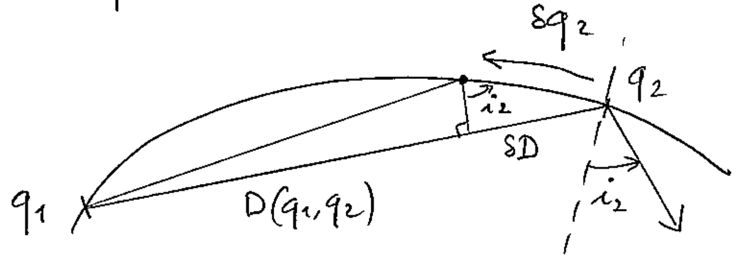
Exercice : " Fonction génératrice d'un billard ".

1. D'après le schéma suivant qui montre une variation δq_2 du point q_2 :



il apparait que $\delta D = \sin(i_2) \cdot \delta q_2 = p_2 \cdot \delta q_2$

donc $\dfrac{\partial D(q_1,q_2)}{\partial q_2} = p_2$

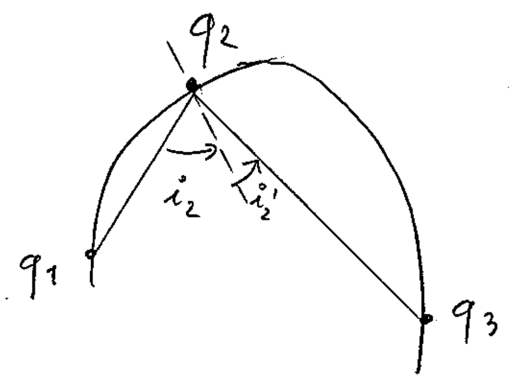
De même en variant le point p_1, on trouve $\dfrac{\partial D(q_1,q_2)}{\partial q_1} = - p_1$

2. Soit $\mathcal{D}(q_2) = D(q_1,q_2) + D(q_2,q_3)$

on a $\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial D(q_1,q_2)}{\partial q_2} + \dfrac{\partial D(q_2,q_3)}{\partial q_2}$

$= p_2 - p_2'$: d'après (1).

où $\begin{cases} p_2 = \sin(i_2) , \\ p_2' = \sin(i_2') \end{cases}$

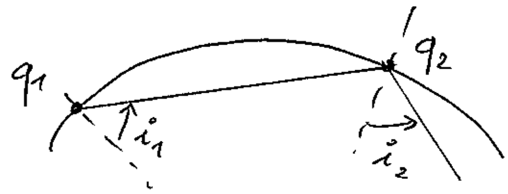


donc $\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_2} = 0$

$\Longleftrightarrow p_2 = p_2' \Longleftrightarrow i_2 = i_2'$.

③ Soit $\tilde{D}(q_1, p_1) := D(q_1, Q(q_1, p_1))$

avec $\begin{cases} q_2 = Q(q_1, p_1) \\ p_2 = P(q_1, p_1) \end{cases}$



on a $\dfrac{\partial \tilde{D}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial D}{\partial q_1} + \dfrac{\partial D}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial q_1}$

$= -p_1 + p_2 \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial q_1}$ d'après (1)

$= -p_1 + P(q_1, p_1) \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial q_1}$

$\dfrac{\partial \tilde{D}}{\partial p_1} = \dfrac{\partial D}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial p_1} = p_2 \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial p_1} = P(q_1, p_1) \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial p_1}$

donc

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \tilde{D}}{\partial q_1}\right) = -1 + \frac{\partial P}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_1} + P \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial p_1 \partial q_1}$$

et $$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \tilde{D}}{\partial p_1}\right) = \frac{\partial P}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial p_1} + P \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial q_1 \partial p_1}$$

or $\dfrac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial q_1 \partial p_1} = \dfrac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial p_1 \partial q_1}$ (Th. de Schwarz)

