Annexe A

Solution des exercices

A.1 Chapitre Analyse

Exercice 1.0.4 page 13

— La fonction $\log(.)$ est C^∞ sur $(0,\infty)$ et $e^{(.)}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $e^{\alpha \log|x|}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
— Pour $x > 0$, on a $f(x) = e^{\alpha \log|x|}$, $f'(x) = \alpha e^{(\alpha-1)\log|x|}, \ldots, f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)e^{(\alpha-}$
— Pour $x \to 0$, on a $f(x) \to 0$ donc f est C^0 en $x = 0$.
— Si $0 < \alpha < 1$, on a $\alpha - 1 < 0$ donc $f'(x) \to \infty$ donc f n'est pas C^1.
— Si $1 < \alpha < 2$, on a $f'(x) \to 0$ donc f est pas C^1 mais $\alpha - 2 < 0$ donc $f^{(2)}(x) \to \infty$ donc f n'est pas C^2. Etc...
— Dans le cas particulier $\alpha = 1$, alors $f'(x) = 1$, $f^{(2)}(x) = 0$ donc f est C^∞. De même si $\alpha \in \mathbb{N}$, $f^\alpha(x) = 1$ et f est C^∞.

Exercice 1.0.5 page 13 Par définition, si f est dérivable en $x = 0$, il faut que $\frac{f(y)-f(0)}{y} = \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ ait une limite pour $y \to 0$, $y \neq 0$. Ce n'est pas le cas, en effet, la suite $y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ donne $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = (-1)^n$ qui ne converge pas pour $n \to \infty$ (et $y_n \to 0$).

Exercice 1.0.19 page 22

1. On développe en série :

$$e^{-\frac{g}{4}x^4} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(-\frac{g}{4}x^4\right)^n$$

Alors

$$
\begin{aligned}
Z(g) &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{g}{4}x^4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-g)^n}{n!4^n} \left(\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{4n} \right) \\
&\underbrace{=}_{Gauss} \sum_{n\geq 0} \frac{(-g)^n (4n-1)!!}{n!4^n} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-g)^n (4n)!}{n!4^n 4^n (2n)!} = \sum_{n\geq 0} g^n Z_n
\end{aligned}
$$

avec

$$
Z_n = \frac{(-1)^n (4n)!}{n!4^n 4^n (2n)!} \underbrace{\sim}_{Stirling} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{4n}{e} \right)^n
$$

On obtient donc que le coefficient de la série $g^n Z_n$ diverge comme $(gn)^n$ pour tout $g > 0$. Le rayon de convergence est nul, et donc la fonction $Z(g)$ n'est pas analytique en $g = 0$.

2. Comme $V_g(x) \geq V_0(x)$, la dérivée n-ième de $Z(g)$ vérifie pour $g \geq 0$

$$
Z^{(n)}(g) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-V_g(x)} \left(\frac{x^4}{4} \right)^n \leq Z^{(n)}(0)
$$

donc le reste de la formule de Taylor donne

$$
R_n \leq \frac{g^{n+1}}{(n+1)!} \left| Z^{(n)}(0) \right| = g^{n+1} |Z_{n+1}|
$$

3. On a $M(n) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{4gn}{e} \right)^n$ donc $L(n) := \log(M(n)) \simeq n \log\left(\frac{4gn}{e} \right) - \frac{1}{2}\log(\pi n)$. On cherche le minimum en considérant $n \in \mathbb{R}$:

$$
0 = \frac{dL}{dn} = \log\left(\frac{4gn}{e} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \Leftrightarrow 4gn \simeq 1
$$

donc

$$
n_0 \simeq \frac{1}{4g}
$$

Alors

$$
M_{min}(g) = M(n_0) \simeq \sqrt{\frac{4g}{\pi}} e^{-n_0} \simeq \sqrt{\frac{4g}{\pi}} e^{-\frac{1}{4g}}
$$

qui est une fonction plate en $g = 0$. Pour $g = 0.1$, on calcule $n_0 = 2$ et $M_{min} \simeq 0.1$. Pour $g = 0.01$, on calcule $n_0 = 25$ et $M_{min} \simeq 10^{-11}$.

Exercice 2.0.2 page 25 Si $n \neq 0$, observons tout d'abord que

$$e^{-i2\pi nx} = \frac{i}{2\pi n}\partial_x\left(e^{-i2\pi nx}\right)$$

On fait une intégration par parties dans la 2eme ligne :

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^1 xe^{-i2\pi nx}dx = \frac{i}{2\pi n}\int_0^1 x\partial_x\left(e^{-i2\pi nx}\right)dx \\ &= \frac{i}{2\pi n}\left[xe^{-i2\pi nx}\right]_0^1 - \frac{i}{2\pi n}\underbrace{\int_0^1 e^{-i2\pi nx}\,dx}_{=0} \\ &= \frac{i}{2\pi n}\end{aligned} \tag{A.1.1}$$

Si $n = 0$,

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.0.9 page 29 On a d'une part

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

et d'autre part d'après l'égalité de Parseval et le résultat (2.0.2)

$$\frac{1}{3} = \|f\|_{L^2}^2 \underbrace{=}_{Parseval} \left\|\hat{f}\right\|_{l^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2^2} + 2\sum_{n\geq 1}\left|\frac{1}{2\pi n}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3.0.6 page 35

C'est assez analogue au calcul de (3.0.6). On a $\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\xi x}dx}{1+x^2}$. Pour refermer le contour, il faut distinguer deux cas, $\xi \geq 0$ et $\xi \leq 0$.

