Champ de Force central

(1) En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi$$

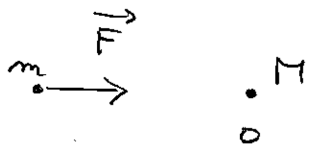
$$= \frac{dU}{dr} \cdot e_r \quad \text{si} \quad U(r) \text{ dépend de } r \text{ seulement}$$

donc si $\vec{F} = + F(r)\, e_r$ alors $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(U)$

avec $F(r) = -\frac{dU}{dr}$

$$\Leftrightarrow \quad U(r) = \int_{r_0}^{r} \left(-F(r)\right) dr .$$

Pour l'attraction gravitationnelle,



$$F(r) = -\frac{m M \mathcal{G}}{r^2}$$

$$U(r) = -\frac{m M \mathcal{G}}{r}$$

(2) Si l'état initial est le point $\vec{X}(0) \in \mathbb{R}^3$ et la vitesse $\vec{V}(0) \in \mathbb{R}^3$, alors la force étant radiale, le mouvement va s'effectuer dans le plan $\left(X(0), \vec{V}(0)\, \vec{F}\right)$.
On peut choisir les axes pour que ce plan soit (Oxy).

$$L = \frac{1}{2} m |V|^2 - U(r) \quad = \quad \frac{1}{2} m \left(V_r^2 + r^2 V_\varphi^2\right) - U(r)$$

car $|V|^2 = V_r^2 + (r V_\varphi)^2$

③ $$p_r = \frac{\partial L}{\partial V_r} = m V_r$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial V_\varphi} = m r^2 V_\varphi$$

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = p_r \cdot V_r + p_\varphi \cdot V_\varphi - L$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r)$$

d'après les équ. de Hamilton :

$$\dot{p_\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{on a} \quad p_\varphi = \text{cte} / t$$

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = r.(m r \dot{\varphi}) \equiv \text{moment cinétique}/z = m\mathcal{L}$$

est une quantité conservée.

on a donc $$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \tilde{U}(r)$$

avec $$\tilde{U}(r) = U(r) + \frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2}$$

ce terme est comme une énergie centrifuge.

L'équ. de mouvement de Hamilton est :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = F(r) + m\frac{\mathcal{L}^2}{r^3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{1}{m} F(r) + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

$$= -\frac{M\mathcal{G}}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

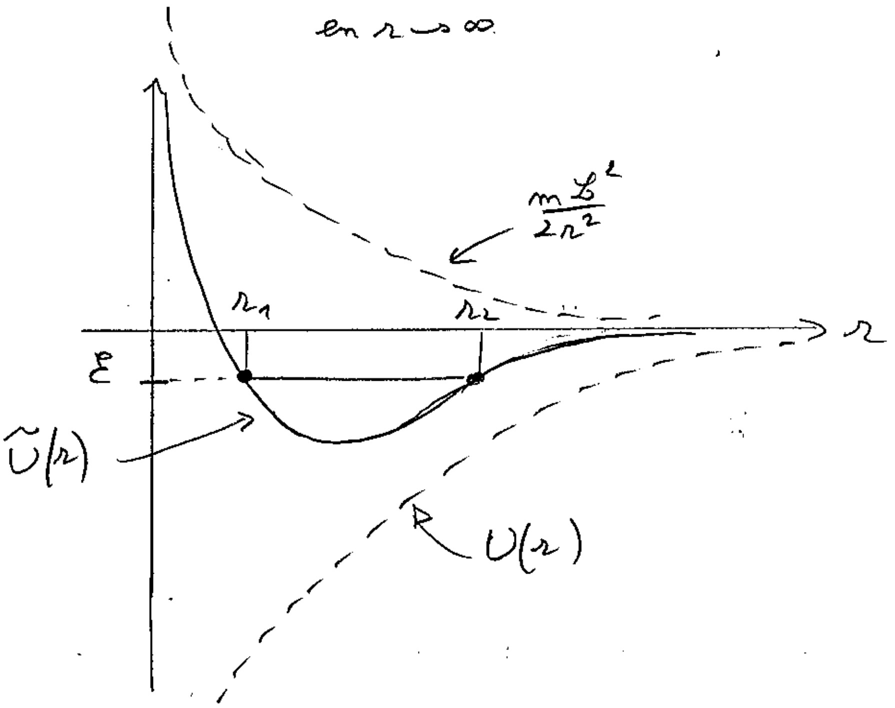
: si force de gravitation. La masse m a disparu.

