

# Fonctions holomorphes et physique

notes de F.Faure

janvier 2007

Notes de cours en L2 option magistère avec CatrionaMac-Lean.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Propagation de la chaleur</b>	<b>5</b>
1.1	A une dimension $x$	5
1.1.1	Energie $E(x, t)$ et température $T$	5
1.1.2	Flux (ou courant) d'énergie $J(x, t)$	6
1.1.3	Diffusion de la chaleur	7
1.1.4	Equation de la chaleur	7
1.2	A deux dimensions $(x, y)$	8
1.3	Solutions particulières de l'équation de la chaleur	11
1.3.1	Exercice : solution stationnaire à 1 dimension. Barre de longueur $L$	11
1.3.2	Mur soumis aux variations journalière de températures	12
1.3.3	Cas stationnaire à 2D	13
1.4	Exemples de champs thermiques à 2Dim stationnaires, à partir de fonctions holomorphes données	17
1.4.1	Source de chaleur à l'origine	17
1.4.2	Doublet source-puits de même intensité $S > 0$	18
1.4.3	Baguette chaude ; fonction de Joukowski	19
1.4.4	Le théorème de la moyenne (*)	19
1.5	Calcul numérique de la solution à l'équation de la chaleur (*)	20
<b>2</b>	<b>Electrostatique</b>	<b>23</b>
2.1	A deux dimensions et sans charge, $\rho = 0$	24
2.1.1	Charge ponctuelle à 2Dim	24
2.1.2	Dipole électrique	25
<b>3</b>	<b>Ecoulement d'un fluide à 2 Dim</b>	<b>27</b>
3.1	Exemples :	28
3.1.1	Fonction quadratique	28
3.1.2	Exemples des dièdres	29
3.1.3	Sources et Tourbillons	31
3.1.4	Courant autour d'un cylindre	31

Remarque : les marques (\*) signifient que le paragraphe peut être sauté en première lecture.



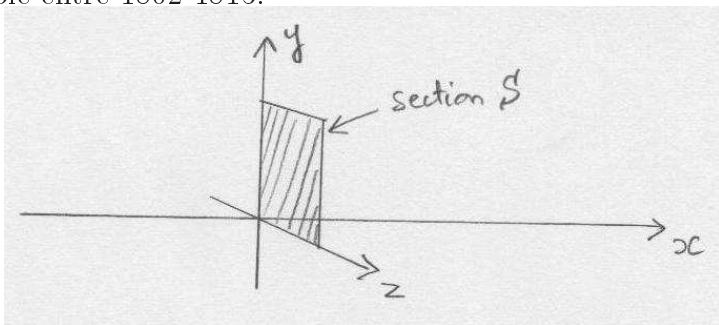
# Chapitre 1

## Propagation de la chaleur

### 1.1 A une dimension $x$

On considère une barre qui conduit la chaleur (matériau métallique par exemple). On décrira la propagation de la chaleur dans cette barre qui est “infinie” le long de l’axe  $x$ , et de section transverse  $S$ , selon les axes  $y, z$ . Toutes les quantités considérées sont supposées ne pas dépendre de  $y$  ni de  $z$ , mais seulement de  $x$ . Pour cela le problème est “à une dimension”.

Remarque : Joseph Fourier faisait de telles expériences dans son appartement à Grenoble entre 1802-1815.



#### 1.1.1 Energie $E(x, t)$ et température $T$

Ce qui suit est valable pour un gaz ou un solide. La **température**  $T$  est reliée à l'énergie d'agitation des atomes et des molécules. L'unité de température est le **Kelvin** K. (Rappel :  $T_{(Kelvin)} = T_{Celsius} + 273K$ ).

On note  $E_m$  **l'énergie d'une mole de matériau**. Rappel : **une mole** est un ensemble de  $\mathcal{N}$  atomes ou molécules, où  $\mathcal{N} = 6.02 \cdot 10^{23}$  est le nombre d'Avogadro. L'unité d'énergie est le **Joule**  $J$ . Cette énergie  $E_m(T)$  dépend de la température  $T$ , et on note :

$$C_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dE_m}{dT}$$

appelée **capacité calorifique molaire** (C'est une dérivée, qui peut dépendre de  $T$ ).

On établit (en physique statistique, Loi d'équipartition de l'énergie de Dulong et Petit (1810)) que pour un gaz :

$$C_m = \frac{3}{2}R$$

où  $R = 8,1 \text{ J/K}$ , et pour un solide à température ambiante :

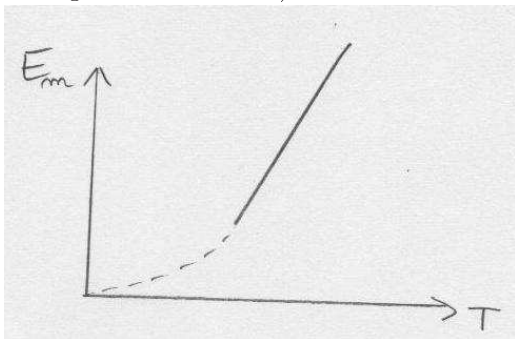
$$C_m = 3R$$

(A basse température, Einstein en 1907 a montré que les effets quantiques modifient ce résultat).

Ainsi :

$$E_m(T) = C_m T + C_{ste}$$

( $C_{ste}$  signifie constante).



On note  $E(x, t)$  la **densité d'énergie** (en  $\text{J/m}^3$ ), c'est à dire que  $E(x, t) dx S$  est l'énergie emmagasinée dans la barre dans la tranche  $[x, x + dx]$  à la date  $t$ .

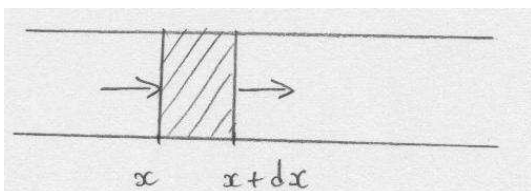
Si  $n(x, t)$  est la densité molaire (nombre de moles par unité de volume), noter que  $E = E_m n$ .

### 1.1.2 Flux (ou courant) d'énergie $J(x, t)$

On note  $J(x, t)$  le **courant d'énergie** (ou **flux**), c'est à dire que  $(J(x, t) S)$  est l'énergie qui traverse la section  $S$  par unité de temps (dans le sens  $x$  positif). Son unité est donc  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  (rappel 1 Watt = 1 Joule / 1 sec).

En considérant une tranche  $[x, x + dx]$ , la **conservation de l'énergie** stipule que la variation d'énergie dans la tranche est due à un flux sur le côté  $x$  ou le côté  $(x + dx)$  de la tranche. Cela s'écrit :

$$S dx \frac{dE}{dt}(x, t) = J(x) S - J(x + dx, t) S$$



soit

$$\frac{dE}{dt} = - \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)$$

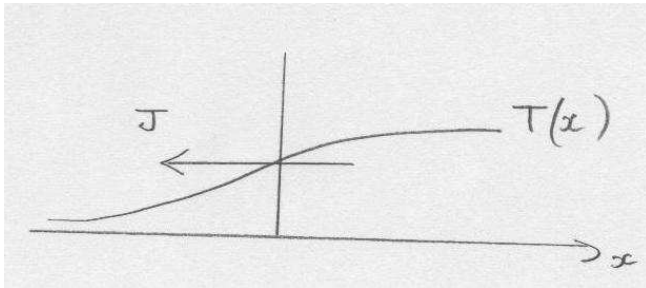
Remarque : on a supposé qu'il n'y a pas de source ou d'absorption de l'énergie dans la barre, sinon il faudrait rajouter un terme.

