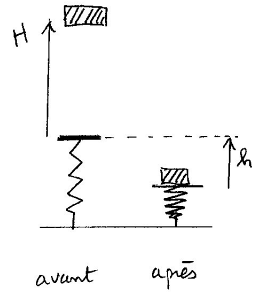

TD n^{o}1

Systèmes à 1 degré de liberté. Diagramme de phase I.

Exercice 1. Pour illustrer que la conservation de l'énergie permet de résoudre des problèmes à 1 dimension.

Une masse m initialement immobile tombe d'une hauteur H sur un ressort de raideur K (et de masse négligeable). Trouver l'allongement maximal h du ressort (voir figure).



Exercice 2. Une particule de masse m évolue selon x à 1 dimension et est soumise à une force conservative d'énergie potentielle $U(x)$. On note $\mathcal{E}$ l'énergie totale de la particule. Supposons que $x(t)$ augmente avec t. Montrer que le temps pour passer de la position x_0 (à la date t_0) à la position $x_1 > x_0$ (à la date $t_1 > t_0$) est

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(\mathcal{E} - U(x))}} dx$$

Exercice 3. Diagramme de phase pour le pendule. Le pendule est un objet de masse m pouvant tourner dans un plan vertical à une distance l d'un point d'attache. La masse est soumise à son poids. On caractérise sa position angulaire à la date t par l'angle $\theta(t)$ mesuré à partir de la position la plus basse.

1. En coordonnées polaires (l, θ), montrer que le **Hamiltonien est**

$$H(\theta, p_\theta) = E_{cin.} + U(\theta) = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl\cos\theta$$

   où p_θ est la composante angulaire de l'impulsion définie par $p_\theta v_\theta = p_s v_s$ où $v_\theta = \frac{d\theta}{dt}$, $s = l\theta$ est la coordonnée curviligne, $v_s = \frac{ds}{dt}$, $p_s = mv_s$ donnant $E_{cin.} = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}p_s v_s = \frac{1}{2}p_\theta v_\theta$. Tracer la courbe $F(\theta) = -\frac{dU}{d\theta}$ qui représente la force tangentielle.

2. Dans le plan $(\theta, p_\theta) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ appelé **espace de phase** (et qui est un cylindre), tracer l'allure des lignes de niveau de $H(\theta, p_\theta)$, appelé **diagramme de phase**. Préciser le sens de parcourt, la fréquence d'oscillation près du point fixe stable, et le coefficient d'instabilité du point fixe instable.

3. On appelle $T(\mathcal{E})$ la période de la trajectoire fermée d'énergie $\mathcal{E}$. Tracer qualitativement $T(\mathcal{E})$ (en précisant le sens de variation et les valeurs extrêmes). Décrire l'allure et le comportement asymptotique des trajectoires si on rajoute une très faible force de frottement $F_2(\theta) = -\gamma \frac{d\theta}{dt}$ avec $\gamma \ll 1$. (On pourra montrer que $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma \left(\frac{p^2}{ml^2}\right)^2 \leq 0$).