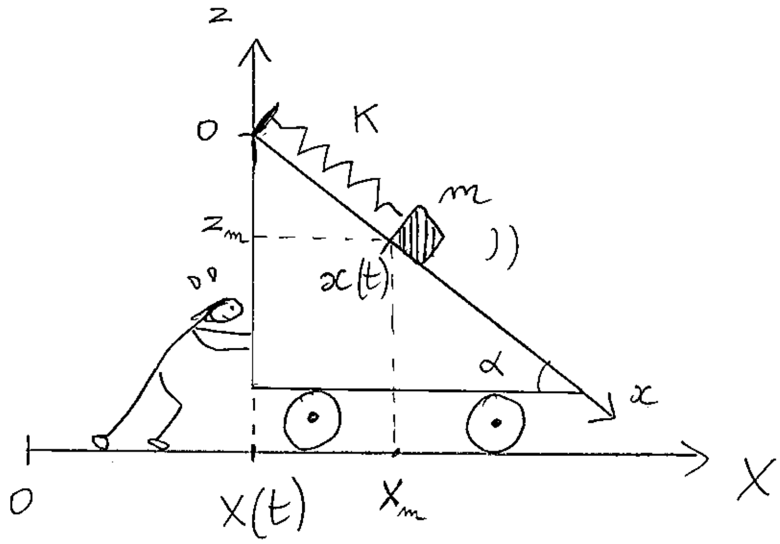
Ressort et plan incliné



1. Energie cinétique :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}_m^2 + \dot{z}_m^2 \right)$$

$$\begin{cases} X_m = X + (\cos\alpha)\, x & \longrightarrow \quad \dot{X}_m = \dot{X} + (\cos\alpha)\, \dot{x} \\ z_m = -x \sin\alpha & \longrightarrow \quad \dot{z}_m = -\dot{x} \sin\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad E_{cin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}^2 + \cos^2\alpha\, \dot{x}^2 + 2(\cos\alpha)\dot{X}\dot{x} + \sin^2\alpha\, \dot{x}^2 \right)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2(\cos\alpha)\dot{X}\dot{x} \right)$$

$$E_{potentielle} = m g z_m + \frac{1}{2} k x^2 = -mg(\sin\alpha)\, x + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\rightarrow \quad L(x, V_x) = E_{cin} - E_{pot} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}^2 + V_x^2 + 2(\cos\alpha)\dot{X} V_x \right) + m g (\sin\alpha)\, x - \frac{1}{2} k x^2$$

avec $V_x = \dot{x}$

② Impulsion

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial V_x} = m V_x + m(\cos\alpha)\,\dot{X}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V_x = \frac{p_x}{m} - (\cos\alpha)\,\dot{X}$$

Hamiltonien :

$$H(x, p_x) = p_x V_x - L = \frac{p_x^2}{m} - (\cos\alpha)\,\dot{X}\,p_x$$

$$- \frac{1}{2} m \dot{X}^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_x}{m} - \cos\alpha\,\dot{X}\right)^2$$

$$- m\cos\alpha\,\dot{X}\left(\frac{p_x}{m} - \cos\alpha\,\dot{X}\right)$$

$$- mg(\sin\alpha)\,x + \frac{1}{2} k x^2$$

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - (\dot{X}\cos\alpha)\,p_x - mg(\sin\alpha)\,x + \frac{1}{2} k x^2 + C$$

↳ indép^t de x, p_x

③ Equ. du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} - \dot{X}\cos\alpha \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = + mg\sin\alpha - kx \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} - \ddot{X}\cos\alpha = + g\sin\alpha - \frac{k}{m}x - \ddot{X}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(t) = + g\sin\alpha - \ddot{X}\cos\alpha \\ \omega^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$$

4 si $X(t) = A\,\mathcal{R}e\left(e^{i\Omega t}\right)$ (notation complexe)

alors $\ddot{X} = -A\Omega^2 \mathcal{R}e\left(e^{i\Omega t}\right)$

$$f(t) = \underbrace{g\sin\alpha}_{a} + \underbrace{(\cos\alpha)A\Omega^2}_{b}\mathcal{R}e\left(e^{i\Omega t}\right)$$