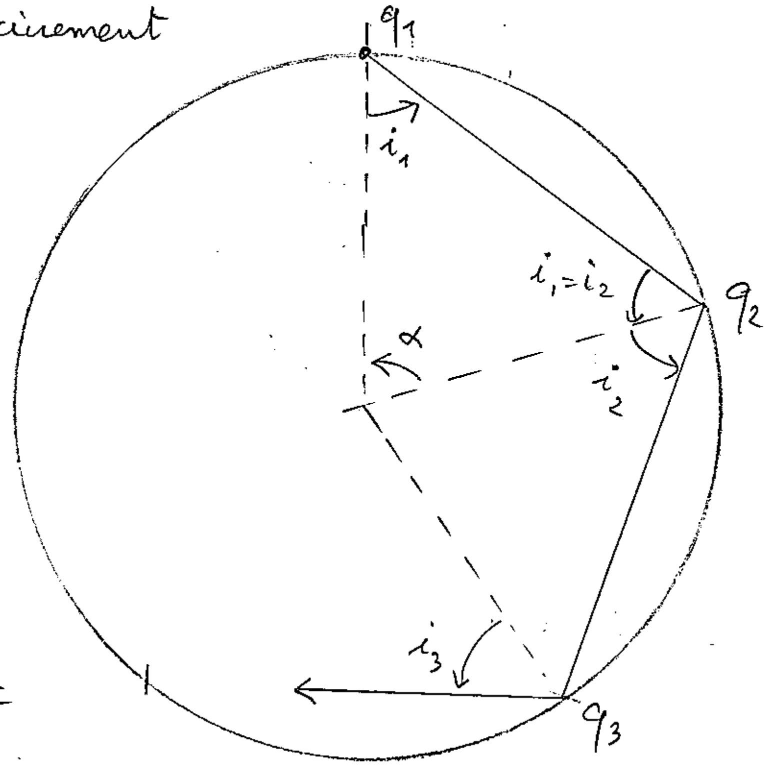
donc

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_1} - \frac{\partial Q}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} = \Bigg| \underbrace{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q_1} & \frac{\partial P}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial p_1} & \frac{\partial P}{\partial p_1} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobien du changement de variable } (q_1, p_1) \to (q_2, p_2) = (Q, P)} \Bigg|$$

donc $dq_1 \, dp_1 = dq_2 \, dp_2$.

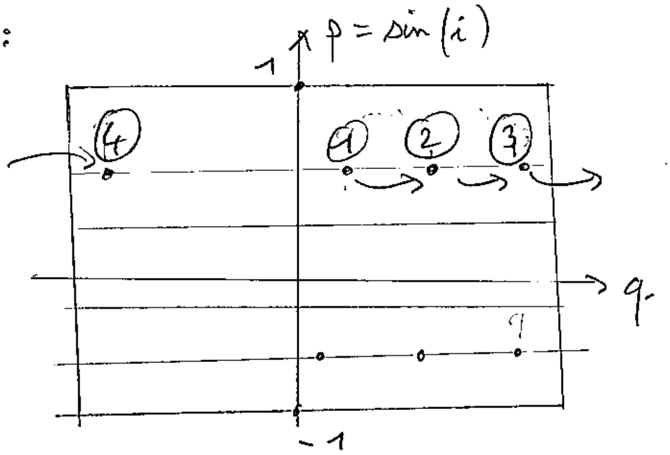
Exercice : "Billard circulaire"

① Il apparaît clairement que $i_2 = i_1$
etc...
$i_n = \dots = i_1$
l'angle est le même à chaque rebond.
(Mais dépend de l'état initial).



Donc
$p_1 = p_2 = p_3 = \dots$ etc

et sur la section de Poincaré :



Les trajectoires sont sur des lignes horizontales.

② D'après le schéma, $2i + \alpha = \pi$ (angles d'un triangle).
et la trajectoire se referme (périodique) après m rebonds et après n tours,

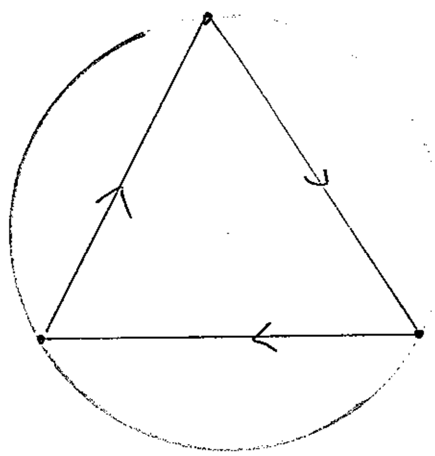
$$\Longleftrightarrow \quad m \cdot \alpha = n\, 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \left(\frac{n}{m}\right) 2\pi$$

nombre rationnel.

