# Notes de cours,
# Physique mathématique

Université de Grenoble Alpes,
(version: 6 octobre 2021)

Frédéric Faure

Frederic Faure, Institut Fourier, grenoble.
email : frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

# Table des matières

**I Analyse de Fourier, distributions et EDP à coefficients constants 9**

**1 Dérivée et formule de Taylor 11**

**2 Séries de Fourier 24**

**3 Fonctions holomorphes à une variable 30**
3.0.0.1 Première formule des résidus . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
3.0.0.2 Formule des résidus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
3.0.1 Application au calcul d'intégrales. "Méthode des résidus". . . . . . . 34

**4 Transformée de Fourier 36**
4.0.1 Espaces de Banach est espace de Hilbert de fonctions . . . . . . . . 36
4.0.2 La transformée de Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
4.0.2.1 Transformée de Fourier et dérivation ou multiplication . . 39
4.0.2.2 Transformée de Fourier inverse . . . . . . . . . . . . . . . . 41
4.0.2.3 Transformée de Fourier et convolution . . . . . . . . . . . . 43

**5 Transformée par ondelettes 45**

**II Espaces vectoriels et tensoriels 48**

**6 Espaces vectoriels 50**
6.0.1 Somme directe d'espaces vectoriels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
6.0.2 Espaces quotients . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

**7 Applications linéaires 58**
7.0.1 Représentation d'une application linéaire dans une base . . . . . . . 59
7.0.2 Déterminant et Trace d'un endomorphisme . . . . . . . . . . . . . . 62

**8 Espace dual 63**

**9 Métriques sur un espace vectoriel** **67**
9.1 Métrique Euclidienne . . . 67
9.1.1 Existence et construction d'une base orthonormée . . . 71
9.1.2 Application linéaire adjointe . . . 73
9.1.3 Applications linéaires qui préservent la métrique . . . 74
9.2 Métrique Hermitienne . . . 75
9.3 Métrique de Lorentz . . . 76
9.3.1 Cône de lumière . . . 77
9.4 Métrique symplectique . . . 79
9.4.1 Application linéaire adjointe symplectique $A^{\omega}$ . . . 82
9.4.2 Application linéaire qui préserve la métrique symplectique $\omega$ . . . 83

**10 Espaces tensoriels** **85**
10.0.1 Changement de Base. Transformation de coordonnées d'un tenseur. 88

**11 Spectre et pseudo-spectre d'applications linéaires** **90**
11.0.1 Pseudo spectre d'un opérateur de rang fini . . . 90
11.0.1.1 Définition du spectre d'un opérateur . . . 90
11.0.1.2 Définition du pseudo-spectre . . . 91
11.0.1.3 Image numérique (étendue numérique) . . . 92
11.0.2 Valeurs singulières . . . 94
11.0.2.1 Décomposition polaire . . . 94

**III Groupes de matrices et représentations** **96**

**12 Les groupes classiques de matrices** **100**
12.0.1 Le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ . . . 100
12.0.2 Le groupe spécial linéaire $SL(n,\mathbb{R})$ . . . 101
12.0.3 Les groupe orthogonal $O(n), SO(n)$ . . . 101
12.0.4 Les groupe unitaire $U(n), SU(n)$ . . . 102
12.0.5 Le groupe symplectique $Sp(2n,\mathbb{R})$ . . . 103

**13 Le groupe $SO(2)$** **104**

**14 Le groupe $SO(3)$** **107**
14.0.1 Système de coordonnées sur $SO(3)$ . . . 107
14.0.1.1 Topologie de $SO(3)$ . . . 108
14.0.2 Algèbre de Lie de $SO(3)$ . . . 110

**15 Le groupe $SU(2)$** **115**
15.0.1 Système de coordonnées sur $SU(2)$ et topologie . . . 115

**16 Relation entre les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$** **120**

**17 Représentation de groupe** **124**
17.0.1 Introduction . . . . . 124
17.0.2 Représentation . . . . . 125
17.0.3 Représentation de groupes de Lie compact . . . . . 128

**IV Géométrie différentielle** **136**

**18 Bases de géométrie différentielle** **137**
18.1 Variété différentiable . . . . . 137
18.1.1 Variétés équivalentes . . . . . 141
18.1.1.1 Variétés de dimension 1 . . . . . 141
18.1.1.2 Variétés de dimension 2 . . . . . 141
18.1.1.3 Variétés de dimension 3 et plus . . . . . 144
18.1.1.4 (*) Exemples importants de variétés . . . . . 144
18.2 Fonctions . . . . . 145
18.3 Vecteurs tangents . . . . . 146
18.3.1 Expression d'un vecteur tangent $V$ dans un système de coordonnées locales . . . . . 147
18.3.2 Trajectoires et flot . . . . . 152
18.3.3 Exemples de champs de vecteurs et leur flot . . . . . 153
18.3.4 Transport de fonctions par le flot . . . . . 153
18.3.5 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs . . . . . 155
18.4 Vecteurs cotangents ou 1 formes . . . . . 160
18.4.1 1-formes en thermodynamique . . . . . 164
18.5 Métrique sur $M$ . . . . . 164
18.5.1 Variété Riemannienne . . . . . 164
18.6 Forme symplectique canonique $\Omega$ sur $T^*M$ . . . . . 169