La solution stationnaire de l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a$$

est $\qquad x_0 = \dfrac{a}{\omega^2}$

Donc on pose : $\quad y = x - \dfrac{a}{\omega^2}$,

L'équation devient

$$\ddot{y} + \omega^2 y = b\,\mathcal{R}e\left(e^{i\Omega t}\right)$$

On cherche la solution sous la forme $y(t) = Y\mathcal{R}e\left(e^{i\Omega t}\right)$

$\longrightarrow \quad -\Omega^2 Y + \omega^2 Y = b$

$\longrightarrow \quad Y = \dfrac{b}{(\omega^2 - \Omega^2)}$

La solution est donc :

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} + y(t) = \frac{a}{\omega^2} + \frac{b}{(\omega^2 - \Omega^2)}\cos(\Omega t)$$

on remarque que l'amplitude diverge si $\Omega = \omega$
(effet de résonance).

Chaine périodique d'oscillateurs

(1) ∘ Le terme $\frac{1}{2} p_j^2$ est l'énergie cinétique de l'oscillateur j (particule j).

∘ Le terme $\frac{1}{2} k q_j^2$ est l'énergie potentielle de pesanteur du pendule j représenté sur la figure, dans l'approximation des petits oscillations.

∘ Le terme $\frac{1}{2} \alpha (q_{j+1} - q_j)^2$ est l'énergie potentielle du ressort entre la particule j et $j+1$.

(2) Si $Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \frac{jk}{N}} X_j$

alors $$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i 2\pi \frac{lk}{N}} Y_k = \sum_j \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_k e^{i \frac{2\pi k}{N}(l-j)} \right)}_{\delta_{l,j}} X_j$$

$$= X_l$$: formule d'inversion

et $$\sum_k Y_k^* Y_k = \sum_{j,l} \underbrace{\left(\sum_k \frac{1}{N} e^{i \frac{2\pi}{N} k (j-l)} \right)}_{\delta_{j,l}} X_l^* X_j$$

$$= \sum_j X_j^* X_j$$: formule de Parseval

(3) On a

$$e^{i2\pi\frac{k}{N}}\phi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{-i2\pi(j-1)\frac{k}{N}} q_j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{-i2\pi\frac{jk}{N}} q_{j+1}$$ par changement $j \to j+1$.

donc

$$\left(e^{i2\pi\frac{k}{N}}-1\right)\phi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{-i2\pi\frac{jk}{N}}\left(q_{j+1}-q_j\right)$$

La relation de Parseval donne :

$$\sum_k \left|e^{i2\pi\frac{k}{N}}-1\right|^2 \phi_k^*\phi_k = \sum_j \left(q_{j+1}-q_j\right)^2$$

$$\sum_k \pi_k^*\pi_k = \sum_j p_j^2$$

$$\sum_k \phi_k^*\phi_k = \sum_j q_j^2$$

or $$\left|e^{i2\pi\frac{k}{N}}-1\right|^2 = \left|e^{i\pi\frac{k}{N}}\left(e^{i\pi\frac{k}{N}}-e^{-i\pi\frac{k}{N}}\right)\right|^2$$

$$= 4\sin^2\left(\pi\frac{k}{N}\right)$$

donc

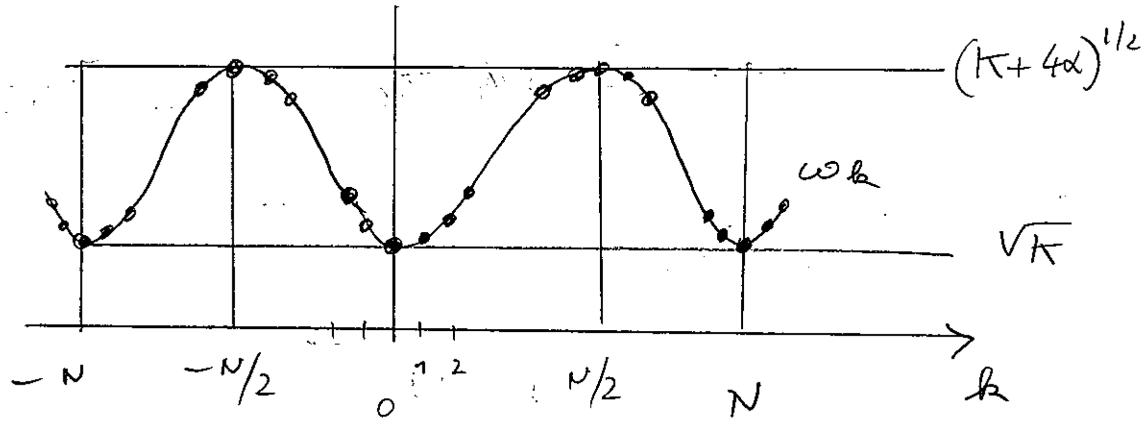
$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_j p_j^2\right) + \frac{K}{2}\left(\sum_j q_j^2\right) + \frac{\alpha}{2}\sum_j\left(q_{j+1}-q_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \pi_k^*\pi_k + \frac{K}{2}\sum_k \phi_k^*\phi_k + 2\alpha\sum_k \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\phi_k^*\phi_k$$