$$\Longleftrightarrow \quad i = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\frac{m-2n}{m}}_{\text{nombre rationnel}}\right)$$

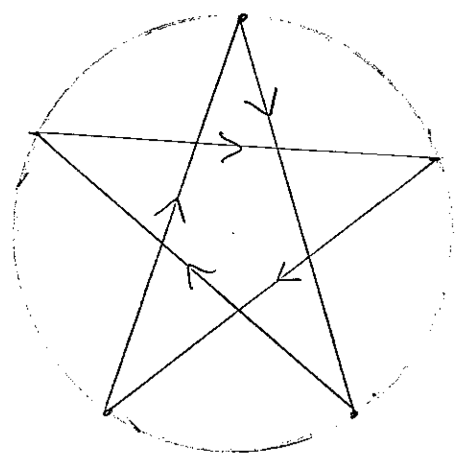
Inversement si $i = \frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{q}\right)$ avec $\dfrac{p \leftarrow \text{entier}}{q \leftarrow \text{entier}}$: rationnel,

alors la trajectoire est périodique
et fait $m = q$ rebonds après n tours,
avec $p = m - 2n \Leftrightarrow n = \frac{q-p}{2}$



$n = 1$ tour

$m = 3$ rebonds



$n = 2$ tours

$m = 5$ rebonds

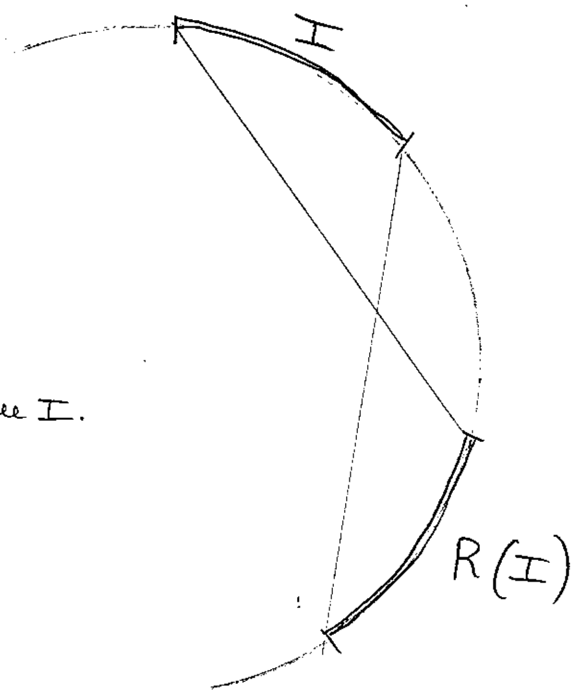
③ Entre 2 rebonds, d'après la figure, la longueur parcourue est $d = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc $L = m.d = m\,2R\sin\left(\frac{n}{m}.\pi\right)$

où R est le rayon.

4 (Solution de Katok-Hasselblatt p. 27).

On suppose qu'il y a un intervalle I sur le bord non atteind par la trajectoire, et que cet intervalle est le plus grand.
On a vu que à chaque rebond le point tourne d'un angle $(-\alpha)$. On note R la rotation d'un angle $(-\alpha)$