### 1.1.3 Diffusion de la chaleur

En physique statistique, on montre (conséquence du 2ème principe de la thermodynamique ou croissance de l'entropie) que si les températures sont inégales dans un matériau, alors il y a **transfert d'énergie de la partie chaude vers la partie plus froide**, jusqu'à éventuellement équilibre des températures. Plus précisément,

$$J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

où  $\kappa$  est appelé **coefficient de conductivité thermique**, son unité est  $\frac{W}{mK}$ .



On distingue deux classes de matériaux :

1. Les matériaux isolants dans lesquels il n'y a pas "d'électron libre". Le transfert de la chaleur se fait alors par les vibrations locales des atomes ("phonons"), et le transfert de la chaleur est donc lent. Ainsi  $\kappa$  est faible. Ces matériaux sont à la fois des isolants électriques et des isolants thermiques. Exemple : cuillère en bois.
2. Les matériaux conducteur dans lesquels le transfert de la chaleur se fait par les électrons libres légers et rapides. Donc  $\kappa$  est grand. Exemple : cuillère en métal.

Exemples :

Matériau	Eau	Verre	Béton	Aluminium	Cuivre	CO2	Laine de verre
$\kappa$ en $\left(\frac{W}{mK}\right)$	0.6	0.8	0.8	238	397	$1.5 \cdot 10^{-2}$	0.06

### 1.1.4 Equation de la chaleur

Le but est de décrire le comportement de la température dans le matériau et en fonction du temps :  $T(x, t)$ .

Rappels : on a établi ci-dessus que

$$E = E_m n = C_m n T + Cste$$

$$\frac{dE}{dt} = - \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)$$

$$J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

On obtient alors  $C_m n \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  soit

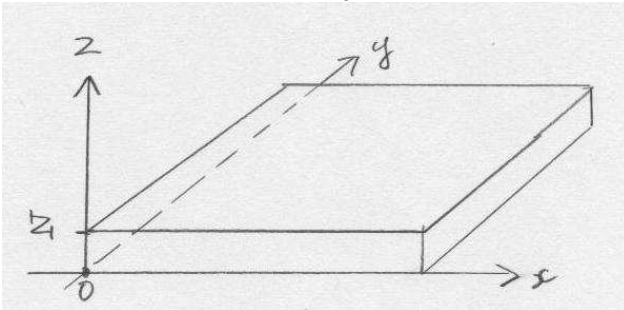
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\kappa}{C_m n} \right) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)}$$

appelée **équation de la chaleur**.

Le terme de gauche est la variation temporelle de la température en un point du matériau. Le terme de droite est lié à la variation spatiale de la température à un instant donné.

## 1.2 A deux dimensions $(x, y)$

On considère maintenant un plaque de matériau, d'épaisseur faible  $Z$  selon l'axe  $z$ , et infinie ou de grande dimension dans les directions  $x, y$ . On suppose que les quantités considérées dépendent de  $x, y$ , mais pas de  $z$ .



On va suivre la même démarche que dans le paragraphe précédent. Ce qui change, est que maintenant les grandeurs dépendent de  $x$  et  $y$  :

$E(x, y, t)$  : densité volumique d'énergie

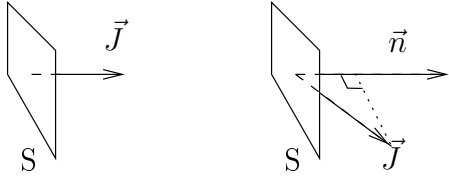
$\vec{J}(x, y, t) = (J_x, J_y)$  : densité de flux d'énergie

$T(x, y, t)$  : température

ce qui signifie que  $E dx dy Z$  est l'énergie contenue dans la petite colonne  $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ , et que si  $S$  est une (petite) surface orthogonale à l'axe  $x$ , alors  $J_x S$  est l'énergie passant par  $S$  par unité de temps (de même pour  $J_y$ ). Plus généralement, si la surface  $S$  admet



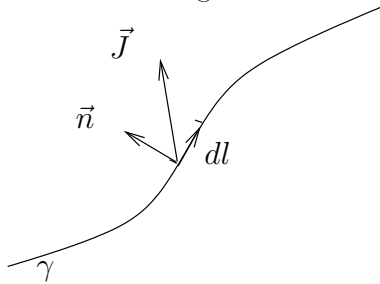
$\vec{n}$  comme vecteur normal, alors  $(\vec{J} \cdot \vec{n}) S$  est l'énergie qui passe par  $S$  par unité de temps.



**Exercice :** Si  $\gamma$  est une courbe orientée dans le plan  $(x, y)$ , montrer que

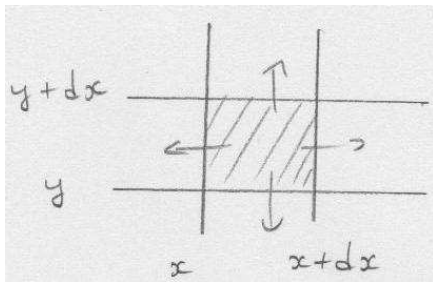
$$I = Z \int_{\gamma} (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl \quad (1.1)$$

est l'énergie qui passe par la surface  $\gamma \times Z$  par unité de temps, où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la courbe le long de la courbe, et  $dl$  est un élément de longueur le long de la courbe.



Solution : on pose :  $dS = Z \cdot dl$  : élément de surface. D'après ci-dessus,  $I = \int (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS = Z \int_{\gamma} (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl$ .

**Conservation de l'énergie :** On considère le petit carré  $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ .



La conservation d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} (Z dx dy) \frac{\partial E}{\partial t} &= (J_x(x, y) dy - J_x(x + dx, y) dy + J_y(x, y) dx - J_y(x, y + dy) dy) Z \\ &= - \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) (dx dy Z) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}}$$

avec

$$\operatorname{div} \vec{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y}$$

**Loi de diffusion :**

$$J_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad J_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y},$$

ce qui s'écrit

$$\vec{J} = -\kappa \operatorname{grad} T$$

avec

$$\operatorname{grad}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{cases}$$

Remarque : dans un matériau non isotrope  $\kappa$  peut dépendre des directions, ce serait une matrice (“un tenseur”).

**Equation de la chaleur :** Combinant les équations précédentes, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{(C_m n)} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{(C_m n)} \operatorname{div}(\vec{J}) = \left( \frac{\kappa}{C_m n} \right) \operatorname{div}(\operatorname{grad}(T))$$

or

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(T)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \Delta T$$

avec

$$\Delta T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\kappa}{C_m n} \right) \Delta T}$$

**Exercice :** Montrer que à trois dimensions, où  $T(x, y, z, t)$  dépend de  $x, y, z, t$ , l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\kappa}{C_m n} \right) \Delta T$$

avec

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2}$$

**Régime stationnaire :** L'équation de la chaleur régit l'évolution de la température dans le matériau. La température n'évolue pas, si  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , soit

$$\Delta T = 0$$

On dit que c'est un **régime stationnaire**. Cette équation s'appelle **l'équation de Laplace**.