$$= \sum_k \frac{1}{2}\left(\pi_k^*\pi_k + \omega_k^2\phi_k^*\phi_k\right)$$

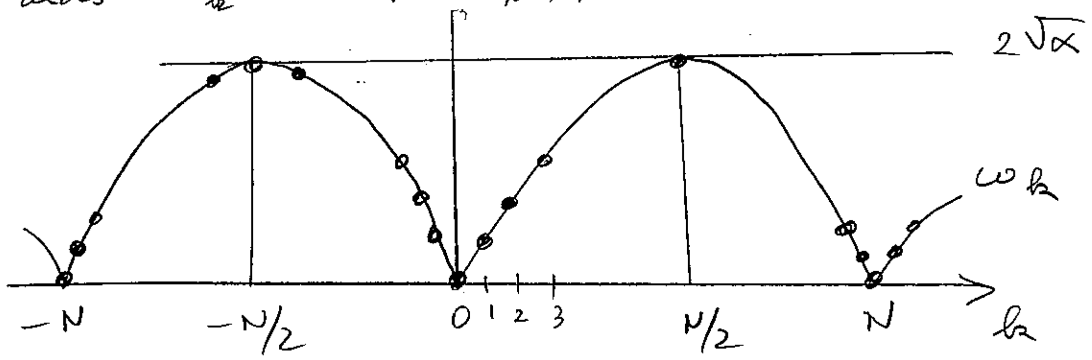
avec $$\omega_k = \left(K + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right)^{1/2}$$

④ • si $K>0$



rem : si N est pair, il y a une valeur en $k=\frac{N}{2}$.

• si $K=0$ alors $\omega_k = 2\sqrt{\alpha}\left|\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|$



⑤
$$\{z_k, z_l\} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\pi_k \,,\, \sqrt{\sigma_l}\,\phi_l + \frac{i}{\sqrt{\sigma_l}}\pi_l\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\{\phi_k, \pi_l\} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\{\pi_k, \phi_l\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j,m} e^{-i\frac{2\pi}{N}(jk+ml)}\left(\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\underbrace{\{q_j, p_m\}}_{\delta_{j,m}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\underbrace{\{p_j, q_m\}}_{-\delta_{j,m}}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k+l)}\right)}_{\delta_{k,-l}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}} - \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_{-l}}} - \sqrt{\frac{\sigma_{-l}}{\sigma_l}}\right) = 0 \qquad \text{car } \sigma_l = \sigma_{-l}$$

donc
$$\{z_k, z_l\} = 0$$

$$\{z_k, z_l^*\} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\pi_k\,,\ \sqrt{\sigma_l}\,\phi_l^* - \frac{i}{\sqrt{\sigma_l}}\pi_l^*\right\}$$

$$= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\,\{\phi_k, \pi_l^*\} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\,\{\pi_k, \phi_l^*\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j,m} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk + i\frac{2\pi}{N}ml}\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\underbrace{\{q_j, p_m\}}_{\delta_{j,m}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\underbrace{\{p_j, q_m\}}_{-\delta_{j,m}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-l)}\right)\left(-\frac{i}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}} + \sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\right)$$

$$= (-i)\,\delta_{k,l}$$

donc $$\{z_k, z_l^*\} = (-i)\,\delta_{k,l}$$

⑥ Si $k \neq l$ les résultats sont nuls.

on a $z_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - i\,P_k)$,

donc $X_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k + z_k^*)$ $P_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(z_k^* - z_k)$

$$\{X_k, P_k\} = \frac{i}{2}\left(\underbrace{\{z_k, z_k^*\}}_{(-i)} - \underbrace{\{z_k^*, z_k\}}_{(i)}\right) = 1$$

donc

X_k, P_k sont des <u>variables canoniques</u>.