En coordonnées polaires $z = Re^{i\theta}$ on a

$$e^{-i\xi z} = e^{-i\xi Re^{i\theta}} = e^{-i\xi R(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{-i\xi R\cos\theta}e^{\xi R\sin\theta}$$

Donc $\left|e^{-i\xi z}\right| \leq e^{\xi R\sin\theta}$.

Si $\xi \geq 0$, il faut refermer l'intervalle d'intégration $z \in]-R;+R[$ par le demi cercle inférieur $\tilde{\gamma}_R := Re^{i\theta}, \theta = 0 \to -\pi$ dans le sens indirect car $\sin\theta \leq 0$ donc $e^{\xi R \sin\theta} \leq 1$ et

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} dz \right| &\leq \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta} e^{-i\xi z}}{1+R^2 e^{i2\theta}} d\theta \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{Re^{\xi R \sin\theta}}{R^2-1} d\theta \right| \\
&\leq \left| \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} d\theta \right| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc en notant la courbe fermée $\gamma_R :=]-R;+R[\cup \tilde{\gamma}_R$ on a

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} dz$$

Cette courbe entoure un pôle en $z = -i$ et

$$\frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} = \frac{e^{-i\xi z}}{(z-i)(z+i)} \underset{z=-i}{\simeq} \frac{e^{-\xi}}{-2i(z+i)}$$

alors avec la formule de résidu (un signe $-$ vient du changement de sens)

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\xi}}{(-2i)} (i2\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi}$$

Si $\xi \leq 0$ il faut refermer le contour par le demi-cercle supérieur contenant un pôle en $z = i$ et on obtient de façon similaire

$$\frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} = \frac{e^{-i\xi z}}{(z-i)(z+i)} \underset{z=i}{\simeq} \frac{e^{\xi}}{2i(z-i)}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\xi}}{2i} (i2\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi}$$

Au final pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a obtenu

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$$

Exercice 4.0.2 page 38

c'est une intégrale Gaussienne, voir (B.1.2), posant $A = \frac{1}{2\sigma^2}$, $B = i\xi$, $C = 0$,

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-ix.\xi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right) = \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}\xi^2}$$

Exercice 4.0.3 page 38 on écrit

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left(\int_0^\infty e^{-ix.\xi}e^{-x}dx + \int_0^\infty e^{ix.\xi}e^{-x}dx\right) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}}\Re\left(\int_0^\infty e^{ix.\xi}e^{-x}dx\right)$$

or $\int_0^\infty e^{ix.\xi}e^{-x}dx = \frac{1}{i\xi-1}\left[e^{(i\xi-1)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-i\xi} = \frac{1+i\xi}{1+\xi^2}$. Donc $(\mathcal{F}f)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$.

Exercice 4.0.4 page 38 Le paquet d'onde est

$$\varphi_{x_0,\xi_0}(x) := ae^{i\xi_0.x}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\sigma^2}}$$

avec $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\sigma > 0$, $a > 0$. Sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\varphi_{x_0,\xi_0})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi_{x_0,\xi_0}(x)\,dx \\ &= \frac{a}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.(\xi_0-\xi)}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{a}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x+x_0).(\xi_0-\xi)}e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}dx\end{aligned}$$

C'est une intégrale Gaussienne, voir (B.1.2), posant $A = \frac{1}{2\sigma^2}$, $B = i(\xi-\xi_0)$, $C = ix_0(\xi-\xi_0)$, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\varphi_{x_0,\xi_0})(\xi) &= \frac{a}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\pi}{A}\right)^{n/2}\exp\left(-C+\frac{B^2}{4A}\right) = \frac{a}{(2\pi)^{n/2}}\left(2\pi\sigma^2\right)^{n/2}\exp\left(-ix_0(\xi-\xi_0) - \frac{\sigma^2}{2}|\xi-\xi_0|^2\right) \\ &= a\sigma^n\exp\left(-ix_0(\xi-\xi_0) - \frac{\sigma^2}{2}|\xi-\xi_0|^2\right)\end{aligned}$$

Exercice 4.0.12 page 43 On pose $f(x) = (g*g)(x) = \int g(y)g(x-y)\,dy$. Le support de $g(y)$ est $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Le support de $g(x-y)$ est $\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right]$. L'intégrale est donc sur l'intersection des 2 supports. Ainsi si $|x| > 1$, les supports sont disjoints et donc $f(x) = 0$. Si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(x) = \int_{x-1/2}^{1/2} dy = 1-x$. Et si $-1 \leq x \leq 0$ alors $f(x) = \int_{-1/2}^{x+1/2} dy = x+1 = 1-|x|$. Donc f est la fonction tente (4.0.3). On calcule facilement si $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-i\xi}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-1/2}^{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)\end{aligned}$$

