TD n^{o}6

1 Min-Max, formule variationnelle

[8, p.117][3, P.302][7, p.51][2, p.89].

1. Soit H un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Supposons que le bas de son spectre contienne des valeurs propres (en tenant compte de la multiplicité)

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n \ldots < \inf \sigma_{ess}(H)$$

Montrer que

$$\lambda_n = \inf_{L \subset \mathrm{Dom}(H), \dim L = n} \left(\sup_{u \in L, \|u\|=1} \langle u | H u \rangle \right)$$

$$\lambda_n = \sup_{L \subset \mathrm{Dom}(H), \dim L = n} \left(\inf_{u \in L^{\perp}, \|u\|=1} \langle u | H u \rangle \right)$$

2. Donner l'expression (simplifiée) pour λ_1.
3. Application : si $H^{(1)} \leq H^{(2)}$ sont deux opérateurs autoadjoints avec les hypothèses ci-dessus, montrer que pour tout n, $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$.
4. Application (voir [1, chap.5]) : dans $\mathbb{R}^n$, si deux ellipsoides E, E' centrés en 0 sont tels que $E' \subset E$, montrer que les demi-axes vérifient

$$a'_j \leq a_j, \quad j = 1 \ldots n$$

2 Transformation F.B.I. ou Bargman

Références : [5],[6, chap.3],[4].

Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, le but de cette transformation est de traiter simultanément le comportement local de u et le comportement local de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}u$. (On parle de "**comportement micro-local**").

Remarque : cette théorie est aussi similaire à la "**théorie des ondelettes**" en théorie du signal.

Soit $\hbar > 0$. Soit $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et le **paquet d'onde** défini par

$$\varphi_{(x,\xi)}(y) = a e^{i\xi \cdot \left(y - \frac{x}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2\hbar}|x-y|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad a = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}}$$

On définit la **transformation de F.B.I.** ou **transformée de Bargman** de $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\mathcal{T}u)(x, \xi) = \langle \varphi_{(x,\xi)} | u \rangle = \int \overline{\varphi_{(x,\xi)}}(y)\, u(y)\, dy \qquad \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$$

1. Montrer que

   (a) l'adjoint formel est

$$(\mathcal{T}^* v)(y) = \int \varphi_{(x,\xi)}(y)\, v(x, \xi) \frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$$

   . (noter que la mesure sur $\mathbb{R}^{2n}$ est $\frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$).

(b) $\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$

(c) $\mathcal{T}$ s'étend de façon unique à une isométrie $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

(d) $\mathcal{P} := \mathcal{T} \circ \mathcal{T}^*$ sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$. Calculer son noyau de Schwartz appelé **noyau de Bergman.**.

2. Posons $z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(x - i\hbar\xi) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\varphi_{(x,\xi)}(y) = a e^{-y^2/(2\hbar)} e^{zy\sqrt{\frac{2}{\hbar}}} e^{-z^2/2} e^{-z\overline{z}/2}.$$

On considère l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ des fonctions $e^{-z\overline{z}/2}\Phi(z)$ avec Φ holomorphe en $z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \bigcap \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \qquad \mathcal{T}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^{2n}) \bigcap \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \bigcap \mathcal{H}(\mathbb{C}^n), \qquad \mathcal{T}(H^s(\mathbb{R}^n)) = L^2\left(\mathbb{R}^{2n}, \langle\xi\rangle^{2s}\right) \bigcap \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

où $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev, $s \in \mathbb{R}$. Ainsi l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$ est représenté par un espace de fonctions très régulières puisque analytiques, mais sur $\mathbb{R}^{2n}$.

3. Sur $\mathbb{R}$, calculer $\mathcal{T}(\delta)$ où δ est la distribution de Dirac.

4. On défini le **micro-support** ou **Wave-Front** $WF(u)$ d'une distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par son complémentaire qui est un cône en ξ et contient les directions où $\mathcal{T}u$ décroit très rapidement :

$$(WF(u))^C := \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \forall N > 0, |(\mathcal{T}u)(x,\lambda\xi)| < \mathcal{O}\left(\lambda^{-N}\right)\right\}$$

Quel est $WF(\delta)$? et si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quel est $WF(u)$?

5. Sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{F} = e^{i\alpha}\mathcal{R}_{\pi/2} \circ \mathcal{T}$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier, $\mathcal{R}_{\pi/2}$ la rotation$(x,\xi) \to (\xi,-x)$ et α une phase.

6. Sur $\mathbb{R}$, si $a = \hat{x} + i\hbar\hat{\xi}$ est "l'opérateur création" montrer que ([5])

$$e^{z\overline{z}/2}(\mathcal{T}a\mathcal{T}^*v)(x,\xi) = z.v(x,\xi)$$

$$e^{z\overline{z}/2}(\mathcal{T}a^*\mathcal{T}^*v)(x,\xi) = \frac{d}{dz}v(x,\xi)$$

déduire que les monomes $\Phi(z) = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$ sont vecteurs propres de l'oscillateur harmonique a^*a.

Références

[1] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.

[2] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.

[3] C.R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, volume 54. Birkhauser, 2009.

[4] G. Folland. *Harmonic Analysis in phase space*. Princeton University Press, 1988.

[5] Hall, B.C. . Holomorphic Methods in Mathematical Physics. *Contemp. Math.*, 260 :1–59, 1999.

[6] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis.* Universitext. New York, NY : Springer, 2002.

[7] Gustafson S. and Sigal I. *Mathematical concepts of quantum mechanics.* Springer, 2000.

[8] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics : with applications to Schr "odinger operators*, volume 99. Amer Mathematical Society. Free, on the web page of the author, 2009.