Souvent des conditions au bord du matériau sont fixées : température  $T$  imposée, ou flux d'énergie  $\vec{J}$  imposé.

## 1.3 Solutions particulières de l'équation de la chaleur

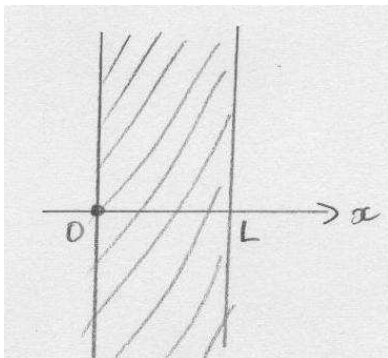
### 1.3.1 Exercice : solution stationnaire à 1 dimension. Barre de longueur $L$

On considère une barre de longueur  $L$ , disposée selon l'axe  $x$ . On impose les températures  $T_1, T_2$  aux extrémités de la barre :

$$T(x=0) = T_1, \quad T(x=L) = T_2,$$

La température  $T(x, t)$  dans la barre évolue d'après l'équation de la chaleur  $\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\kappa}{c_m n}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , où  $c_m$  est la capacité calorifique molaire,  $n$  la densité molaire, et  $\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique.

1. Donner la répartition de température dans la barre en régime stationnaire (i.e.  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ )?
2. Dédire la densité de flux d'énergie  $J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ .
3. Application numérique : Calculer l'énergie perdue en 1 heure à travers un mur de béton d'une maison (non isolée) de surface  $3 \times 2 = 6m^2$ , d'épaisseur  $L = 20cm$ , et soumis aux températures de part et d'autre : "température externe" :  $T_1 = 0C^0$ , "température interne"  $T_2 = 20C^0$  ? Dédire le coût ? (données :  $\kappa_{\text{béton}} = 0.8 W/(m.K)$ , prix du kWh = 0,1euros)



**Solution :**

1. Il faut résoudre  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = a \Leftrightarrow T(x) = ax + b$ , avec  $a, b$  à déterminer :  $T(0) = b = T_1$ , et  $T(L) = aL + b = T_2$ , donc  $a = \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{\delta T}{L}$ , donc

$$T(x) = \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1$$

2.  $J(x) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) = -\kappa \frac{\delta T}{L} < 0$ . Remarque : seul  $\kappa$  intervient, et pas la capacité calorifique  $C_m$ .
3. A. :  $S = 6m^2$ .  $t = 3600s$ ,  $|J| = 80W/m^2$ .

$$\mathcal{E}_{perdue} = S |J| t = 480 Wh$$

soit 0.05 euro.

**1.3.2 Mur soumis aux variations journalière de températures**

On considère une vieille maison aux murs de pierre épais. On note  $x$  l'axe perpendiculaire au mur, et  $x = 0$  la surface extérieure du mur. Dehors, la température oscille comme

$$T(x=0, t) = \Re(T_0 e^{-i\omega t} + \bar{T}) = T_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \bar{T}$$

avec la fréquence  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et  $T = 1$  jour.  $T_0 = 5C^0$  est l'amplitude, et  $\bar{T} = 20C^0$  est la température moyenne. La chaleur pénètre dans les murs d'après l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\kappa}{c_m n} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où  $c_m$  est la capacité calorifique molaire, et  $n$  la densité molaire,  $\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique.

1. Tracer  $T(x=0, t)$  en fonction de  $t$ .
2. En notations complexes, trouver l'évolution de la température dans le mur sous la forme  $T(x, t) = \Re(T_0 e^{-i\omega t - kx} + \bar{T})$  (trouver  $k$ ). Tracer l'allure de  $T(x, t)$  en fonction de  $x$ . Observer les oscillations et donner l'expression de la longueur d'onde  $l$ . Déduire l'expression de "l'épaisseur idéale"  $E$  d'un mur de pierre qui inverserait les températures jour/nuit, entre l'intérieur et l'extérieur de la maison.
3. Application numérique : Déduire  $E$  sachant que  $\kappa_{\text{pierre}} = 0.8 W/(m.K)$ ,  $c_m = 3R = 25 J/K$ , Masse volumique  $\mathcal{M} = 10^3 kg/m^3$ , Masse molaire  $\mathcal{M}_{mol} = 12g$ .

**Solution :** On obtient :

$$-i\omega f T_0 e^{-i\omega t} = \left( \frac{\kappa}{C_m n} \right) f'' T_0 e^{-i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow f'' + i \left( \frac{\omega C_m n}{\kappa} \right) f = 0$$

On cherche une solution sous la forme  $f(x) = e^{-kx}$ , avec  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(k) > 0$ . Alors  $k^2 = -i \frac{\omega C_m n}{\kappa}$ , soit

$$k = (1 - i) \frac{2\pi}{l}$$

avec

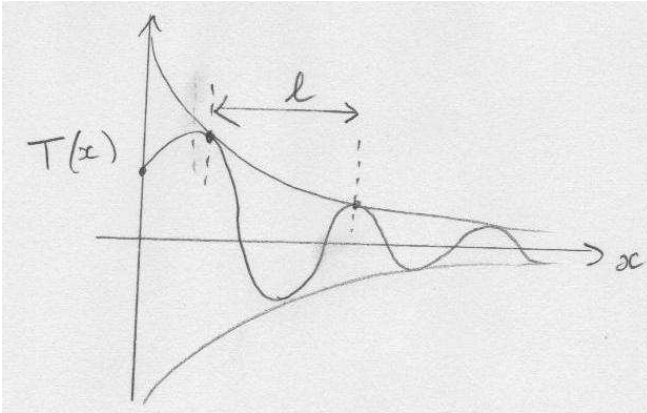
$$l = 2\pi \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega C_m n}}$$

La solution est donc

$$T(x, t) = T_0 e^{i2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{\tau} \right)} e^{-2\pi \frac{x}{l}}$$

Soit en réalité :

$$T(x, t) = T_0 \Re \left( e^{i2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{\tau} \right)} e^{-2\pi \frac{x}{l}} \right) = T_0 e^{-2\pi \frac{x}{l}} \cos \left( 2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{\tau} \right) \right)$$



Cela donne une onde oscillante de longueur d'onde  $l$  qui se propage et s'atténue dans le mur, à la vitesse  $v = \frac{l}{\tau}$  (car phase  $0 = \frac{x}{l} - \frac{t}{\tau} \Leftrightarrow x = \left( \frac{l}{\tau} \right) t$ ).

A.N. : On calcule  $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{M} \frac{M}{V} = 10^5 \text{ mol/m}^3$ .  $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ jour}} \simeq 10^{-4} \text{ Hz}$ . On obtient  $l = 60 \text{ cm}$ .

Remarquer que la capacité calorifique  $C_m$  intervient dans ce résultat.

### 1.3.3 Cas stationnaire à 2D

On suppose que le champ de température n'évolue pas :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . Alors d'après l'équation de la chaleur :

$$\Delta T = 0$$

**Notations :** Posons :

$$P(x, y) = T(x, y)$$

On a  $\Delta P = 0$ .