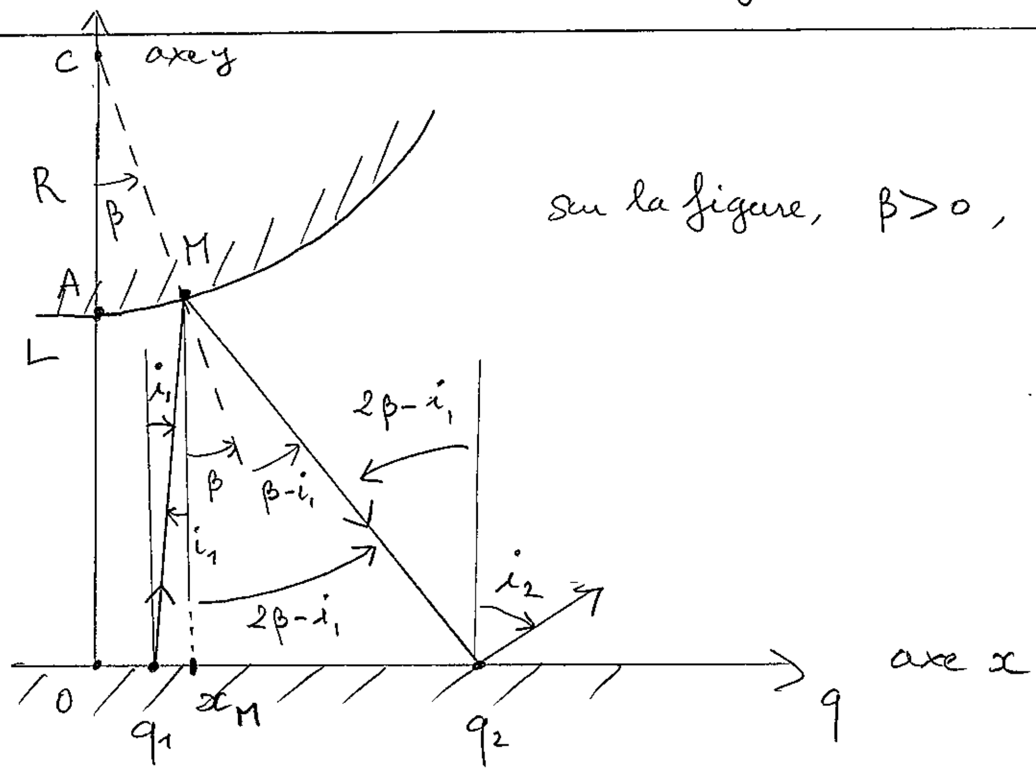


- Comme la rotation préserve la longueur, $R(I)$ a la même longueur que I et n'est pas atteind non plus.
- les intervalles I, $R(I)$, $R^2(I)$ etc ne se coupent pas sinon cela ferait un intervalle pas atteind plus grand que I.
- Comme $\frac{i}{\pi}$, donc $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel,

  on ne peut pas avoir $R^m(I) = I$

  pour un certain m (sinon le bord de l'intervalle montre que la trajecto est périodique).
- Donc les intervalles sont disjoints et de longueur égale. Il y en a une infinité. Cela est impossible car la longueur du cercle $2\pi R$ est finie.

Exercice : Stabilité d'une trajectoire verticale



sur la figure, $\beta > 0$, $i_1 < 0$

La trajectoire OA verticale est périodique.

Soit $q_1 \ll 1$ et angle $i_1 \ll 1$.

On cherche q_2 et i_2 au 1er ordre. On appelle M le point de rebond.

D'après la figure, on a : $i_2 = -(2\beta - i_1) = i_1 - 2\beta$

avec $\beta = \text{angle}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right)$

Au premier ordre, on a $\begin{cases} x_M = R\sin(\beta) \simeq R\beta \\ y_M \simeq L \end{cases}$

et aussi $x_M \simeq q_1 - L\sin(i_1) \simeq q_1 - L i_1$

et $q_2 = x_M + L\sin(2\beta - i_1) \simeq x_M + L(2\beta - i_1) = q_1 - 2Li_1 + 2L\beta$

donc $\beta = \frac{x_M}{R} = \frac{1}{R}(q_1 - L i_1)$

$$i_2 = i_1 - 2\beta = i_1 - \frac{2}{R}(q_1 - L i_1) = i_1\left(1 + \frac{2L}{R}\right) - \frac{2}{R} q_1$$

$$q_2 = q_1 - 2Li_1 + L\left(\frac{2}{R}(q_1 - L i_1)\right) = q_1\left(1 + \frac{2L}{R}\right) - 2i_1 L\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$

or $p = \sin(i) \approx i$

donc
$$\begin{cases} p_2 \approx i_2 = p_1 \left(1 + \frac{2L}{R}\right) - \frac{2}{R} q_1 \\ q_2 = q_1 \left(1 + \frac{2L}{R}\right) - p_1 2L \left(1 + \frac{L}{R}\right) \end{cases}$$

soit $\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = DM \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$

avec
$$DM = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2L}{R}\right) & -2L\left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ -\frac{2}{R} & \left(1 + \frac{2L}{R}\right) \end{bmatrix}$$

(2) on a
$$\mathrm{Det}(DM) = \left(1 + \frac{2L}{R}\right)^2 - \frac{4L}{R}\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$
$$= 1 + \cancel{\frac{4L}{R}} + \cancel{\frac{4L^2}{R^2}} - \cancel{\frac{4L}{R}} - \cancel{\frac{4L^2}{R^2}} = 1$$

comme attendu (th. de Liouville pour l'applic. de Poincaré)