(4) si $U(r) = -\frac{mMG}{r}$

alors $\tilde{U}(r) = -\frac{mMG}{r} + \frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2}$

domine en $r \to \infty$

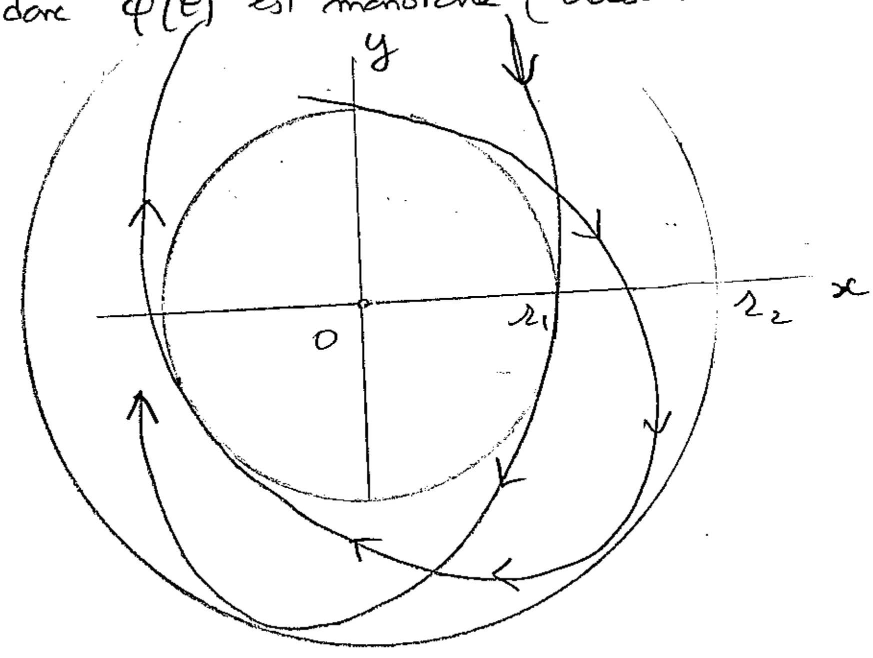
domine en $r \to 0$



• pour une énergie totale $\tilde{U}_{min} < \mathcal{E} < 0$, $r(t)$ oscille entre r_1 et r_2

par ailleurs $r^2 \dot{\varphi} = \mathcal{L} = cste$

donc $\varphi(t)$ est monotone (croissante ou décroissante).



⑤ soit $u = \frac{1}{r}$ alors $r = \frac{1}{u}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\mathcal{L}}{r^2} = -\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot \mathcal{L}$$

$$\ddot{r} = -\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \mathcal{L} = -\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} = -\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \mathcal{L}^2 u^2$$

donc l'équation radiale devient :

$$-\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \mathcal{L}^2 u^2 = \frac{1}{m} F(r) + \mathcal{L}^2 u^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{m \mathcal{L}^2 u^2} F(r)$$

$$= + \frac{M G}{\mathcal{L}^2}$$ = cste si force de gravitation

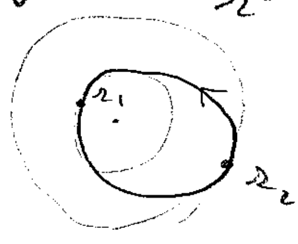
La solution est

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{M G}{\mathcal{L}^2}$$, A, φ_0 : cste

$$\Leftrightarrow r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{M G}{\mathcal{L}^2}}$$

$$= \frac{e\, d}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$: ellipse d'excentricité e.

donc dans ce cas particulier (force en $\frac{1}{r^2}$), les trajectoires se referment.