(7) On a

$$X_k^2 + P_k^2 = 2\,|z_k|^2$$
$$= \sigma_k\, \phi_k^* \phi_k + \frac{1}{\sigma_k} \pi_k^* \pi_k$$

donc

$$\sum_k \sigma_k \frac{1}{2}\left(X_k^2 + P_k^2\right) = \sum_k \frac{1}{2}\left(\pi_k^* \pi_k + \sigma_k^2 \phi_k^* \phi_k\right)$$
$$= H$$

avec le choix $\sigma_k = \omega_k$.

Commentaire : H est une somme d'oscillateurs harmoniques indépendants, appelés <u>modes propres</u>.

(8) • Pour le mode k, on a le mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$\begin{cases} \dot{X}_k = \dfrac{\partial H}{\partial P_k} = \omega_k P_k \\ \dot{P}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial X_k} = -\omega_k X_k \end{cases}$$

$\rightarrow \quad \dot{z}_k = \dot{X}_k + i \dot{P}_k = \omega_k P_k - i\omega_k X_k = -i\omega_k z_k$

$\rightarrow \quad z_k(t) = z_k(0) \cdot e^{-i\omega_k \cdot t}$: tourne à la fréquence ω_k.

• On a $\phi_{-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ijk\frac{2\pi}{N}} q_j = \phi_k^*$

de même $\pi_{-k} = \pi_k^*$

• <u>Si $k=0$</u> alors ϕ_0, π_0 sont réels ; Supposons $\omega_0 \neq 0$.

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} X_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} X_0(0) \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha_0)$$

(1) alors $q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ijk\frac{2\pi}{N}} \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N\omega_0}} X_0(0) \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$

: position indép^t de j.

<u>rem</u> : si $\omega_0 = 0$ alors il n'y a pas de mode $k=0$.

- si $\underline{N \text{ est pair}}$, et $k = \frac{N}{2}$, alors $-k = k \mod N$,

donc ϕ_k, π_k sont réels,

donc (avec $k=\frac{N}{2}$) $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} X_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} X_k(0) \cos(\omega_k t + \alpha)$

alors $q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ijk\frac{2\pi}{N}} \phi_k(t)$

(2) $$q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{e^{i.j.\pi}}_{(-1)^j} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} X_k(0) \cos(\omega_k t + \alpha)$$

- $\underline{\text{Sinon}}$ $\left(k \neq 0, \text{ et } k \neq \frac{N}{2}\right)$,

$-k \neq k$ donc

$$0 = z_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_k}\, \phi_{-k} + \frac{i}{\sqrt{\omega_{-k}}} \pi_{-k}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_k}\, \phi_k^* + \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} \pi_k^*\right)$$

$\Leftrightarrow$ $$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_k}\, \phi_k - \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} \pi_k\right)$$

or $$z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_k}\, \phi_k + \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} \pi_k\right)$$

donc $$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} z_k(0)\, e^{-i\omega_k t}$$

$$\phi_{-k}(t) = (\phi_k(t))^*$$

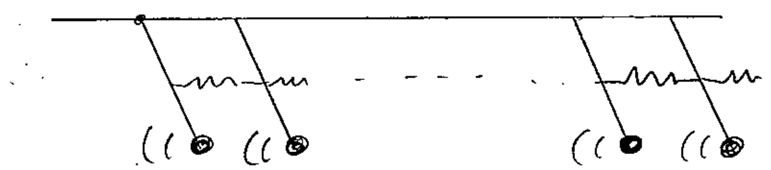
$$q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \phi_k(t) + c.c.\right)$$

(3) $$q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2N\omega_k}} \cos\left(2\pi \frac{jk}{N} - \omega_k t + \alpha\right)$$

Aspect de la chaîne :

- Mode $k=0$, supposant $\omega_0 \neq 0$. (ssi $K \neq 0$).

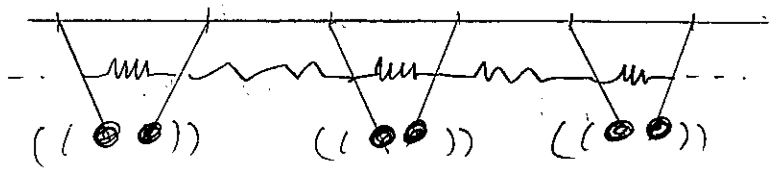
alors d'après (3-1),



tous les pendules oscillent en phase à la fréquence ω_0.

