TD n^{o}5

1 Opérateur Hilbert Schmidt

(réf [1, p.161])
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'opérateur

$$A = f\mathcal{F}^{-1}g\mathcal{F}$$

(où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier et f, g des opérateurs multiplication) est Hilbert Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|A\|_{H.S.} = \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

2 Hamiltonien de l'atome d'hydrogène

ref : [2, p.159], [5, p.222],[3, p.151].
On considère l'opérateur suivant sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$Hu := -\Delta u + Vu$$

où V est le "potentiel" : l'opérateur multiplication par une fonction V :

$$V = V_2 + V_\infty, \qquad V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3), V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$$

1. Utilisant le théorème de Kato-Rellich et l'exercice précédent montrer que H est auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H) = \mathrm{Dom}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$ et que H est borné inférieurement.
2. Application : peut on appliquer le résultat précédent au potentiel de l'atome d'hydrogène : $V(x) = -\frac{C}{|x|}$ et plus généralement à $V(x) = -\frac{C}{|x|^\alpha}$ pour quelles valeurs de α ?

3 Opérateur de Landau

Sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$ on considère l'opérateur de Landau

$$H := \frac{1}{2}\left((D_x - A_x)^2 + (D_y - A_y)^2\right)$$

de domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ avec $D_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$,$D_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$, $A_x = -\frac{1}{2}By$, $A_y = \frac{1}{2}Bx$ et $B > 0$.

1. En physique cet opérateur décrit un électron dans le plan (x, y) soumis à un champ magnétique transverse d'amplitude B. Le vecteur$\vec{A} = (A_x, A_y)$ est appelé le potentiel vecteur. Montrer que $\mathrm{rot}\vec{A} = B$.

2. On introduit les opérateurs suivant

$$\begin{cases} \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(D_x + \frac{B}{2}y\right) \\ \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(D_y - \frac{B}{2}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(D_x - \frac{B}{2}y\right) \\ \hat{p} = -\frac{1}{\sqrt{B}}\left(D_y + \frac{B}{2}x\right) \end{cases},$$

Exprimer H à partir de ces opérateurs. Calculer les commutateurs entres ces opérateurs. Que suggère ce résultat ?

3. Remarquer que inversement $D_x = \frac{\sqrt{B}}{2}\left(\hat{q} + \hat{Q}\right)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\hat{Q} - \hat{q}\right)$. On considère donc l'opérateur (Transformée de Fourier en x)

$$\mathcal{F}_x : \begin{cases} \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) & \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ u\left(x,y\right) & \to v\left(\xi_x, y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi_x x} u\left(x,y\right) dx \end{cases}$$

et l'opérateur

$$U_2 : \begin{cases} \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) & \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ v\left(\xi_x, y\right) & \to w\left(q,Q\right) = v\left(M\left(q,Q\right)\right) \end{cases}$$

où M est l'application linéaire : $M : (q,Q) \to \left(\xi_x = \frac{\sqrt{B}}{2}\left(q+Q\right), y = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(Q-q\right)\right)$. Finalement

$$U := U_2 \circ \mathcal{F}_x : \begin{cases} \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) & \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ u\left(x,y\right) & \to w\left(q,Q\right) \end{cases}$$

Montrer que $U : L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ est unitaire et que

$$\left(U\hat{Q}U^{-1}w\right)\left(q,Q\right) = Qw\left(q,Q\right), \qquad \left(U\hat{P}U^{-1}w\right)\left(q,Q\right) = -i\frac{\partial w}{\partial Q}\left(q,Q\right)$$

$$\left(U\hat{q}U^{-1}w\right)\left(q,Q\right) = qw\left(q,Q\right), \qquad \left(U\hat{p}U^{-1}w\right)\left(q,Q\right) = -i\frac{\partial w}{\partial q}\left(q,Q\right)$$

4. Finalement déduire l'expression de l'opérateur UHU^{-1} et reconnaissant l'**oscillateur harmonique** déduire son spectre avec multiplicité. Les valeurs propres sont appelées **niveaux de Landau**.

Remarque : dans cet exercice on a effectué une **"transformation canonique quantique"** afin de résoudre le problème. La théorie correspondante est celle de la **géométrie symplectique linéaire** et du **groupe métaplectique**. Références : [4].

Références

[1] E.B. Davies. *Linear operators and their spectra.* Cambridge University Press, 2007.

[2] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.

[3] C.R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, volume 54. Birkhauser, 2009.

[4] G. Folland. *Harmonic Analysis in phase space.* Princeton University Press, 1988.

[5] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics : with applications to Schr "odinger operators*, volume 99. Amer Mathematical Society. Free, on the web page of the author, 2009.