TD n^{o}4

1 Convergence d'opérateurs

[2, chap.6]

Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, on considère l'opérateur de rang 1 : $T_n := |\psi\rangle\langle\varphi_n|$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\|T_n u\| \to 0$ pour $n \to \infty$. Donc $T_n \to 0$ pour la topologie forte et la topologie faible.
2. Montrer que $\|T_n\| = 1$ pour tout n. Donc $T_n \nrightarrow 0$ ne converge pas en "norme opérateur".
3. Considérer maintenant l'opérateur adjoint T_n^*. Montrer que $T_n^* \nrightarrow 0$ ne converge pas en topologie forte mais $T_n^* \to 0$ en topologie faible.

2 Opérateur différentiel à coefficients constants

réf : Davies 1995, chap.3.

On utilise les notations : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $D^\alpha := \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. On considère sur $\mathbb{R}^n$ l'opérateur différentiel

$$P = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

On suppose que $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et ses dérivées $D^\beta a_\alpha$ sont à croissance au plus polynomiale.

Le **symbole** de P est la fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$$

1. Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrer que P s'obtient à partir de son symbole par la formule :

$$(Pu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ix\xi} p(x,\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)\, d\xi$$

   où $(\mathcal{F}u)(\xi)$ est la transformée de Fourier de u.

2. On suppose que les coefficients $a_\alpha(x) = a_\alpha$ sont tous **constants et réels**. Montrer que $\mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}$ est un opérateur multiplication et déduire que P est essentiellement autoadjoint sur $\mathrm{Dom}(P) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   Montrer que

$$\sigma(P) = \sigma_{ess.}(P) = \overline{\{p(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n\}}, \qquad \sigma_{ponct.}(P) = \emptyset.$$

   Dans quel cas peut on avoir $\sigma(P) = [\lambda, +\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$?

3 Algèbre de Heisenberg

réf : [2, p.274]

Sur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on définit les opérateurs position X et impulsion D par $(Xu)(x) = xu(x)$, $(Du)(x) := -i\frac{du}{dx}$.

1. Montrer que $[X, D] = i\mathrm{Id}$.
2. Inversement montrer que si A, B sont des opérateurs auto-adjoints vérifiant la relation $[A, B] = i\mathrm{Id}$ alors A, B ne peuvent pas être bornés tous les deux. (Aide : utiliser $AB^n - BA^n = inB^n$).

4 Groupe de Heisenberg

ref : [3, p.4],[1].

Sur $\mathbb{R}^n$ on note $X := (X_1, \ldots, X_n)$, $(X_i u)(x) = x_i u(x)$ l'opérateur position et $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$ l'opérateur impulsion.

1. Pour $q \in \mathbb{R}^n$,$p \in \mathbb{R}^n$,$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrer que

$$\left(e^{ip.X}u\right)(x) = e^{ip.x}u(x), \qquad \left(e^{-iq.D}u\right)(x) = u(x-q)$$

et

$$\mathcal{F}\left(\left(e^{ip.X}u\right)\right)(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi - p), \qquad \mathcal{F}\left(\left(e^{-iq.D}u\right)\right)(\xi) = e^{-iq.\xi}(\mathcal{F}u)(\xi)$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier. Interpréter $e^{-iq.D}$ et $e^{ip.X}$ comme des **opérateurs de translation** de (q, p) dans $\mathbb{R}^{2n}$.

2. Montrer la relation

$$e^{-iqD}e^{ipX} = e^{ipX}e^{-iqD}e^{-iqp}$$

et déduire que en posant :

$$z = (q, p, t) \in \mathcal{H}_n := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$\pi(z) := e^{it}e^{ipX}e^{-iqD}$$

on a la relation :

$$\pi(z)\,\pi\left(z'\right) = \pi\left(z.z'\right)$$

avec la relation du **groupe de Heisenberg** :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n & \to & \mathcal{H}_n \\ \left(z, z'\right) & \to & z.z' = \left(q + q', p + p', t + t' - pq'\right) \end{array}$$

Autrement dit π est une représentation unitaire du groupe $\mathcal{H}_n$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. (irréductible, voir [1]).

3. Utilisant $[X_i, D_{jk}] = i\mathrm{Id}\delta_{j,k}$, montrer l' autre expression possible :

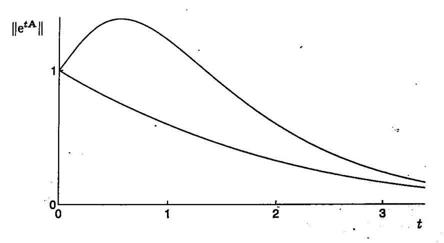
$$\pi(z) = e^{it}e^{ipX}e^{-iqD} = e^{i\left(t + \frac{qp}{2}\right)}e^{ipX - iqD}$$

5 Pseudo spectre d'une matrice

Réf : Trefethen, "Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators".

Soit $A \in M_n$ une matrice $n \times n$.

1. Montrer que
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \left\| e^{tA} \right\| = \alpha(A)$$
avec $\alpha(A) := \sup\limits_{z \in \sigma(A)} \Re(z)$. (Aide : on utilisera l'intégrale de Dunford : $e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \supset \sigma(A)} (z - A)^{-1} e^{tz} dz$)
2. Montrer que
$$\frac{d}{dt} \left\| e^{tA} \right\|_{/t=0} = \omega(A)$$
avec $\omega(A) := \sup\limits_{\lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}(A + A^*)\right)} \lambda$.
3. Si A est une matrice normale, montrer que $\omega(A) = \alpha(A)$.
4. Exemple : $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Parmi les deux courbes ci-dessous, identifier A_1 et A_2 :



6 Matrice de Jordan

Soit $J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de Jordan $n \times n$. On note $B(r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

1. Si $\delta > 0$ montrer que le pseudo-spectre $\sigma_\delta(J_n)$ vérifie
$$B\left(\delta^{1/n}\right) \subset \sigma_\delta(J_n) \subset B\left((\delta n)^{1/n}\right)$$
(Aide : pour la première inclusion on utilisera le vecteur $e := \left(1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\right)$ avec $|z| \leq \delta^{1/n}$. Pour la deuxième inclusion, on montrera que $R_{J_n}(z) = -\frac{1}{z} \ldots - \frac{J^{n-1}}{z^n}$).
2. Montrer que l'image numérique est $\mathcal{N}(J_n) = B(r)$ avec $r = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.
3. Considérer la matrice "perturbée" $A_\delta := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \delta & & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le spectre de A_δ.

Références

[1] G. Folland. *Harmonic Analysis in phase space.* Princeton University Press, 1988.

[2] M. Reed and B. Simon. *Mathematical methods in physics, vol I : Functional Analysis.* Academic press, New York, 1972.

[3] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol II.* Springer, 1996.