Géodésiques autour d'une étoile

(1) $r_0 = \dfrac{M_0 G}{c^2} = 1{,}48.10^4\,m = 14{,}8\ km$

correspond au "rayon" d'un trou noir de masse solaire

$t_0 = \dfrac{r_0}{c} = 5.10^{-5}\,s$

(2) si $M = 0$, alors

1 $$g(V,V) = V_t^2 - \underbrace{\left(V_r^2 + r^2 V_\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, V_\varphi^2\right)}_{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}$$

est la métrique de Minkowski
de l'espace temps plat.

2 (3) Lagrangien : $L = \frac{1}{2} g\left(\frac{dX}{ds}, \frac{dX}{ds}\right)$

3 $$L(t, r, \varphi, V_t, V_r, V_\varphi) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{2}V_t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{1}{2}V_r^2 - \frac{1}{2}r^2 V_\varphi^2$$

on a

4 $$P_t = \frac{\partial L}{\partial V_t} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)V_t \ , \quad P_r = \frac{\partial L}{\partial V_r} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} V_r$$

5 $$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial V_\varphi} = -r^2 V_\varphi$$

Le Hamiltonien est:

$$H(t, r, \varphi, p_t, p_r, p_\varphi) = P \cdot V - L$$

$$= p_t \cdot V_t + p_r \cdot V_r + p_\varphi \cdot V_\varphi - L$$

$$= \left(1-\frac{2M}{r}\right) V_t^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} V_r^2 - r^2 V_\varphi^2$$

$$- \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) V_t^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} V_r^2 + \frac{1}{2} r^2 V_\varphi^2$$

$$= L$$

6 $$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} p_t^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) p_r^2 - \frac{1}{2r^2} p_\varphi^2$$

Les équations de Hamilton sont:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_t} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} p_t = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \cdot E$$

$$\frac{dp_t}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \text{donc } E := p_t = \left(1-\frac{2M}{r}\right) V_t \text{ est conservé}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = -\frac{1}{r^2} p_\varphi = \frac{1}{r^2} \mathcal{L}$$

$$\frac{dp_\varphi}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{donc } \mathcal{L} := -p_\varphi = r^2 V_\varphi \text{ est conservé}$$

(7) $$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) p_r$$

$$\frac{dp_r}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left[\frac{1}{2}(-1)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} p_t^2 \cdot (-2M r^{-2})(-1) - \frac{1}{2} p_r^2 (-2M r^{-2})(-1) - \frac{1}{2} p_\varphi^2 (-2) r^{-3}\right]$$

$$= +\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(\frac{-M}{r^2}\right) p_t^2 + \left(\frac{M}{r^2}\right) p_r^2 - \frac{1}{r^3} p_\varphi^2$$

(8) $$= \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(\frac{M}{r^2}\right) E^2 + \left(\frac{M}{r^2}\right) p_r^2 - \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

De plus comme H est indépendant de s alors ("conservation de l'énergie") $H(X(s), P(s)) = \text{cste}/s$.
$= H$

(9) donc $\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)p_r^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 - \frac{1}{2r^2}\mathcal{L}^2 - H$

$E = \left(1-\frac{2M}{r}\right)V_t \xrightarrow[r\infty]{} V_t$ et s'interprète comme l'énergie mesurée dans le référentiel (x, y, z, t) (voir cours).

$\mathcal{L} = r^2 V_\varphi$ est comme le moment angulaire (voir pb 1).

$$H = L = \frac{1}{2}g(V,V) \begin{cases} = 0 & \text{pour le photon} \\ > 0 & \text{pour particule massive.} \end{cases}$$

(4) On a d'après (7) et (8)

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -(-1)\left(-\frac{2M}{r^2}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)\cdot p_r - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dp_r}{ds}$$

$$= -\frac{2M}{r^2}V_r \cdot p_r - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dp_r}{ds}$$

$$= \left(\frac{2M}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)p_r^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dp_r}{ds} \quad \text{: d'après (4)}$$

$$= \left(\frac{2M}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)p_r^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2}\right)E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^2}\right)p_r^2$$
$$+ \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathcal{L}^2}{r^3} \quad \text{: d'après (8)}$$

$$= \left(\frac{M}{r^2}\right)\left[\cancel{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2} - \frac{1}{r^2}\mathcal{L}^2 - 2H\right] - \cancel{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2}\right)E^2}$$
$$+ \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathcal{L}^2}{r^3} \quad \text{: d'après (9)}$$

$$= -\frac{2MH}{r^2} + \left(1-\frac{3M}{r}\right)\frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

dans le cas $H = \frac{1}{2}$ (particule massive)

on obtient
$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} - \frac{3M\mathcal{L}^2}{r^4}$$

on reconnaît : Force de Newton

force centrifuge

le $3^{ème}$ terme n'est pas présent en mécanique de Newton, mais il est négligeable si $r \gg M$ (15 km ds le cas du Soleil)