Avec (4.0.9) on déduit

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \sqrt{2\pi}\left((\mathcal{F}g)(\xi)\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^2$$

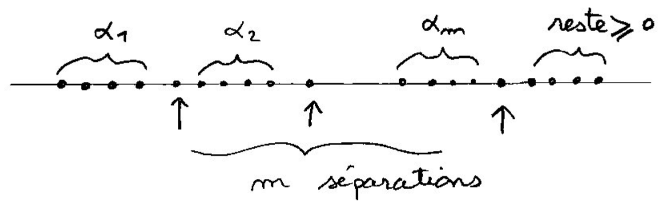
A.2 Chapitre algèbre

Exercice 6.0.5 page 55 Une base est formé par les monomes de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$$

avec la condition $\alpha_1 + \dots \alpha_m \leq d$. D'après la figure suivante, on déduit que

$$\dim(E_d) = C_{m+d}^m = \frac{(m+d)!}{m!d!}$$

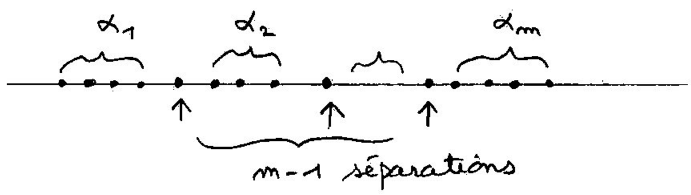


Exercice 6.0.6 page 55 Une base est formé par les monomes de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$$

avec la condition $\alpha_1 + \dots \alpha_m = d$. D'après la figure suivante, on déduit que

$$\dim(E_d) = C_{m+d-1}^{m-1} = \frac{(m+d-1)!}{(m-1)!d!}$$



Exercice 6.0.8 page 56

soit $u \in G$. Comme $G = Vect(E \bigcup F)$, on peut écrire

$$u = e + f, \qquad e \in E, f \in F$$

Montrons que e et f sont uniques. Si $u = e' + f' = e + f$ avec $e' \in E$, $f' \in F$ alors posons

$$v := \underbrace{(e' - e)}_{\in E} = \underbrace{(f' - f)}_{\in F}$$

donc $v \in (E \bigcap F) = \{0\}$ donc $v = 0 \Rightarrow e = e'$ et $f = f'$.

On a ainsi un isomorphisme

$$\begin{cases} G \to & E \oplus F \\ u \to & (e, f) \end{cases}$$

Exercice 7.0.6 page 61

Il y a deux sens à montrer. Supposons A est injective cad $\forall u, v, \quad (A(u) = A(v)) \Rightarrow (u = v)$. Soit $u \in Ker(A)$ c'est à dire $A(u) = 0 = A(0)$ donc $u = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Inversement, si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, supposons que $A(u) = A(v)$ alors $A(u - v) = 0$ (par linéarité) donc $u - v \in Ker(A)$ donc $u - v = 0$ donc $u = v$.

Exercice 7.0.7 page 61 soit $k_1, \dots k_m$ une base de $Ker(A)$ que l'on complète pour obtenir une base de E par $(e_{m+1}, \dots e_{m+n})$ (noter que $dim(E) = m + n$). On pose $f_j := A(e_{m+j})$ pour $j = 1, \dots n$. On vérifie que c'est une base de $Im(A)$ et que $\tilde{A}([e_{m+j}]) = f_j$ définit un isomorphisme entre $(E/\mathrm{Ker}(A))$ et $Im(A)$.

Exercice 7.0.8 page 61 On utilise le résultat général (7.0.4) : $\dim E - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. On écrit :

$$\begin{aligned} A \text{ injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow dim(Ker(A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad dim(Im(A)) = E \Leftrightarrow Im(A) = E \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ surjective} \end{aligned}$$

Concernant l'exemple sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il est clair que $u \in Ker(A)$ ssi $u = (u^1, 0 \dots)$. Donc A n'est pas injective ($\dim(Ker(A)) = 1$). Mais A est surjective.

Par contre $Ker(B) = \{0\}$, B est injective mais pas surjective, car le vecteur $(1, 0 \dots)$ n'est pas dans l'image.

En mécanique quantique, il y a la base $|n\rangle, n = 0, 1 \dots$, de "l'**oscillateur harmonique**" de l'espace $E = L^2(\mathbb{R})$, [13, chap.2]. L'opérateur création vérifie

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Soit $|u\rangle = \sum u^n |n\rangle \in E$. On a

$$a^+|u\rangle = \sum_{n\geq 0} u^n \left(a^+|n\rangle\right) = \sum_{n\geq 0} u^n \sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sum_{m\geq 1} u^{m-1}\sqrt{m}|m\rangle$$

donc par rapport à cette base,

$$a^+\left(u^0, u^1, \dots\right) = \left(0, u^0, \sqrt{2}u^1, \sqrt{3}u^2, \dots\right)$$

est similaire à l'opérateur B cidessus (injectif, pas surjectif). De même l'opérateur annihilation a vérifie :

$$a|n\rangle = n|n-1\rangle$$

Donc

$$a|u\rangle = \sum_n u^n \left(a|n\rangle\right) = \sum_{n\geq 1} u^n \sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{m\geq 0} u^{m+1}\sqrt{m+1}|m\rangle$$

ainsi

$$a\left(u^0, u^1, \dots\right) = \left(u^1, \sqrt{2}u^2, \sqrt{3}u^3, \dots\right)$$

est similaire à l'opérateur A (surjectif, pas injectif).