**Rappel de mathématiques :** (Voir cours de math., ref : [2] p.202.).

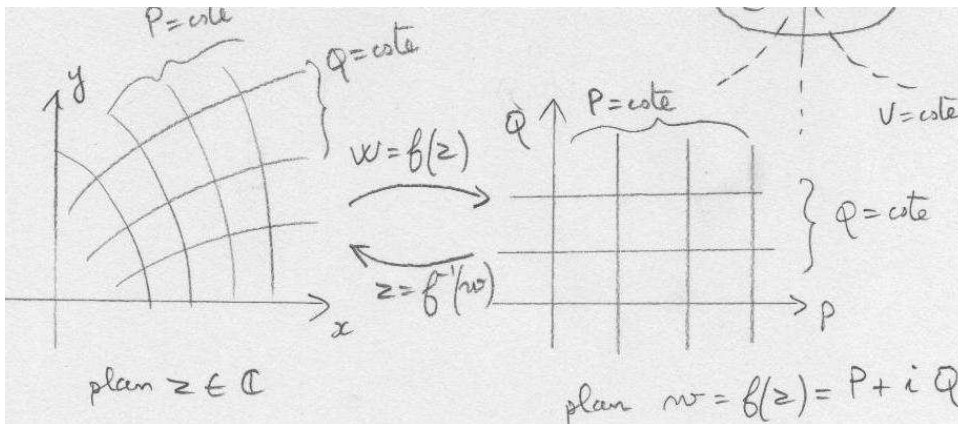
A deux dimensions  $(x, y)$ , si  $\Delta P = 0$  dans un domaine (i.e.  $P$  est harmonique), alors localement il existe une fonction harmonique conjuguée  $Q(x, y)$ ; i.e.  $\Delta Q = 0$ , t.q.

$$\partial_x P = \partial_y Q, \quad \partial_y P = -\partial_x Q : \quad \text{Cauchy-Riemann}$$

$$w = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y) : \quad \text{fonction holomorphe}$$

On note

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$



Comme  $f$  est holomorphe, alors les lignes de niveaux  $Q = cste$  et  $P = cste$  forment un réseau orthogonal.

$Q$  est donnée par :

$$Q(z) - Q(z_0) = \int_{z_0}^z (-\partial_y P dx + \partial_x P dy) = \int_{z_0}^z dQ$$

avec  $z_0$  point arbitraire et  $Q(z_0) = C$  valeur arbitraire. L'intégrale est le long d'un chemin  $\gamma$  reliant  $z_0$  à  $z$ . Le résultat ne dépend pas du choix du chemin.

On appelle :

$Q$  : fonction de courant thermique

$P$  : potentiel complexe

Remarques :

- ici  $P = T$  est univaluée (uniforme), mais  $Q$  peut être multivaluée (multiforme).

– Par définition à 2 Dim :

$$\vec{grad}(P) = \begin{cases} \partial_x P \\ \partial_y P \end{cases}, \quad \text{rot}(\vec{v}) = \partial_x v_y - \partial_y v_x \quad \vec{rot}(Q) = \begin{cases} \partial_y Q \\ -\partial_x Q \end{cases}$$

On a :

$$\text{rot}(\vec{grad}(P)) = 0.$$

où  $P, Q$  sont des fonctions et  $\vec{v}$  est un champ de vecteur. On peut donc écrire d'après les équations de Cauchy-Riemann :

$$\vec{grad}(P) = \vec{rot}(Q)$$

– **Exercice** : Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \partial_x P + i\partial_y P = \partial_y Q - i\partial_x Q \\ &\equiv \vec{grad}(P) = \vec{rot}(Q) \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Solution** :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \partial_x (P + iQ) \frac{\partial x}{\partial z} + \partial_y (P + iQ) \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_x P + i\partial_x Q) - \frac{i}{2} (\partial_y P + i\partial_y Q) \\ &= \partial_x P - i\partial_y P = \partial_y Q + i\partial_x Q \end{aligned}$$

### Sens physique de la fonction conjuguée $Q$

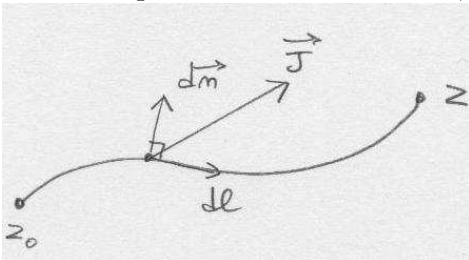
Rappel : le flux d'énergie est

$$\vec{J} = -\kappa \vec{grad}(T) = -\kappa \vec{grad}(P) = -\kappa \vec{rot}(Q)$$

Soit  $\gamma$  un chemin de  $z_0$  à  $z$  dans le plan  $(x, y)$ . Soit

$$I_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl$$

le flux d'énergie à travers le chemin  $\gamma$ , d'après Eq.(1.1).



**Exercice :** montrer que

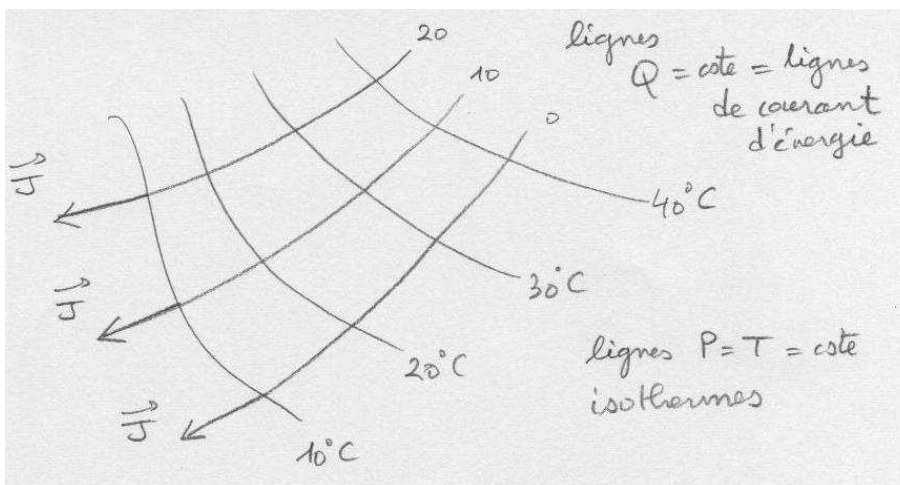
$$I_\gamma = \kappa (Q(z) - Q(z_0))$$

**Solution :** tout d'abord, si  $dl = dx$ , alors  $\vec{J} \cdot \vec{n} = J_y$ , et si  $dl = dy$ , alors  $\vec{J} \cdot \vec{n} = -J_x$ , donc

$$\begin{aligned} (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl &= J_y dx - J_x dy \\ &= \kappa (\partial_x Q dx + \partial_y Q dy) = \kappa dQ \end{aligned}$$

donc  $I_\gamma = \int_\gamma (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl = \kappa \int_\gamma dQ = \kappa (Q(z) - Q(z_0))$ .

**Propriété :** Les lignes  $Q(z) = cste$  sont les lignes de flux d'énergie, c'est à dire tangentes au champ de vecteur  $\vec{J}$ . Ces lignes sont orthogonales aux lignes d'isotherme  $P = T = cste$ .