- Mode $k = \frac{N}{2}$ (si N pair).

alors d'après (3-2),



les pendules oscillent en opposition 2 à 2 à la fréquence $\omega_{N/2}$.

- Mode k quelconque ($k \neq 0$ et $k \neq \frac{N}{2}$)

d'après (3-3), les écarts $q_j(t)$ forment une onde progressive.

La position x_j du pendule j est $x_j = j \cdot \frac{L}{N}$

et les points de phase constante sont :

$$2\pi \frac{jk}{N} - \omega_k t = cste$$

$$\Longleftrightarrow x_j = \frac{j}{N} L = \frac{\omega_k L}{2\pi k} \cdot t + cste$$

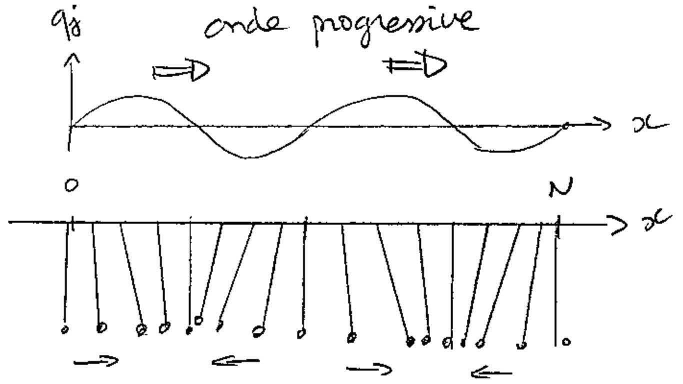
La vitesse de phase est donc : $v_k = \frac{\omega_k L}{2\pi \cdot k}$

La longueur d'onde est $\lambda_k = \frac{\Delta j \cdot L}{N} = \frac{L}{k}$

avec $2\pi \frac{\Delta j \cdot k}{N} = 2\pi \Longleftrightarrow \frac{\Delta j}{N} = \frac{1}{k}$

ex : $k = 2$

pendules :



⑨ D'après l'expression de $H(q_0, \dots, q_{N-1}, p_0, \dots, p_{N-1})$, pour j fixé, on a

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} = p_j \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} = -K q_j - \dfrac{1}{2}\alpha (\Delta x)^2 \left(\dfrac{\partial}{\partial q_j} \displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} (\nabla q)_l^2 \right) \end{cases}$$

or $$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_l (\nabla q)_l^2 \right) = 2 \sum_l (\nabla q)_l \frac{\partial}{\partial q_j} (\nabla q)_l = 2 \sum_l (\nabla q)_l \frac{1}{\Delta x} \Big(\underbrace{\frac{\partial q_{l+1}}{\partial q_j}}_{\delta_{j,l+1}} - \underbrace{\frac{\partial q_l}{\partial q_j}}_{\delta_{j,l}} \Big)$$

$$= \frac{-2}{\Delta x} \left((\nabla q)_j - (\nabla q)_{j-1} \right) = -2 (\Delta q)_j$$

donc

$$\ddot{q}_j = \dot{p}_j = -K q_j + \alpha (\Delta x)^2 (\Delta q)_j$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} - c^2 (\Delta q)_j + \frac{(Mc^2)^2}{\hbar^2} q_j = 0} \qquad (*)$$

en posant $c^2 = \alpha (\Delta x)^2 = \left(\dfrac{\alpha}{N^2} \right) . L^2 = \tilde{\alpha} . L^2$

avec $\tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha}{N^2}$: "raideur renormalisée"

et $\dfrac{(Mc^2)^2}{\hbar^2} = K \Longleftrightarrow \left(\dfrac{M}{\hbar} \right) = \dfrac{\sqrt{K}}{c^2} = \dfrac{\sqrt{K}}{\tilde{\alpha} L^2}$

. A la limite $N \to \infty$, le laplacien discret tend vers $\Delta q = \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2}$.

Alors l'onde plane $q(x,t) = \exp\left(-i \dfrac{Et}{\hbar} + i \dfrac{p.x}{\hbar} \right)$ est solution de (*),

si $\boxed{E^2 - (pc)^2 = (Mc^2)^2}$: "équation relativiste".