TD n^{o}2

Extensions auto-adjointes. Propriétés d'opérateurs auto-adjoints

1 Opérateur impulsion sur $]0,1[$

référence : [1, p.59,p.74]

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, et l'opérateur

$$(H\varphi)(x) = -i\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \varphi \in \mathrm{Dom}(H) = C_0^\infty([0,1])$$

1. Montrer que H est symétrique.
2. Montrer que $\mathrm{Dom}(H^*) = H^1([0,1])$(espace de Sobolev) et que $H^*\psi = -i\frac{d\psi}{dx}$ au sens des distributions, pour $\psi \in H^1([0,1])$.
3. On définit l'espace de déficience $L^+ := (\mathrm{Ran}(H+i))^\perp = \mathrm{Ker}(H^* - i)$. Montrer que

$$L^+ := \mathrm{Span}\left(e^{-x}\right)$$

et de même

$$L^- := (\mathrm{Ran}(H-i))^\perp = \mathrm{Ker}(H^* + i) = \mathrm{Span}\left(e^{+x}\right)$$

Conclusion sur l'existence d'extensions autoadjointes de H ?

4. Donner les expressions des extensions possibles de l'opérateur de Cayley unitaire

$$U_{ext} : L^+ \to L^-$$

Utilisant le fait général qu'une extension essentiellement autoadjointe est de la forme :

$$\mathrm{Dom}\left(\tilde{H}\right) = \mathrm{Dom}(H) \bigoplus (1 - U_{ext})\left(L^+\right)$$

déduire que les extensions auto-adjointes de H sont :

$$\mathrm{Dom}(H_\theta) = \left\{\varphi \in H^1([0,1]), \quad \varphi(1) = e^{i\theta}\varphi(0)\right\} : \text{"condition périodique"}\theta \in [0, 2\pi[$$

$$H_\theta\varphi = -i\frac{d\varphi}{dx}$$

2 Particule libre sur $\mathbb{R}$

référence : [1, p.60]

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, et l'opérateur

$$(H\varphi)(x) = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad \varphi \in \mathrm{Dom}(H) = C_0^\infty(\mathbb{R})$$

1. Montrer que H est symétrique.
2. Montrer que $\text{Dom}\left(H^*\right) = H^2\left(\mathbb{R}\right)$(espace de Sobolev) et que $H^*\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2}$ au sens des distributions.
3. Montrer que les espaces de déficience sont

$$L^+ := \left(\text{Ran}\left(H+i\right)\right)^\perp = \text{Ker}\left(H^* - i\right) = \{0\}$$

$$L^- := \left(\text{Ran}\left(H-i\right)\right)^\perp = \text{Ker}\left(H^* + i\right) = \{0\}$$

Déduire que H est essentiellement auto-adjoint.

3 Critère de Weyl

[2, p.51]
Supposons $H = H^*$ c'est à dire H auto-adjoint.

1. Montrer que le spectre résiduel est vide

$$\sigma_{res.}\left(H\right) = \emptyset$$

(rappel : $\sigma_{res.}\left(H\right) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Ker}\left(H-\lambda\right) = \{0\} \text{ et } \text{Ran}\left(H-\lambda\right) \subset \mathcal{H} \text{ pas dense}\}$)
2. Montrer le **"critère de Weyl"** :

$$\lambda \in \sigma\left(H\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbf{Dom}\left(H\right), \|u_n\| = 1, \|\left(H-\lambda\right)u_n\| \to 0 \textbf{ pour } n \to \infty$$

Références

[1] C.R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, volume 54. Birkhauser, 2009.

[2] P.D. Hislop and I.M. Sigal. *Introduction to Spectral Theory with Applications to Schrödinger Operators.* Springer, 1996.