Exercice 8.0.3 page 66 $u \in E$ définit une application linéaire $\tilde{u} \in E^{**}$ par $\tilde{u}(\alpha) := \alpha(u) \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \in E^*$. L'application $\phi : u \in E \to \tilde{u} \in E^{**}$ ainsi définie est injective donc c'est un isomorphisme. (@@ montrer).

Exercice 8.0.4 page 66 si $\alpha \in F^*$ est un vecteur dual, on pose

$$A^*(\alpha) := \alpha(A(.)) : \quad E \to \mathbb{R} \tag{A.2.1}$$

qui est linéaire donc $A^*(\alpha) \in E^*$ c'est à dire que

$$A^* : \begin{cases} F^* & \to E^* \\ \alpha & \to \alpha(A(.)) \end{cases}$$

Autrement dit : $(A^*\alpha)(u) = \alpha(A(u))$ pour $u \in E$, ce qui s'écrit en notation de Dirac :

$$\langle A^*\alpha | u\rangle = \langle \alpha | Au\rangle$$

Exercice 9.1.3 page 70

1. Soit $A = \sum_i |e_i\rangle\langle e^{*i}|$. On a $Ae_j = \sum_i |e_i\rangle \underbrace{\langle e^{*i}|e_j\rangle}_{\delta^i_j} = e_j$ donc $A = I$.
2. On a
$$\sum_k \left(g^{-1}\right)^{ik} g_{kj} = \sum_k \langle e^{*i} \underbrace{|e^{*k}\rangle\langle e_k|}_{I} e_j\rangle = \langle e^{*i}|e_j\rangle = \delta_{ij}$$
3. On observe l'action sur un vecteur de base e_j : on a $\langle e^{*i}|e_j\rangle = \delta^i_j$ et $\langle e_i|e_j\rangle = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ si base o.n. Donc $\langle e^{*i}| = \langle e_i|$.
4. On vérifie que l'action sur un vecteur de base e_k est l'identité :
$$\sum_{i,j} |e_i\rangle \underbrace{\left(g^{-1}\right)^{ij} \underbrace{\langle e_j|e_k\rangle}_{g_{jk}}}_{\delta^i_k} = |e_k\rangle$$

Exercice 9.1.4 page 73 Supposons que $(e_1, \dots e_n)$est une b.o.n. c'est à dire que $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{i,j}$, et que $A(e_i) = \sum_j A^j_i e_j$, $A^+(e_i) = \sum_j (A^+)^j_i e_j$. On a

$$\begin{aligned} \langle A^+(e_j)|e_i\rangle &= \langle e_j|Ae_i\rangle \\ \Leftrightarrow \sum_k \left(A^+\right)^k_j \underbrace{\langle e_k|e_i\rangle}_{\delta_{k,i}} &= \sum_k A^k_i \underbrace{\langle e_j|e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} \\ \Leftrightarrow \left(A^+\right)^i_j &= A^j_i \end{aligned}$$

Exercice 10.0.4 page 87 Soit $T = \sum_{i,j} g_{i,j} e^{*i} \otimes e^{*j}$ tenseur de type $(2,0)$. On l'applique sur les vecteurs de base, et on trouve

$$T(e_k, e_l) = \sum_{i,j} g_{i,j} e^{*i}(e_k) e^{*j}(e_l) = g_{k,l} = g(e_k, e_l)$$

donc $T = g$.

Exercice 10.0.5 page 88 Soit $T = \sum_i e_i^* \wedge f_i^*$ tenseur de type $(2,0)$ antisymétrique. On l'applique sur les vecteurs de base, et on trouve

$$T(e_k, f_l) = \sum_i \left(e_i^*(e_k) f_i^*(f_l) - f_i^*(e_k) e_i^*(f_l)\right) = \sum_i \delta_{i=k}\delta_{i=l} = \delta_{k=l} = \omega(e_k, f_l)$$

etc. donc $T = \omega$.

Exercice 10.0.6 page 88

1. On a $u = \sum_j u'^j f_j = \sum_j u'^j \left(\sum_i P_j^i e_i\right) = \sum_i \left(\sum_j u'^j P_j^i\right) e_i$ donc

$$u^i = \left(\sum_j P_j^i u'^j\right) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{u}'$$

2. Soit $\beta := \sum_i P_i^j f^{*i} \in E^*$. On va vérifier que $\beta = e^{*j}$ en les appliquant sur tous les vecteurs de base. On a

$$e^{*j}(f_k) = e^{*j}\left(\sum_i P_k^i e_i\right) = P_k^j$$

et par ailleurs

$$\beta(f_k) = \sum_i P_i^j f^{*i}(f_k) = P_k^j = e^{*j}(f_k), \qquad \forall k$$

donc en effet $\beta = e^{*j}$. Ensuite

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i} = \sum_i \alpha_i \sum_j P_j^i f^{*j} = \sum_j \left(\sum_i \alpha_i P_j^i\right) f^{*j}$$

donc

$$\alpha'_j = \sum_i \alpha_i P_j^i \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}$$