**Sens physique de  $\frac{df}{dz}(z) \in \mathbb{C}$**

**Exercice :** Montrer que  $\vec{J} \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$  ( $\vec{J} = J_x + iJ_y \in \mathbb{C}$ ), s'exprime à partir de  $\frac{df}{dz}(z) \in \mathbb{C}$  :

$$\vec{J} = -\kappa \frac{df}{dz}$$

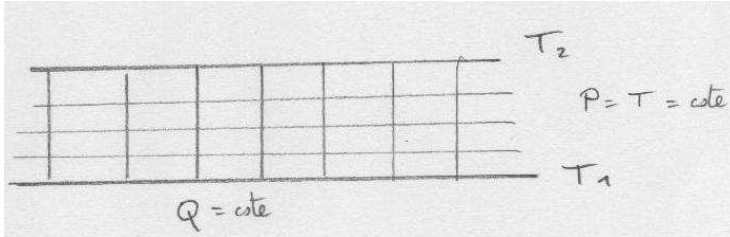
**Solution :** avec Eq.(1.2).



## 1.4 Exemples de champs thermiques à 2Dim stationnaires, à partir de fonctions holomorphes données

Rappel : on se donne  $f(z) = P(z) + iQ(z)$  avec  $P(z) = T(z)$  qui doit être univaluée.

**Exercice :** Deux plaques chaudes.



Trouver la fonction holomorphe associée  $f(z)$ .

**Solution :**

$$P(x, y) = T(y) = \frac{\delta T}{L}x + T_1$$

$$Q(x, y) = -\frac{\delta T}{L}x + cste$$

$$f(z) = -i\frac{\delta T}{L}z + cste$$

### 1.4.1 Source de chaleur à l'origine

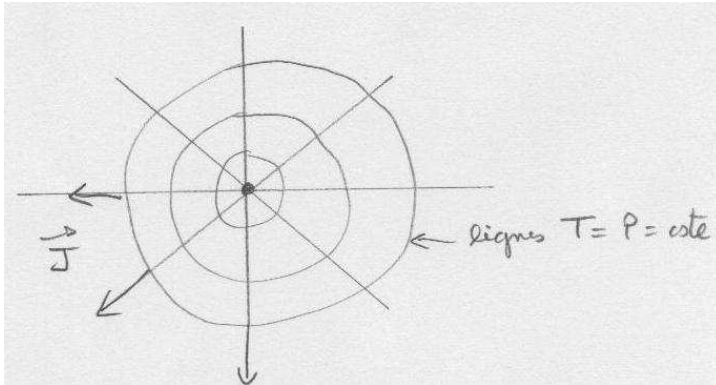
(à trois dimension, cela modélise un fil vertical). Soit

$$f(z) = \frac{S}{2\pi} \log(z) + C \tag{1.3}$$

avec  $C = a + ib$ , et  $S < 0$ .

On écrit en coordonnées polaires  $z = re^{i\theta}$ , donc  $\log z = \log r + i\theta$ . Alors

$$\begin{cases} P(z) = \frac{S}{2\pi} \log r + a : & \text{univaluée} \\ Q(z) = \frac{S}{2\pi} \theta + b : & \text{multivaluée} \end{cases}$$



**Exercice :**

1. calcul de  $\vec{J} = -\kappa \text{grad}(T)$  ?

Solution :

$$\vec{J} = -\kappa \overline{f'(z)} = -\kappa \frac{S}{2\pi} \frac{1}{z} = -\kappa \frac{S}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{r}$$

donc le champ  $\vec{J}$  est radial. Ou directement, on écrit :  $\vec{J} = -\kappa \text{grad}(T) = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \vec{u}_r$ .

2. Calcul du flux d'énergie à travers le cercle  $\gamma$  de rayon  $r$  ? Solution :

$$I_\gamma = \kappa (Q(0) - Q(2\pi)) = -\kappa S > 0$$

Remarque : si  $S > 0$ , cela modélise un puits de chaleur.

### 1.4.2 Doublet source-puits de même intensité $S > 0$

**Exercice :** On positionne maintenant deux sources voisines. Autrement dit, on place une source ( $S$ ) donnée par Eq.(1.3), en  $(x, y) = (-a, 0)$ , et une source ( $-S$ ) en  $(x, y) = (a, 0)$ .

1. Donner l'expression de  $f(z)$ .
2. Donner les équations caractérisant les isothermes et les lignes de courant, et les tracer.

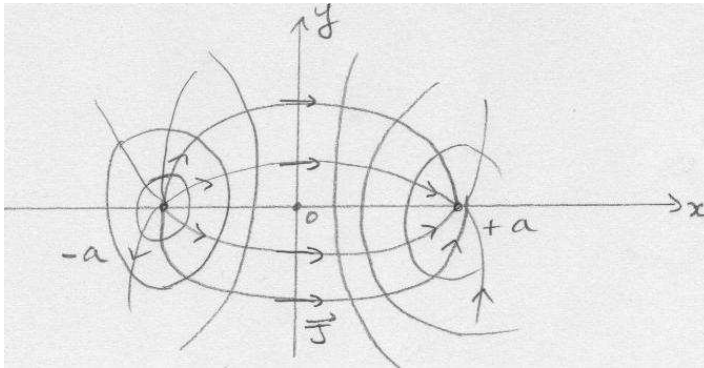
**Solution :** Soit  $a > 0$ , et

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{S}{2\pi} \log(z - a) - \frac{S}{2\pi} \log(z + a) \\ &= \frac{S}{2\pi} \log\left(\frac{z - a}{z + a}\right) \end{aligned}$$

Inversement :

$$z = \frac{a + e^{\frac{2\pi}{S}f}}{a - e^{\frac{2\pi}{S}f}}$$

#### 1.4. EXEMPLES DE CHAMPS THERMIQUES À 2DIM STATIONNAIRES, À PARTIR DE FONCTIONS



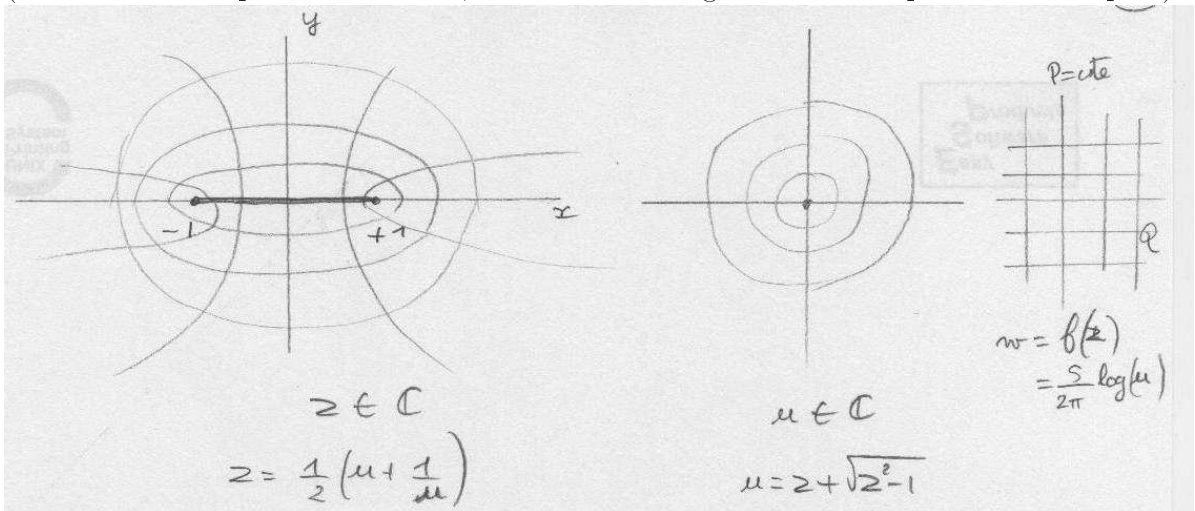
Les isothermes sont les lignes  $\left| \frac{z-a}{z+a} \right| = cste.$   
 Les lignes de courant sont  $\arg \left( \frac{z-a}{z+a} \right) = cste.$

#### 1.4.3 Baguette chaude ; fonction de Joukowski

Rappel de la fonction de Joukowski :

$$z = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) \Leftrightarrow u = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(En coordonnées polaires  $u = re^{i\theta}$ , on retrouve les lignes  $P = cste$  qui sont des ellipses).