Son effet très faible se fait sentir sur l'orbite de Mercure.

(5)
$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{dU}{dr} \quad \text{avec}$$

$$U(r) = -\frac{M2H}{r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2} - \frac{M\mathcal{L}^2}{r^3}$$

domine en $r \to 0$.

recherche des extrema de $U(r)$ si $H = \frac{1}{2}$

$$0 = \frac{dU}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} + \frac{3M\mathcal{L}^2}{r^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad Mr^2 - r\mathcal{L}^2 + 3M\mathcal{L}^2 = 0$$: équ du 2^{nd} degré en r

$$r_\pm = \frac{\mathcal{L}^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2M}, \quad \Delta = \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2 - 12M^2)$$

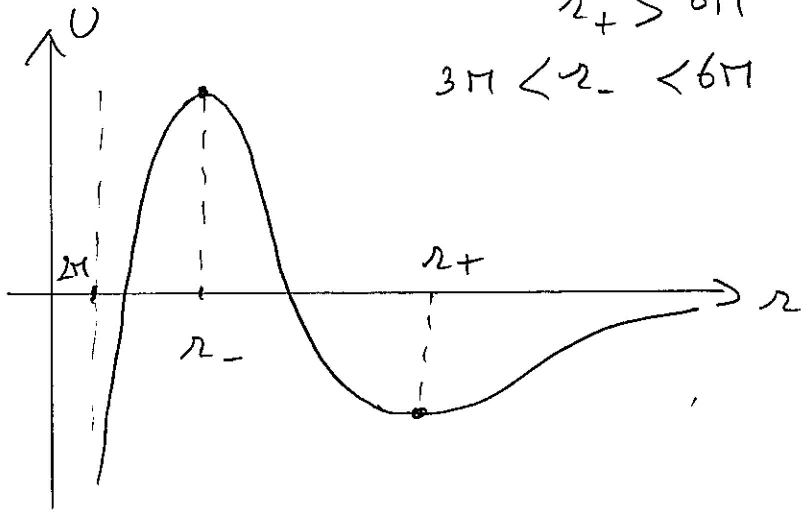
$\geqslant 0$ si $\mathcal{L} \geqslant \sqrt{12} \cdot M$

pas de solution si $\mathcal{L} < \sqrt{12} \cdot M$

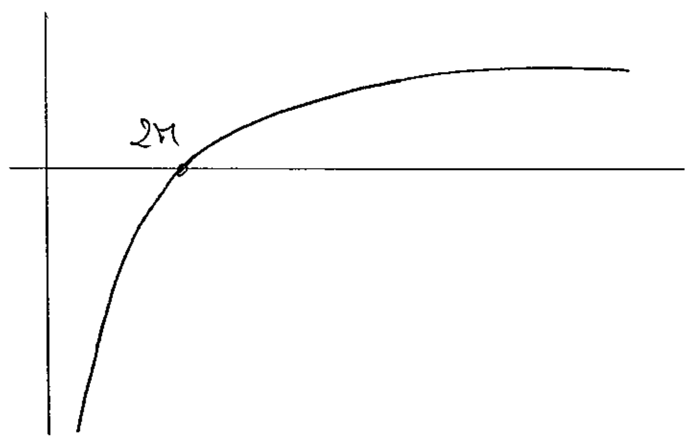
• si $\mathcal{L} \geqslant \sqrt{12}\,.\,M$

$r_+ > 6M$

$3M < r_- < 6M$



• si $\mathcal{L} < \sqrt{12}\,.\,M$



• Cas de la lumière $(M=0)$