3. D'après ci-dessus, on a $e^{*i} = \sum_{i'} \mathbf{P}^i_{i'} f^{*i'}$ et $e_j = \sum_{j'} f_{j'} \left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{j'}_j$ donc

$$T = \sum_{i,j} \mathbf{T}^j_i \left(e^{*i} \otimes e_j\right) = \sum_{i,j} \mathbf{T}^j_i \left(\left(\sum_{i'} \mathbf{P}^i_{i'} f^{*i'} \right) \otimes \left(\sum_{j'} f_{j'} \left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{j'}_j \right) \right)$$

On utilise la bilinéarité du produit tensoriel pour obtenir :

$$T = \sum_{i',j'} \sum_{i,j} \left(\left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{j'}_j \mathbf{P}^i_{i'} \mathbf{T}^j_i \right) \left(f^{*i'} \otimes f_{j'} \right)$$

et déduire le résultat.

A.3 Chapitre géométrie différentielle

Exercice 18.1.11 page 143 On a $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\rho}$ donc

$$\rho = 2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 20.2.4 page 217 Les formules pour passer des coordonnées sphériques à cartésiennes sont

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x^2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ x^3 &= r \cos\theta \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Noter au passage que les coordonnées sphériques ne sont définies que sur la carte $r > 0$, $0 < \theta < \pi$,$0 < \varphi < 2\pi$, soit l'espace $\mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$. Les différentielles de ces fonctions sont

$$\begin{aligned} dx^1 &= \sin\theta \cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ dx^2 &= \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ dx^3 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

donc en développant (et ne gardant que les termes différents)

$$\begin{aligned} \gamma &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= (\sin\theta\cos\varphi dr) \wedge (r\sin\theta\cos\varphi d\varphi) \wedge (-r\sin\theta d\theta) \\ &\quad + (r\cos\theta\cos\varphi d\theta) \wedge (r\sin\theta\cos\varphi d\varphi) \wedge (\cos\theta dr) \\ &\quad + (-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi) \wedge (\sin\theta\sin\varphi dr) \wedge (-r\sin\theta d\theta) \\ &\quad + (-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi) \wedge (r\cos\theta\sin\varphi d\theta) \wedge (\cos\theta dr) \\ &= r^2 \left(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right) (dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) \\ &= r^2 \sin\theta \, (dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) \end{aligned}$$

Plus généralement, un changement de variable dans une forme volume fait intervenir le Déterminant de la matrice des différentielles. Ici :

$$\text{Det}\left|\left(\frac{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(r,\theta,\varphi\right)}\right)\right| = r^2\sin\theta$$

Exercice 20.2.6 page 217

- Base de Λ_x^0 qui est de dimension $C_4^0 = 1$: 1
- Base de Λ_x^1 qui est de dimension $C_4^1 = 4$: dx, dy, dz, dt
- Base de Λ_x^2 qui est de dimension $C_4^2 = 6$: $dx\wedge dy$, $dx\wedge dz$, $dx\wedge dt$, $dy\wedge dz$, $dy\wedge dt$, $dz\wedge dt$.
- Base de Λ_x^3 qui est de dimension $C_4^3 = 4$: $dx\wedge dy\wedge dz$, $dx\wedge dy\wedge dt$, $dx\wedge dz\wedge dt$, $dy\wedge dz\wedge dt$
- Base de Λ_x^4 qui est de dimension $C_4^4 = 1$: $dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt$.

Exercice 20.2.8 page 218 On écrit

$$x = r\cos\theta,\qquad y = r\sin\theta$$

alors

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\qquad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

on élimine la composante dr par :

$$\cos\theta dy - \sin\theta dx = rd\theta$$

donc

$$d\theta = \frac{1}{r^2}\left(r\cos\theta dy - r\sin\theta dx\right)$$

On déduit

$$\alpha = d\theta = \frac{1}{x^2+y^2}\left(xdy - ydx\right) \tag{A.3.3}$$

Exercice 20.2.9 page 218

Une première méthode consiste à partir des expressions (A.3.2) et déduire

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\cos\varphi dx^2 - \sin\varphi dx^1\right)\\ d\theta &= \frac{1}{r}\left(\cos\theta\cos\varphi dx^1 + \cos\theta\sin\varphi dx^2 - \sin\varphi dx^3\right)\end{aligned}$$

alors

$$\beta = \sin\theta\left(d\theta\wedge d\varphi\right) = \frac{1}{r^3}\left(x^1\left(dx^2\wedge dx^3\right) + x^2\left(dx^3\wedge dx^4\right) + x^3\left(dx^1\wedge dx^2\right)\right)$$

Une autre méthode consiste à observer d'après (20.2.8) que

$$\gamma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = r^2 dr \wedge \beta$$

On voudrait éliminer le terme dr à droite pour déduire β. D'après la relation $dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$, il faut appliquer le champ de vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial x^3}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{r}\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\beta = \frac{1}{r^2}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial r}, ., .\right) = \frac{1}{r^3}\left(x^1\left(dx^2 \wedge dx^3\right) + x^2\left(dx^3 \wedge dx^4\right) + x^3\left(dx^1 \wedge dx^2\right)\right)$$

Exercice 20.2.10 page 218

Comme dans Eq.(18.4.5), on a $q = r\cos\theta$, $p = r\sin\theta$ donc $dq = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$, $dp = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$ donc

$$\begin{aligned} \omega &= dq \wedge dp = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

ensuite $dA = \pi 2 r dr$ donc $\omega = \frac{1}{2\pi} dA \wedge d\theta$.

