de cours