Soit $T = \mathrm{Tr}(DM) = 2\left(1 + \frac{2L}{R}\right) = 2 + \frac{4L}{R}$

Rappel :

Les valeurs propres d'une matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

est solution de
$$0 = \Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda - bc + ad$$
$$= \lambda^2 - T\cdot\lambda + D$$

avec $D = \mathrm{Det}(A)$, $T = \mathrm{Tr}(A)$

Ici $\mathrm{Det}(DM) = 1$, donc

λ est solution de $\lambda^2 - T\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_\pm = \dfrac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$

on a $T^2 - 4 = 4\left(\frac{L}{R}\left(1 + \frac{L}{R}\right)\right)^{1/2} \geq 0$.

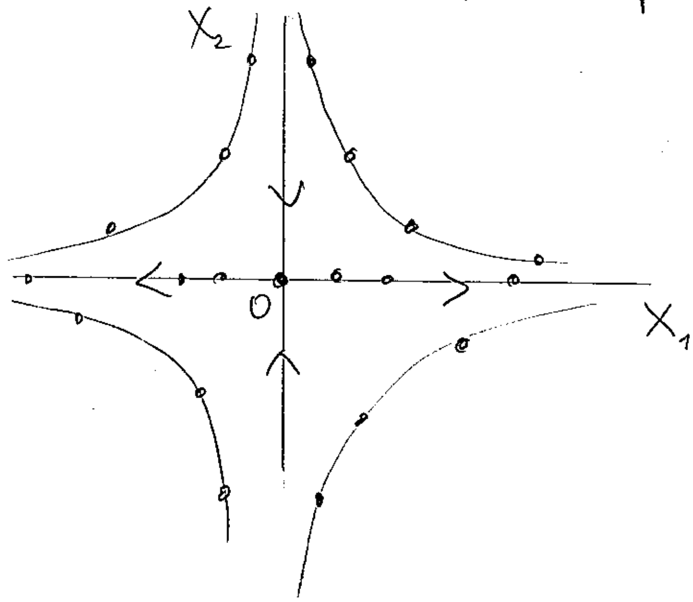
on a

$1 = \mathrm{Det}(DM) = \lambda_+ \cdot \lambda_-$

donc

$0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$

Donc dans les axes des vecteurs propres, on a :



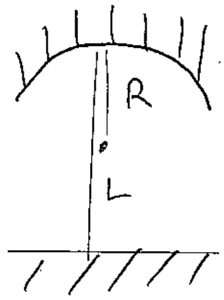
$$\begin{cases} X_1(n) = \lambda_+^n \cdot X_1(0) \to \infty \\ X_2(n) = \lambda_-^n \cdot X_2(0) \to 0 \end{cases}$$

$$X_1(n) \cdot X_2(n) = (\underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{1})^n X_1(0) X_2(0) = X_1(0) X_2(0) = \text{cste}$$

$\rightarrow (X_1, X_2) \in$ hyperbole

L'orbite (OA) est donc <u>instable</u> (hyperbolique).

- le cas $R < 0$ correspond à une courbure inversée :



Il y a instabilité $\Longleftrightarrow T^2 - 4 > 0$

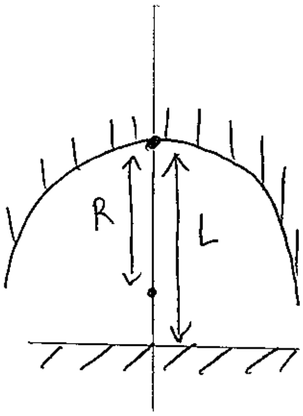
$\Longleftrightarrow \frac{L}{R}\left(1 + \frac{L}{R}\right) > 0$

dans le cas $R, L > 0$ c'est toujours vérifié ;

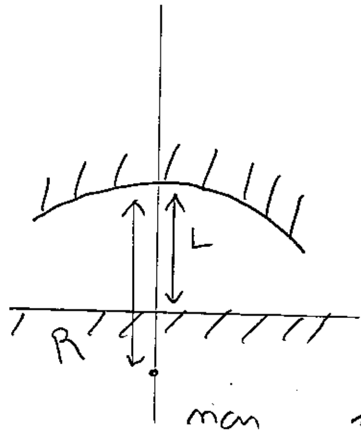
Mais dans le cas $R < 0$, $|R| = (-R)$

cela donne $1 - \frac{L}{(-R)} < 0 \iff |R| < L$

cad :