Exercice 20.5.4 page 223 Dans un système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, pour simplifier les écritures, on note

$$I = (i_1, \ldots i_p) \in \{1, \ldots n\}^p$$

un multiplet et

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Alors

$$f = \sum_I f_I dx^I, \qquad g = \sum_J g_J dx^J$$

et

$$f \wedge g = \sum_{I,J} f_I g_J \left(dx^I \wedge dx^J\right)$$

donc

$$
\begin{aligned}
d(f\wedge g) &= \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(f_I g_J)}{\partial x^k}\left(dx^k\wedge dx^I\wedge dx^J\right)\\
&= \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^k}g_J+f_I\frac{\partial g_J}{\partial x^k}\right)\left(dx^k\wedge dx^I\wedge dx^J\right)\\
&= \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^k}g_J\left(dx^k\wedge dx^I\wedge dx^J\right)+(-1)^p f_I\frac{\partial g_J}{\partial x^k}\left(dx^I\wedge dx^k\wedge dx^J\right)\right)\\
&= \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^I\right)\left(g_J dx^J\right)+(-1)^p\left(f_I dx^I\right)\left(\frac{\partial g_J}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^J\right)\right)\\
&= df\wedge g+(-1)^p f\wedge dg
\end{aligned}
$$

on a utilisé $dx^k\wedge dx^I=(-1)^p\left(dx^I\wedge dx^k\right)$.

Exercice 20.5.5 page 223

On note $\vec{f}$ les 3 composantes de f si f est une 1-forme ou une 2-forme, et de même pour g.

1. Cas $p=0,q=0$: la formule $d(fg)=(df)\,g+fdg$ donne
$$\mathrm{grad}\,(fg)=g\mathrm{grad}\,(f)+f\mathrm{grad}\,(g)$$
2. Cas $p=0,q=1$: la formule $d(fg)=(df)\wedge g+fdg$ donne
$$\vec{\mathrm{rot}}\,(f\vec{g})=\vec{\mathrm{grad}}\,(f)\wedge\vec{g}+f\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{g})$$
3. Cas $p=0,q=2$: la formule $d(fg)=(df)\wedge g+fdg$ donne
$$\mathrm{div}\,(f\vec{g})=\vec{\mathrm{grad}}\,(f)\,.\vec{g}+f\mathrm{div}\,(\vec{g})$$
4. Cas $p=1,q=1$: la formule $d(f\wedge g)=(df)\wedge g-f\wedge dg$ donne
$$\mathrm{div}\left(\vec{f}\wedge\vec{g}\right)=\vec{\mathrm{rot}}\,(f)\,.\vec{g}-\vec{f}.\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{g})$$

Exercice 20.5.10 page 227

1. Sur le domaine $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on considère la fonction $f(x)=1$ si $x>0$, et $f(x)=0$ si $x<0$. Donc $f\in C^\infty(\Lambda^0)$, $df=0$. Mais $f\neq cste$.
2. Sur le domaine $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, en coordonnées polaires, on considère la 1-forme $\alpha=d\theta$ (qui est bien définie sur $\mathcal{D}$, voir (218)). On a $d\alpha=dd\theta=0$. Montrons que $\alpha\neq df$. Sur un cercle de rayon fixé, l'intégrale $\int\alpha=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta=2\pi\neq 0$. Or si $\alpha=df=\frac{df}{d\theta}d\theta$, on aurait $\int\alpha=\int_{\theta=0}^{2\pi}df=f(2\pi)-f(0)=0$.

3. Sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, en coordonnée sphériques, on considère la 2-forme $\beta = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$ qui est la 2-forme d'angle solide, bien définie sur $\mathcal{D}$. On a $d\beta = \cos\theta d\theta \wedge d\theta \wedge d\varphi = 0$. Montrons que $\beta \neq d\alpha$. Sur une sphère de rayon r fixé, l'intégrale est $\int\int \beta = 4\pi \neq 0$. Or si $\beta = d\alpha$, on aurait $\int\int \beta = \int\int d\alpha = 0$.

Exercice 21.0.6 page 230

1. Sur $\mathbb{R}$, $\mu_{vol} = dx$ est la mesure volume sur $\mathbb{R}$, et dx est aussi une base o.n. de Λ^1_x. D'après la définition, pour tout $\alpha \in C^\infty(\Lambda^0)$, on a $d\alpha = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) dx$, et

$$\begin{aligned}\int \langle d\alpha(x), \beta(x)\rangle_{\Lambda^1_x} dx &= \int \langle \alpha(x), d^*\beta(x)\rangle_{\Lambda^0_x} dx \\ \Leftrightarrow \int \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) b(x)\, dx &= \int \alpha(x)\left(d^*\beta(x)\right) dx \\ \Leftrightarrow -\int \alpha(x)\left(\frac{db(x)}{dx}\right) dx &= \int \alpha(x)\left(d^*\beta(x)\right) dx\end{aligned}$$

(par parties), donc $d^*\beta = -\left(\frac{db}{dx}\right)$.