**Exercice :** Une baguette chaude est placée sur l'intervalle  $[-1, +1]$ . Trouver  $f(z)$ .

**Solution :** les isothermes sont  $|u| = cste$ . Les lignes de courant sont  $\arg(u) = cste$ . Il faut  $f(z) = \frac{S}{2\pi} \log(u(z))$ .

#### 1.4.4 Le théorème de la moyenne (\*)

(rappel de mathématiques. Ref :[2] p.206).

**Théorème :** Si  $P(x, y)$  est continue et harmonique dans un cercle fermé de rayon  $r$  et de centre  $z$ , alors

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

**preuve :** On utilise la formule de Cauchy pour  $f(z)$  en  $z$ . On pose  $\zeta = z + re^{i\varphi}$ , donc  $d\zeta = re^{i\varphi} i d\varphi$  :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} (re^{i\varphi} i) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C f(z + re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

Ensuite, on l'applique à  $P = \Re(f)$ .

**Conséquences :** (**principe du maximum**) Si  $P$  n'est pas constante, alors elle ne peut pas atteindre une extremum en un point intérieur .

Remarques :

- Il y a aussi le principe du module maximum pour les fonctions analytiques. ([2] p.56)., et aussi le théorème de la moyenne.
- Le résultat est intuitif d'un point de vue physique, en interprétant  $P = T$  comme un champ de température stationnaire.

## 1.5 Calcul numérique de la solution à l'équation de la chaleur (\*)

$$\partial_t T = \Delta T$$

cette équation évolue vers une solution stationnaire  $\Delta T = 0$ .

(Rem : au contraire,  $\partial_t u = -\Delta u$  divergerait vers une "explosion")

**Algorithme :**

- On choisit un domaine fini
- On discrétise ce domaine, avec un pas  $h$ .
- On fixe les valeurs de  $T(z)$  aux bords.
- On approxime

$$(\Delta T)(z) \simeq \frac{1}{h^2} (T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j})$$

1.5. CALCUL NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION À L'ÉQUATION DE LA CHALEUR (\*)21

et on applique

$$\partial_t T_{ij} = (\Delta T)_{ij}$$

Voir exemple d'une simulation.



# Chapitre 2

## Electrostatique

On considère des charges immobiles ponctuelles, ou des densité de charges sur des condensateurs.

**Rappel des équations d'électrostatique :**

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad}(V)\end{aligned}$$

On obtient alors  $\Delta V = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(V)) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , soit **l'équation de Poisson** :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

**Remarque (\*) :** les équations de Maxwell plus générales sont :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{B} &= -\operatorname{rot} \vec{E} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \partial_t \vec{E} &= c^2 \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

et impliquent

$$\begin{cases} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \partial_t \vec{A} + \vec{E} &= -\operatorname{grad} V \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\vec{j}) &= 0 : \quad \text{conservation de la charge} \end{cases}$$

Il y a invariance de Jauge : on peut choisir aussi :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}(u), \quad V' = V - \partial_t u$$

avec  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  quelconque.

La “Jauge de Coulomb” est un choix de  $u$  tel que  $\Delta u = \text{div} \vec{A}'$ , alors  $\text{div} \vec{A} = 0$ , et donc

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

On obtient donc l'équation de Poisson en toute généralité.

## 2.1 A deux dimensions et sans charge, $\rho = 0$

Alors  $\Delta V = 0$ .  $V$  est une fonction harmonique. On pose :

$$P(x, y) = V(x, y) : \quad \text{potentiel}$$

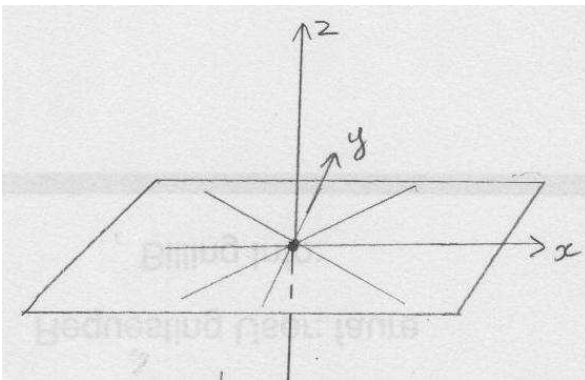
Analogie avec la chaleur :

Chaleur	Electrostatique
$\Delta T = 0$	$\Delta V = 0$
$\vec{J} = -\kappa \text{grad}(T) = -\kappa \vec{rot}(Q)$	$\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{rot}(Q)$
$Q(x, y)$ : fonction de courant thermique	$Q(x, y)$ : fonction de force

### 2.1.1 Charge ponctuelle à 2Dim

([2] p.255)

Cela correspond à un fil chargé à 3 Dim.



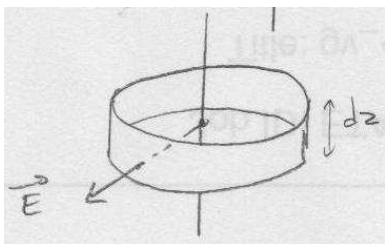
**Exercice :** avec le théorème de Gauss, montrer que

$$E(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r}$$

**Solution :** on considère une bande de rayon  $r$  et hauteur  $dz$ . Le flux de  $\vec{E}$  à travers celle-ci est

$$\phi = \frac{dz e}{\epsilon_0} = E(r) 2\pi r dz$$





Remarque : le fil est analogue à une source de température avec  $S = \frac{e}{\epsilon_0}$ .

Donc :

$$f(z) = \frac{S}{2\pi} \log(z) + cste$$

### 2.1.2 Dipole électrique

à 2Dim. [2] p.244.

C'est un doublet de charges  $(+e, -e)$ , à la distance  $d$ . On note  $p = ed$  fixé, et on fait  $d \rightarrow 0$ .

Voir l'exercice du doublet page 18.

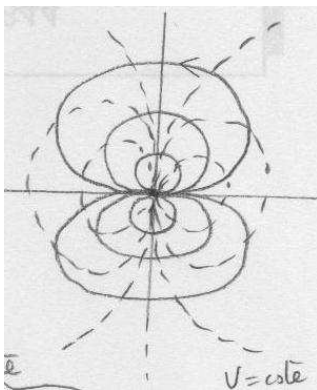
**Exercice :** exprimer  $f(z)$ . Dessiner les lignes  $V = cste$ , et les lignes de forces.