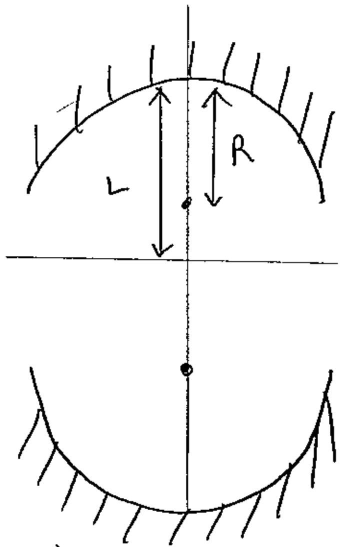


instable si $L > R$
hyperbolique



non si $L < R$
hyperbolique

③ Pour traiter le cas suivant :



il faut penser que c'est le problème précédent avec une "image miroir"

On a donc de même :

$L > R \longrightarrow$ instable hyperbolique

$L < R \longrightarrow$ elliptique (cf exo suivant)

Exercice : Matrice de $SL_2(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(M) = ad - bc = 1$$
$$T = \mathrm{Tr}(M) = a + d$$

polynome caractéristique : $D(x) = \mathrm{Det}(M - xI)$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$
$$= (a-x(d-x - bc$$
$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$
$$= x^2 - Tx + 1$$

Les valeurs propres $x_\pm$ sont solution de $D(x_\pm) = 0$

$$\longrightarrow \quad x_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{avec } \Delta = T^2 - 4$$

1) si $|T| > 2 \Leftrightarrow T^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$,

alors $x_\pm$ sont réelles, $x_+ \cdot x_- = \mathrm{Det}(M) = 1$

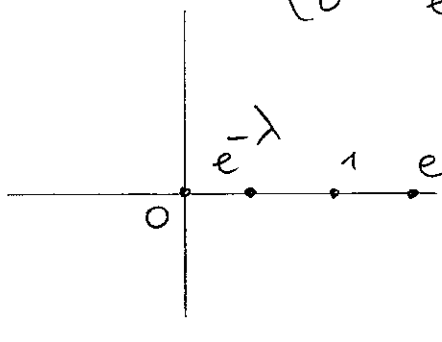
$$x_+ > 1 \text{ et } x_- = \frac{1}{x_+} < 1$$

On peut noter $x_+ = e^\lambda$, $\lambda > 0$ et $x_- = e^{-\lambda}$.

$$\lambda = \log(x_+) = \log\left(\frac{T + \sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

- Dans la base des vecteurs propres, on a $M \propto \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$

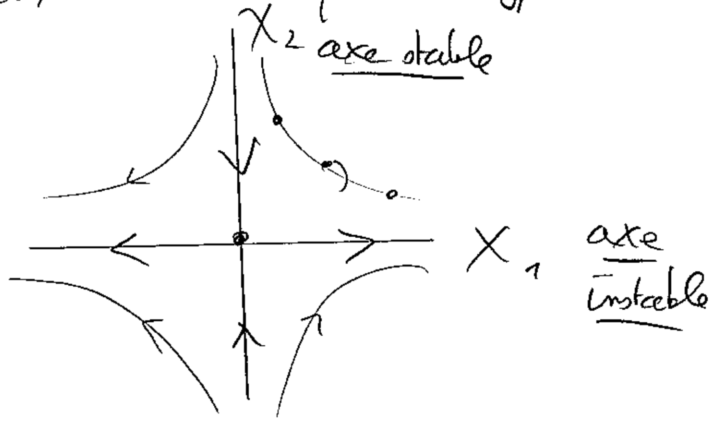
donc $M^n \propto \begin{pmatrix} e^{n\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-n\lambda} \end{pmatrix}$



la dynamique d'un point (X_1, X_2) est donc :

$$\begin{cases} X_1(n) = X_1(0) \cdot e^{n\lambda} \longrightarrow \infty \\ X_2(n) = X_2(0)\, e^{-n\lambda} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

