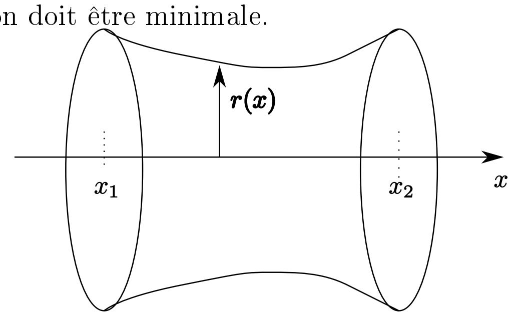
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
TD de Mécanique Analytique

TD n^{o}5
Du principe variationnel au Hamiltonien (II).

Exercice 1. Film de Savon.
Le but de cet exercice est de montrer que des problèmes de minimisation qui ne sont pas directement des problèmes d'équations de mouvement, utilisent aussi le formalisme Lagrangien.

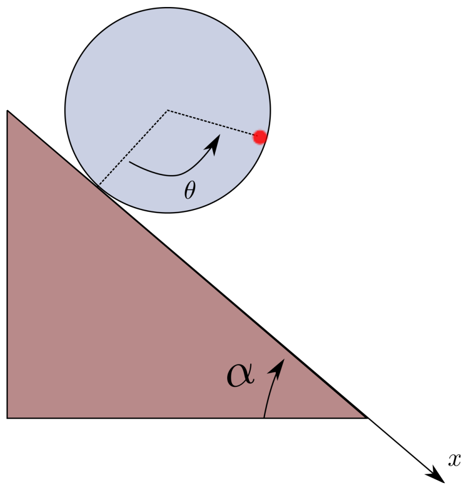
On considère un axe x et une surface de révolution définie par son rayon $r(x)$. Dans la suite, cette surface représentera un film de savon tendu entre deux cercles fixés en $x = x_1$ et $x = x_2$ et de rayon $r(x_1)$, $r(x_2)$. Au repos, la tension superficielle fait que la surface S du film de savon doit être minimale.



1. Pour un film de savon justifier qualitativement pourquoi la surface a une forme incurvée comme sur la figure, et non pas la forme d'un cylindre droit.
2. Pour une fonction $r(x)$ décrivant une surface de révolution quelconque, montrer que la surface entre x_1 et x_2 est donnée par
$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx$$
3. En imposant que cette surface soit "extrémale" avec des conditions aux bords fixées $r(x_1)$, $r(x_2)$ écrire l'équation de Euler-Lagrange que doit satisfaire la fonction $r(x)$. (Attention : ici x joue le rôle du temps en mécanique)
4. Déduire la fonction Hamiltonien $H(r, p)$ et écrire les équation de mouvement de Hamilton. Y a t-il une "quantité conservée" ?
5. En supposant que l'origine de l'axe x soit bien choisie, montrer que
$$r(x) = \rho \cosh\left(\frac{x}{\rho}\right), \qquad \rho > 0$$
est une solution.
6. On souhaite tendre un film de savon entre deux cercles parallèles de même rayon R et distants de $2L$. Montrer que cela est possible tant que $\frac{R}{L} > C$ avec une constante C que l'on déterminera. Que se passe t-il si $\frac{R}{L} < C$? Discuter la solution physique. Tracer $S(\rho)$.

Exercice 2. Un rouleau qui roule.

On considère un cylindre homogène de rayon R de masse M roulant sans glisser sur un plan incliné d'angle α, sous l'effet de son poids. On note x la position du point de contact et θ la position angulaire d'un point de référence sur le cylindre (voir figure).



1. Montrer qu'il y a une contrainte "holonome" qui permet de relier θ et x.
2. Ecrire le Lagrangien $L(\theta, V_\theta)$.
3. Déduire l'impulsion p_θ et les équations de mouvement de Euler-Lagrange.
4. Déduire le Hamiltonien $H(\theta, p_\theta)$ et écrire les équations de mouvement de Hamilton.
5. Comparer au mouvement d'un point de masse M sur le même plan incliné.