**Solution :**

$$\begin{aligned} f_d(z) &= \frac{e}{\epsilon_0 2\pi} \log(z+d) - \frac{e}{\epsilon_0 2\pi} \log(z) \\ &= \frac{p}{\epsilon_0 2\pi} \frac{\log(z+d) - \log(z)}{d} \end{aligned}$$

donc pour  $d \rightarrow 0$ ,

$$f(z) = \frac{p}{\epsilon_0 2\pi z}$$





# Chapitre 3

## Ecoulement d'un fluide à 2 Dim

Référence : [1], chapitre 6.

**Equation de la conservation de la masse :** Réf : [1] p.138.

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

preuve : considérer un volume et utiliser le théorème de Stokes.

**Propriété :**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

preuve :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho)$$

et

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho)$$

**Hypothèse de fluide incompressible :** c'est

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

donc

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0}$$

Alors

$$\boxed{\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho) = 0}$$

Remarques :

- on peut avoir  $\partial_t \rho \neq 0$  et  $\vec{\operatorname{grad}}\rho \neq 0$ .
- Il faut des vitesse  $\ll$  vitesse du son qui rétablit l'incompressibilité.

Conséquence de  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  :

à 3Dim, il existe  $\vec{A}$  t.q.  $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

à 2Dim, il existe  $Q$  appelée **fonction courant** t.q.  $\vec{v} = -\operatorname{rot} Q = (-\partial_y Q, \partial_x Q)$

**Hypothèse d'un fluide irrotationnel :** c'est

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0$$

Alors

$$\boxed{\Delta Q = 0}$$

Analogies à 2 Dim :

Chaleur	Electrostatique	Fluide incompressible
$\Delta T = 0, \quad P = T$	$\Delta V = 0, \quad P = V$	$\Delta Q = 0$
$\vec{J} = -\kappa \vec{grad}(T) = -\kappa \vec{rot}(Q)$	$\vec{E} = -\vec{grad}(V) = -\vec{rot}(Q)$	$\vec{v} = -\vec{rot}(Q) = -\vec{grad}(P)$
$Q$ : fonction courant thermique	$Q$ : fonction de force	$Q$ : fonction courant
$P$ univalué, $Q$ multivaluée	$P$ univaluée	$P, Q$ multivaluées
$I_\gamma = \int_\gamma (\vec{J} \cdot \vec{n}) dl =$ $-\kappa (Q(z_1) - Q(z_0))$ : flux d'énergie à travers $\gamma$		$I_\gamma = \int_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{n}) dl =$ $Q(z_1) - Q(z_0)$ : flux de matière à travers $\gamma$

## 3.1 Exemples :

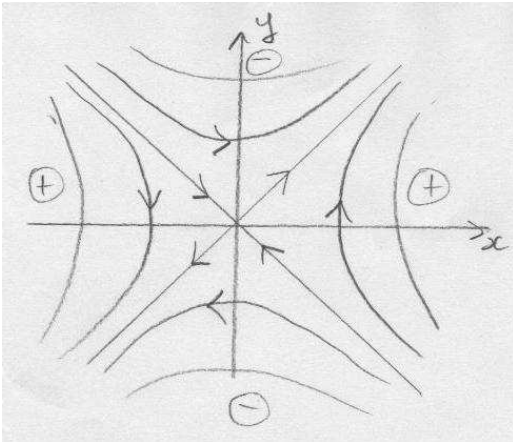
### 3.1.1 Fonction quadratique

([1] p.145).

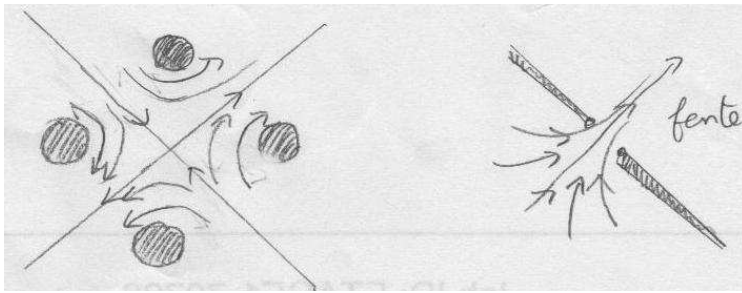
$$Q(x, y) = \frac{a}{2} (x^2 - y^2)$$

Alors

$$\vec{v} = (-\partial_y Q = ay, \partial_x Q = ax)$$



ce modèle se rencontre dans les situations :



On calcule :  $\partial_x P = \partial_y Q = -ay$ , et  $\partial_y P = -\partial_x Q = -ax$ . Donc  $P = -axy$ , et :

$$f(z) = P + iQ = a \left( -xy + \frac{i}{2} (x^2 - y^2) \right) = \frac{i}{2} az^2$$

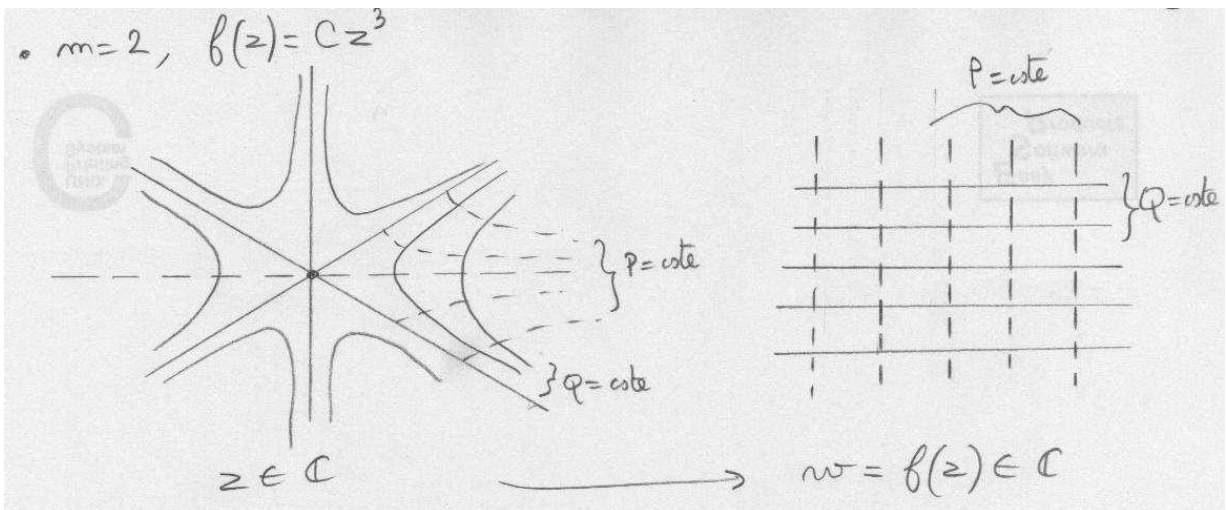
avec  $z = x + iy$ .