2. Sur $\mathbb{R}^2$, $\mu_{vol} = dx \wedge dy$ est la mesure volume sur $\mathbb{R}$, et (dx, dy) est aussi une base o.n. de Λ^1 et $dx \wedge dy$ une base o.n. de Λ^2. D'après la définition, pour tout $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy \in C^\infty(\Lambda^1)$, on a $d\alpha = \left(-\frac{\partial\alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right) dx \wedge dy$. Posons $d^*\beta = b_x dx + b_y dy$ où l'on cherche b_x, b_y. On a

$$\begin{aligned}\int \langle d\alpha(x), \beta(x)\rangle_{\Lambda^2_x} (dx \wedge dy) &= \int \langle \alpha(x), d^*\beta(x)\rangle_{\Lambda^1_x} (dx \wedge dy) \\ \Leftrightarrow \int \left(-\frac{\partial\alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right)\beta_{xy}(dxdy) &= \int (\alpha_x b_x + \alpha_y b_y)\, dxdy \\ \Leftrightarrow \int \left(\alpha_x\frac{\partial\beta_{xy}}{\partial y} - \alpha_y\frac{\partial\beta_{xy}}{\partial x}\right)(dxdy) &= \int (\alpha_x b_x + \alpha_y b_y)\, dxdy\end{aligned}$$

(par parties), donc $b_x = \frac{\partial\beta_{xy}}{\partial y}$ et $b_y = -\frac{\partial\beta_{xy}}{\partial x}$.

Exercice 21.0.2 page 232

1. Sur $\mathbb{R}^n$ avec les coordonnées $x \equiv (x^1, \dots x^n)$ la métrique Euclidienne (18.5.2) donne la matrice diagonale $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, alors $\left(g^{-1}(x)\right)^{jk} = \delta_{i,j}$ et $G(x) := \det\left(g_{ij}(x)\right)_{ij} = 1$. La formule (21.0.5) donne

$$\Delta f = -\sum_j \frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2} f$$

2. En coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$, d'après (18.5.4) et (18.5.5) on déduit que $\left(g^{-1}\right)^{i,j} \equiv_{(r,\theta)}$

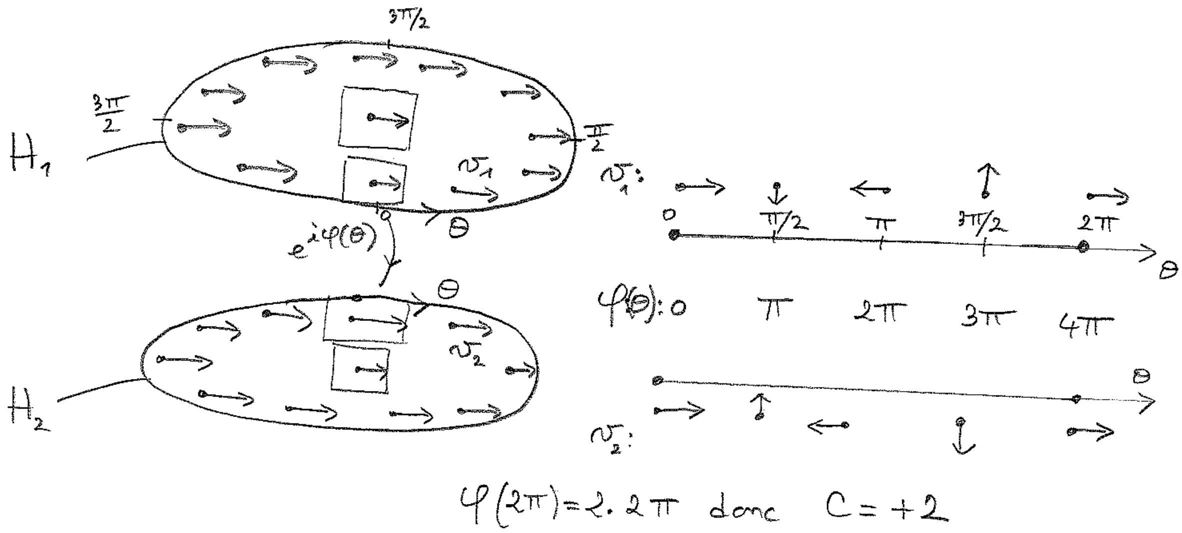
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$, $G(x) := \det (g_{ij}(x))_{ij} = r^2$. La formule (21.0.5) donne

$$-\Delta f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2}r\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