on a $X_1(n) \cdot X_2(n) = X_1(0)\, X_2(0) = \text{cste}$: équ d'1 hyperbole



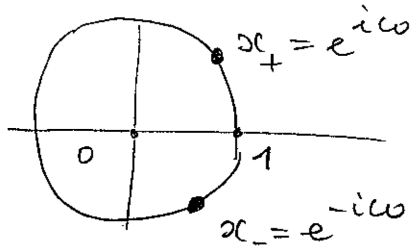
② si $T \in]-2;2[$ alors $T^2 - 4 < 0 \iff \Delta < 0$

$$\rightarrow \quad x_\pm = \frac{T \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

on a $x_- = \overline{x_+}$ (conjugué)

et $|x_\pm| = \frac{1}{4}\left(T^2 + |\Delta|\right) = \frac{1}{4}\left(T^2 + 4 - T^2\right) = 1$

donc $x_+ = e^{i\omega}$, $x_- = e^{-i\omega}$ sont de module 1.

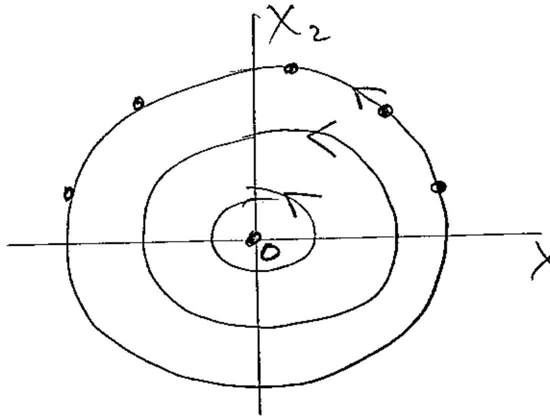


Les vecteurs propres V_+, V_- sont aussi complexes,

Mais Soit $\left.\begin{matrix} V_1 = \mathrm{Re}(V_+) \\ V_2 = \mathrm{Im}(V_+) \end{matrix}\right\}$ vecteurs réels.

dans cette base, un point de coordonnées X_1, X_2 aura la dynamique

$$\begin{cases} X_1(n) = |X_1(0)| \cdot \cos(\omega n + \varphi_0) \\ X_2(n) = |X_2(0)| \cdot \sin(\omega n + \varphi_0) \end{cases}$$



mouvement sur des cercles car : $\left(X_1^2 + X_2^2\right) = |X_1(0)|^2 = cste.$

Le point $(0,0)$ est <u>stable</u>.

(3) si $T = \pm 2$, alors $\Delta = 0$,

$$x_+ = x_- = \frac{T}{|T|} = \begin{cases} 1 & \text{si } T = 2 \\ -1 & \text{si } T = -2 . \end{cases}$$

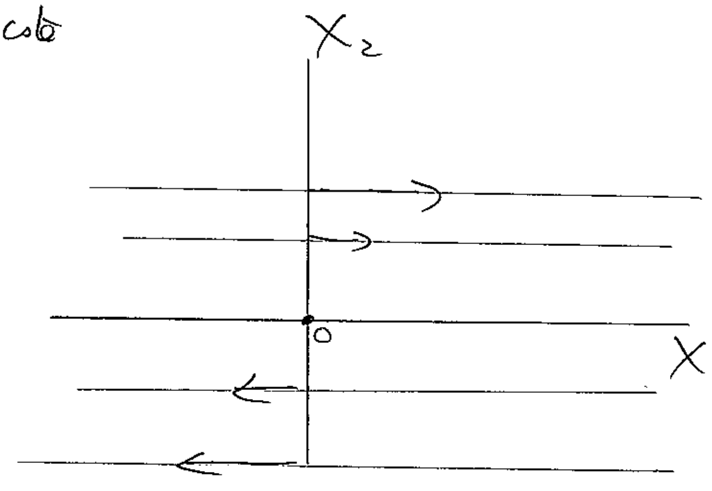
si la matrice est diagonalisable alors $M \propto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm Id.$

sinon (th. de Jordan), $M \propto \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

la dynamique dans ce cas est dans cette base :

$$\begin{cases} X_1(1) = X_1(0) + X_2(0) \\ X_2(1) = X_2(0) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X_1(n) = X_1(0) + n \cdot X_2(0) \\ X_2(n) = X_2(0) = cste \end{cases}$$



Le point $(0,0)$ n'est pas stable, mais l'écart (l'instabilité) est linéaire en n.