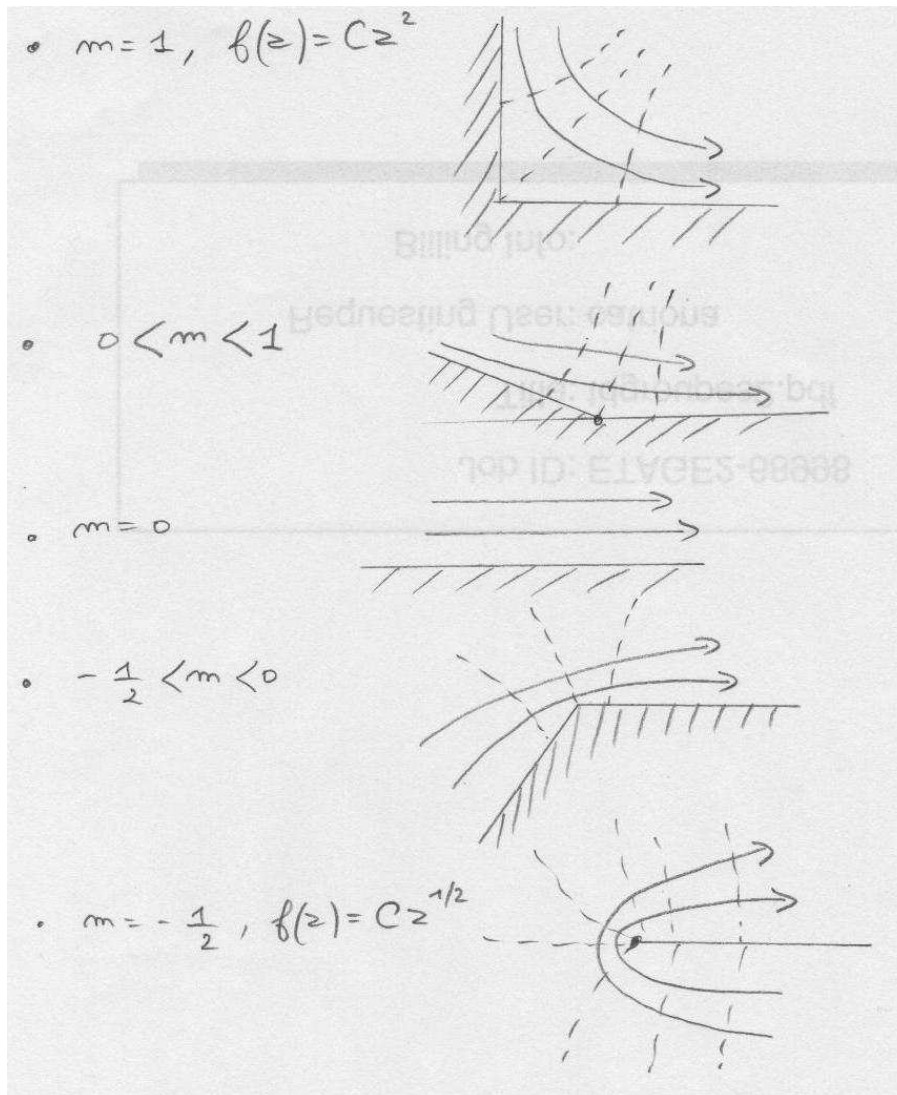
### 3.1.2 Exemples des dièdres

([1] p.342).

$$f(z) = Cz^{m+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

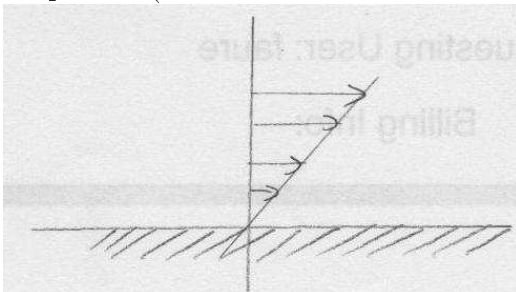
On pose  $z = e^{i\theta}$  alors  $Q = Cr^{m+1} \sin((m+1)\theta)$ .





### Remarques

- En réalité, à cause de la viscosité, il y a une couche limite, et la vitesse s'annule sur les parois. (Le fluide est rotationnel dans la couche limite, il y a du cisaillement.)



– **Exercice** : Montrer que

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|\text{grad}(Q)\|^2 = |\partial_r Q|^2 + \frac{1}{r^2} |\partial_\theta Q|^2 \\ &= C^2 r^{2m} (m+1)^2\end{aligned}$$

et pour  $r \rightarrow 0$ , si  $m > 0$  (forme concave), alors  $\|v\| \rightarrow 0$  : “pas de vent dans les vallées”.

si  $m < 0$  (forme convexe), alors  $\|v\| \rightarrow \infty$  : “fort vent sur les crêtes”. “Effet de pointe, pour l’orage”.

### 3.1.3 Sources et Tourbillons

$$f(z) = a \log(z), \quad a \in \mathbb{C}$$

Si

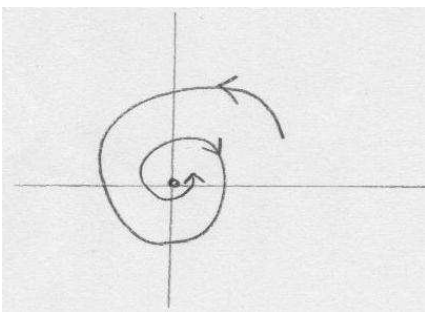
$$a = A + iB$$

alors

$$f(z) = P + iQ = (A \log r - B\theta) + i(B \log r + A\theta)$$

donc

$$Q = \text{cste} \Leftrightarrow r(\theta) = e^{Q/B} e^{-A\theta/B}$$



### 3.1.4 Courant autour d’un cylindre

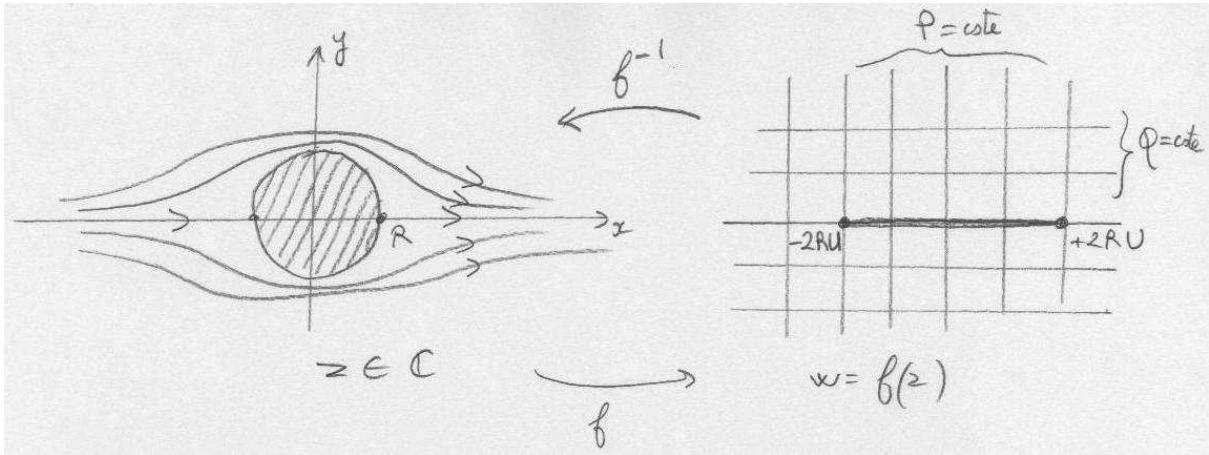
à 2Dim,

([1] p.315,p.345).

Soit

$$f(z) = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R > 0, \quad U > 0$$

Si  $z = r e^{i\theta}$ , alors  $f(z) = UR2 \cos \theta$ .





# Bibliographie

- [1] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. Edp Sciences, 2001.
- [2] M. Lavrentiev and B. Chabat. *Methodes de la theorie des fonctions d'une variable complexe*. 1972.