TD n^{o}4

Modèle de dynamique Chaotique.
Du principe variationnel au Hamiltonien (I).

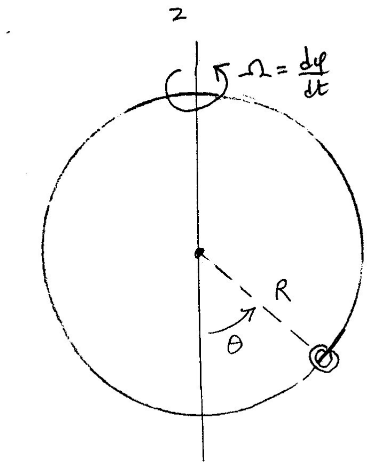
Exercice 1. Etude d'une dynamique hyperbolique (chaotique). Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la dynamique d'un point $E_t = (q_t, p_t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{Z}$, définit par

$$\begin{pmatrix} q_{t+1} \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_t = M^t E_0$. Ce modèle déterministe à temps discret est similaire à une section de Poincaré.

1. Montrer que la matrice M préserve l'aire. Calculer ses valeurs propres notées $e^{\lambda} > 1, e^{-\lambda} < 1$ et ses vecteurs propres donnant les directions stables et instables. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan $\mathbb{R}^2$, en particulier pour des points situés sur les axes stables et instables.
2. On note maintenant $\tilde{q} = q$ modulo 1 et $\tilde{p} = p$ modulo 1, c'est à dire que $\tilde{q}, \tilde{p} \in [0, 1[$ sont les parties fractionnaires de q, p. Noter que inversement $\tilde{q}, \tilde{p} \in [0, 1[$ donnés sont les parties fractionnaires de tous les points de la forme $q = \tilde{q} + n_1, p = \tilde{p} + n_2$ avec n_1, n_2 entiers. On s'intéresse maintenant aux trajectoires de $\tilde{q}_t, \tilde{p}_t$ sur le carré $\mathcal{S} := [0, 1[^2$ considéré comme la **section de Poincaré**. Par exemple $M \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ modulo 1. Soit $A, B \subset \mathcal{S}$ deux petits disques quelconques. On note $M^t(A)$ l'évolution des points de A sur le carré $\mathcal{S}$. Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$ assez grand, $(M^t(A) \bigcap B)$ est non vide. (Aide : pour cela représenter d'abord l'allure des ensembles $M^{t/2}(A)$ et $M^{-t/2}(B)$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ éventuellement translatés de (n_1, n_2) entiers.). Déduire que $M^t(A)$ remplit $\mathcal{S} = [0, 1[^2$ de façon dense pour $t \to \infty$. Interpréter ce résultat comme la propriété que la **dynamique de** M **est chaotique** sur $\mathcal{S}$.
3. Un point $\tilde{E}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ est dit **périodique de période** t si $\tilde{E}_t = M^t\left(\tilde{E}_0\right) = \tilde{E}_0$ modulo 1. Montrer qu'il y a
$$\mathcal{N}_t = \left|Det\left(M^t - Id\right)\right| = e^{\lambda t} - 2 + e^{-\lambda t}$$
points périodiques de période t . (Aide : montrer qu'il faut résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $M^t(E_0) = E_0 + N$ avec $N = (n_1, n_2)$ entiers). Trouver les points de période $t = 1$, $t = 2$.
4. Montrer que un point est périodique si et seulement si ses coordonnées $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ sont des nombres rationnels (rappel : un nombre rationnel est le quotient de deux entiers a/b).
5. On appelle
$$h := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_t$$
l'**entropie topologique** du système dynamique qui signifie que le nombre d'orbites périodiques de période t augmente comme e^{ht}. Calculer h.

Exercice 2. Perle sur un cerceau. On considère une perle de masse m qui peut coulisser parfaitement sur un cerceau de rayon R. Le cerceau est vertical et tourne autour de l'axe vertical avec la fréquence angulaire $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ fixe.



1. Ecrire la norme d'un vecteur vitesse V de la perle à partir de ses composantes en coordonnées sphériques $V \equiv (V_r, V_\theta, V_\varphi) = \left(\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right)$, et déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c, ainsi que l'expression de l'énergie potentielle $U = mgz$ associée à la force de pesanteur. Montrer que la variable spatiale θ suffit à caractériser la position de la perle. Ecrire le Lagrangien $L(\theta, V_\theta) = E_c - U$ en fonction de (θ, V_θ) mais aussi m, R, Ω.
2. Déduire l'expression de l'impulsion associée $p = \frac{\partial L}{\partial V_\theta}$ et par le changement de variable appelé **transformée de Legendre** $(\theta, V_\theta) \to (\theta, p)$, déduire l'expression du Hamiltonien $H(\theta, p)$ que l'on écrira sous la forme :

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2mR^2} + \tilde{U}(\theta)$$

   Interpréter les différentes termes de $\tilde{U}(\theta)$.
3. Trouver les maxima et minima de la fonction $\tilde{U}(\theta)$, à discuter selon les valeurs de Ω. Déduire les positions d'équilibres stables et instables de la perle sur le cerceau, selon Ω. A l'instant $t = 0$, la perle est dans l'état $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$. Que va être sa trajectoire ?

Exercice 3. (Option) Courbe de longueur minimale. On considère un mouvement à une dimension $x \in \mathbb{R}$, dont le lagrangien est

$$L(x, v) = \sqrt{1 + v^2}, \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

(Note : ce Lagrangien n'a pas de signification physique) Soit $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt$ **l'action d'une trajectoire** $x(t)$ allant de $x_1 = x(t_1)$ à $x_2 = x(t_2)$.

1. Montrer que dans le plan euclidien "espace-temps" $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, l'action S est égal à la longueur $\int ds$ de la trajectoire (un élément de longueur étant $ds = \sqrt{dx^2 + dt^2}$).
2. Ecrire les **équations de Euler-Lagrange** et retrouver que la trajectoire de longueur extrémale (en fait minimale) entre deux points fixés du plan est une droite.