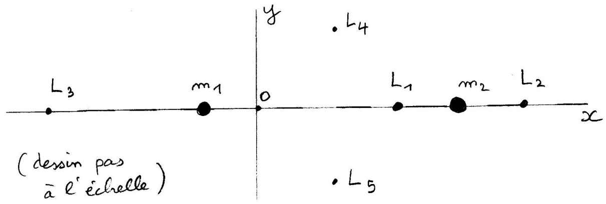
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
TD de Mécanique Analytique

TD n°7
Le problème à 3 corps restreint. Les points de Lagrange.

Références : *Wikipedia "Point de Lagrange". Livre de Mayer. "Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem", Springer 2000.*

On considère deux astres lourds 1 et 2 de masse respectives $m_1 \geq m_2$ que l'on suppose être en orbite circulaire l'un autour de l'autre. (Par exemple le système Soleil-Terre ou Soleil-Jupiter). On souhaite alors décrire la dynamique d'un troisième objet 3 très léger (de masse $m \ll m_1, m_2$) qui n'influence donc pas le mouvement de 1 et 2 mais qui en revanche est soumis aux forces gravitationnelles de 1 et 2. L'objet 3 est par exemple un satellite ou un astéroide. En particulier en va chercher les **"points de Lagrange"**[1] L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 qui sont les points d'équilibre (stables ou instables) pour 3.



1. On considère deux objets 1 et 2, ponctuels de masse m_1, m_2 aux positions respectives $\vec{X}_1, \vec{X}_2 \in \mathbb{R}^3$. L'énergie potentielle d'interaction $U\left(\left|\vec{X}_2 - \vec{X}_1\right|\right)$ ne dépend que de la distance $\left|\vec{X}_2 - \vec{X}_1\right|$. Ecrire le Lagrangien $L\left(\vec{X}_1\vec{X}_2, \dot{\vec{X}}_1\dot{\vec{X}}_2\right)$. On suppose que le barycentre est à l'origine :$m_1\vec{X}_1 + m_2\vec{X}_2 = \vec{0}$. On définit la position relative :
$$\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$$
Montrer que le Lagrangien devient
$$L\left(\vec{X}, \dot{\vec{X}}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\vec{X}}\right)^2 - U\left(\left|\vec{X}\right|\right)$$
avec la **masse réduite** $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. On est donc ramené à étudier l'évolution de $\vec{X}(t)$.
2. Les deux objets 1et 2 interagissent par l'interaction gravitationelle d'énergie potentielle $U\left(\vec{X}\right) = -\frac{m_1 m_2 \mathcal{G}}{\left|\vec{X}\right|}$. On suppose que les deux objets sont en **orbite circulaire** à une distance $\left|\vec{X}\right| = R$. Montrer que les deux objets tournent dans un plan à vitesse angulaire Ω constante donnée par (3ème loi de Kepler)
$$\Omega^2 = \mathcal{G}\frac{(m_1 + m_2)}{R^3}$$
(Aide :Utiliser le TD6, exercice 1, question 4, en cherchant le minimum du potentiel effectif $\tilde{U}$ et mettant la masse réduite μ à la place de la masse inertielle).

---

1. Pour le système Soleil-Jupiter il y a des astéroides aux points stables L_4 et L_5 appelés **troyens** (Achille et Hector furent respectivement les premiers à être découverts en 1906 et 1907, soit près de 130 ans après les prédictions de Joseph Lagrange). Pour le système Soleil-Mars, les premiers troyens furent découverts en 1990. Le troyen de Soleil-Neptune a été découvert en 2001. Concernant le système Soleil-Terre, les astronomes ont placé le satellite d'observation solaire SOHO au point L_1 et les satellites d'observation du cosmos PLANCK, HERSCHEL et GAIA au point L_2. En 2010 il a été découvert le premier astéroide troyen de la Terre près du point L_4, appelé $2010 - TK_7$. Il mesure 300m.

3. On souhaite décrire le mouvement d'un objet 3 de masse $m \ll m_1, m_2$ dans le plan de l'orbite des objets 1 et 2. Pour simplifier, dans le plan de l'orbite, on considère le référentiel tournant de fréquence Ω dont l'origine est 0, l'axe x est de 1 vers 2, voir figure. Pour simplifier, on fait un choix convenable d'unité de temps et de distance tel que $\Omega = 1$, $R = 1$ et $m = 1$. Montrer que en coordonnées cartésiennes l'objet 1 est en $(x_1, y_1) = (-\nu, 0)$, l'objet 2 en $(x_2, y_2) = (1-\nu, 0)$ et que le Hamiltonien décrivant la dynamique de l'objet 3 dans ce référentiel tournant est

$$H(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + (p_x y - p_y x) - \left(\frac{1-\nu}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right),$$

$$\text{avec } R_1^2 = (x+\nu)^2 + y^2, \qquad R_2^2 = (x+\nu-1)^2 + y^2, \qquad \nu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

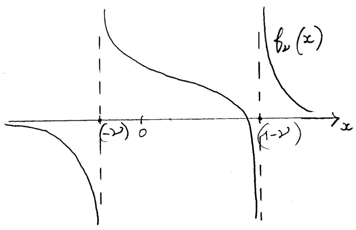
Aide : voir problème 2 de l'examen mi-parcourt 2009, passer en coordonnées polaires, et utiliser le changement de coordonnées canoniques $x = r\cos\theta$,$y = r\sin\theta$,$p_r = \frac{1}{r}(xp_x + yp_y)$,$p_\theta = xp_y - yp_x$.

4. Ecrire les équation de mouvement de Hamilton et montrer que **les points fixes** ($\dot{x} = \dot{p}_x = \dot{y} = \dot{p}_y = 0$) sont déterminés par les équations :

$$x = \frac{(1-\nu)(x+\nu)}{R_1^3} + \frac{\nu(x+\nu-1)}{R_2^3}, \qquad y = y\left(\frac{1-\nu}{R_1^3} + \frac{\nu}{R_2^3}\right) \tag{1}$$

(Attention à ne pas partir dans des calculs trop compliqués ; différencier R_1^2 et R_2^2.)

5. Pour résoudre ces équations, supposer $y = 0$. L'équation (1) est de la forme $x = f_\nu(x)$ avec f_ν qui a l'allure suivante. Déduire graphiquement trois solutions[2] L_3, L_1, L_2.



6. Si $y \neq 0$, montrer que les équations (1) donnent deux solutions[3] L_4, L_5 de coordonnées $x = \frac{1}{2} - \nu$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. (Option). En supposant $m_2 \ll m_1$ donner des expressions au premier ordre en ν pour les coordonnées des points L_1, L_2, L_3. Application : a quelle distance de la Terre sont les points L_1 et L_2 ? (on peut montrer que le coef de Lyapounov de L_1, L_2 est $\tau \simeq 23$ jours et $\tau = 57$ ans pour L_3)

2. En linéarisant, on peut montrer que ces points sont instables.

3. En linéarisant, on peut montrer que ces points sont stables si $\nu < \nu_c = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27}}\right) \simeq 0.038$.