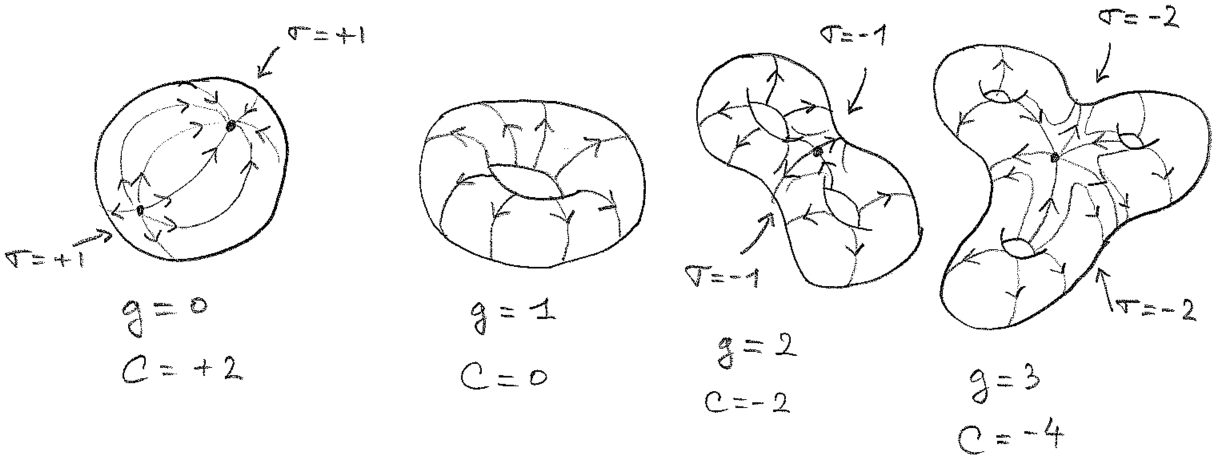
Exercice 20.5.5 page 223

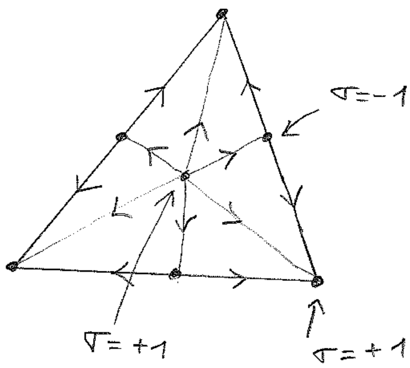
A.4 Chapitre espaces fibrés

Exercice 23.1.10 page 260 : On va calculer le degré C de sa fonction de recollement défini par Eq.(23.1.4). On procède comme dans la preuve ci-dessus. On trivialise le fibré au dessus de H_1, et H_2, et on déduit le degré C de la fonction de recollement. Voir figure qui représente les deux hémisphères vues par dessus et dessous avec un champ de vecteur sur chacune. On trouve $C = +2$.



A.4.0.1 Exercice 23.1.14 page 264 :





A.4.0.2 Exercice 23.2.5 page 270 :

Soit $P_{[\psi]}$ le projecteur orthogonal sur $F_{[\psi]}$. Il est donné par en notation de Dirac par

$$P_{[\psi]} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

La dérivée covariante est donc

$$\begin{aligned} \frac{D\psi}{dt} &= \frac{Pd\psi}{dt} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|\frac{d\psi}{dt}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi| - i\hat{H}\psi\rangle \\ &= -i\ \frac{\langle\psi|\hat{H}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Exercice 23.2.13 page 279 : On écrit

$$\begin{aligned}(A\wedge A)^{\nu}_{\mu} &= \sum_{\lambda} A^{\lambda}_{\mu}\wedge A^{\nu}_{\lambda} = -\sum_{\lambda} A^{\nu}_{\lambda}\wedge A^{\lambda}_{\mu}\\ &= \sum_{i,j,\lambda} A^{\nu}_{\lambda,i}A^{\lambda}_{\mu,j}\left(dx^i\wedge dx^j\right)\\ &= -\sum_{i,j,\lambda} A^{\lambda}_{\mu,i}A^{\nu}_{\lambda,j}\left(dx^i\wedge dx^j\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,\lambda}\left(A^{\nu}_{\lambda,i}A^{\lambda}_{\mu,j} - A^{\lambda}_{\mu,i}A^{\nu}_{\lambda,j}\right)\left(dx^i\wedge dx^j\right)\\ &= \frac{1}{2}\left([A,A]\right)^{\nu}_{\mu}\end{aligned}$$

Exercice 23.2.19 page 284 D'après la formule de composition

$$h_{\gamma(t)} = \mathcal{T}_{\gamma(t)\to\gamma(t+1)} = \mathcal{T}_{\gamma(1)\to\gamma(t+1)}\mathcal{T}_{\gamma(0)\to\gamma(1)}\mathcal{T}_{\gamma(t)\to\gamma(0)}$$

Mais par périodicité, $\mathcal{T}_{\gamma(1)\to\gamma(t+1)} = \mathcal{T}_{\gamma(0)\to\gamma(t)}$ et $\mathcal{T}_{\gamma(t)\to\gamma(0)} = \mathcal{T}^{-1}_{\gamma(0)\to\gamma(t)}$, donnant

$$h_{\gamma(t)} = \mathcal{T}_{\gamma(0)\to\gamma(t)}h_{\gamma(0)}\mathcal{T}^{-1}_{\gamma(0)\to\gamma(t)}$$