**19 Lois de la mécanique classique d'après Hamilton (1834)** **173**
19.1 Equations de mouvement de Hamilton, cas général . . . . . 173
19.1.1 Expression en coordonnées . . . . . 174
19.1.2 Conservation de l'énergie . . . . . 175
19.2 Cas de la mécanique . . . . . 175
19.2.1 Exercices . . . . . 178
19.3 Cas du flot géodésique . . . . . 185
19.3.1 Particule libre sur une sous variété de $\mathbb{R}^n$, géodésiques . . . . . 185
19.3.1.1 Définition Newtonienne du flot géodésique sur une sous variété de $\mathbb{R}^n$ . . . . . 185
19.3.1.2 Interprétations et remarques générales . . . . . 186
19.3.1.3 Déterminisme du flot géodésique, champ de vecteur sur $TM$ 187
19.3.1.4 Formulation Hamiltonienne du flot géodésique . . . . . 191
19.3.2 Flot géodésique sur une variété Riemannienne . . . . . 192

19.3.3 Flot géodésique sur une surface, courbure de Gauss et chaos . . . . 193
19.3.3.1 Courbure de Gauss d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ . . . . . . . . . . 193
19.3.3.2 Courbure de Gauss et attraction/répulsion effective entre géodésiques voisines . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 194
19.3.3.3 Comportement chaotique des géodésiques en courbure négative . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196
19.3.3.4 Du flot géodésique au billard . . . . . . . . . . . . . . . . . 196
19.3.3.5 Exemple en mécanique, du flot géodésique au billard. . . . 198
19.3.4 Trajectoires en théorie de la relativité . . . . . . . . . . . . . . . . . 198
19.3.4.1 Géométrie de l'espace temps . . . . . . . . . . . . . . . . . 199
19.3.4.2 Schémas dans l'espace-temps de Minkowski $M = \mathbb{R}^2$ . . . 201
19.3.4.3 Dynamique relativiste . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 205
19.4 Formulation Lagrangienne et variationnelle de la mécanique . . . . . . . . 207
19.4.1 Préliminaires sur la transformée de Legendre . . . . . . . . . . . . . 207
19.4.2 Théorème de moindre action de Hamilton . . . . . . . . . . . . . . 207
19.4.2.1 Cas de la mécanique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209

**20 Formes différentielles 212**
20.1 1-formes et intégrales curviligne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 212
20.2 Formes différentielles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213
20.2.1 Exemple de l'espace $M = \mathbb{R}^3$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
20.2.2 Formule de changement de coordonnées pour les formes différentielles 218
20.3 Orientation d'une variété . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 220
20.4 Changement de coordonnées et intégrales . . . . . . . . . . . . . . . . . . 220
20.5 Dérivée extérieure et formule de Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221
20.6 Difféomorphisme entre variétés et transport de champ de tenseurs . . . . . 227

**21 Géométrie Riemannienne et électromagnétisme 228**
21.0.1 Métrique induite sur l'algèbre extérieure et l'opérateur adjoint $d^*$ . 228
21.0.2 L'opérateur Laplacian de Hodge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231
21.0.3 Equations de Maxwell sur une variété Lorentzienne . . . . . . . . . 233
21.0.3.1 Remarques sur les champs électrique $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$ 238
21.0.4 Divergence, gradient et loi de conservation . . . . . . . . . . . . . . 239
21.0.4.1 Divergence d'un champ de vecteur . . . . . . . . . . . . . . 239
21.0.4.2 Loi de conservation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 240
21.0.4.3 Sur une variété Riemanienne . . . . . . . . . . . . . . . . . 241

**22 Géométrie symplectique et Mécanique Hamiltonienne 244**
22.0.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
22.0.1.1 Mécanique Hamiltonienne sur le plan $\mathbb{R}^2$ . . . . . . . . . . 244
22.0.1.2 Mécanique Hamiltonienne sur la sphère $S^2$ . . . . . . . . . 247
22.0.2 Forme symplectique sur une variété et équations de Hamilton . . . 248

**23 Espaces fibrés et connexions** **250**
23.1 Espaces fibrés vectoriels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250
23.1.1 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur $S^1$ . . . . . . . . . . . . 255
23.1.2 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2 sur $S^2$ . . . . . . . . . . . . 258
23.1.2.1 Connexion et indice de Chern . . . . . . . . . . . . . . . . 261
23.1.2.2 Topologie d'un espace fibré sur $S^2$ à partir des zéros d'une section . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261
23.2 Connexion et dérivée covariante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265
23.2.1 Définition d'une connexion ou dérivée covariante . . . . . . . . . . . 265
23.2.2 Exemple : la connexion de Levi-Civita . . . . . . . . . . . . . . . . . 267
23.2.2.1 Exemple : fibré tangent $TM$ d'une variété $M \subset \mathbb{R}^n$. Pendule de Foucault . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 268
23.2.2.2 Exemple de la Connexion de Berry . . . . . . . . . . . . . . 270
23.2.3 Expression de la connexion par rapport à une trivialisation locale du fibré . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 271
23.2.3.1 Choix de Jauge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 271
23.2.3.2 Cas d'un fibré hermitien : . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273
23.2.3.3 Transformation de Jauge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 274
23.2.4 Courbure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 276
23.2.5 Expression de la courbure pour la connexion de Levi-Civita . . . . . 280
23.2.5.1 Cas d'un fibré de rang 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 281
23.2.6 Transport parallèle, holonomie et courbure . . . . . . . . . . . . . . 283
23.2.6.1 Transport parallèle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 283
23.2.6.2 Holonomie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284
23.2.7 Propriétés de la courbure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286
23.2.8 L'électromagnétisme est une théorie de Jauge abélienne . . . . . . 287
23.2.8.1 Expression dans un système de coordonnées : . . . . . . . 288
23.2.8.2 Equations variationnelles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 289
23.2.9 Théories de Jauge non abéliennes (Yang-Mills) . . . . . . . . . . . . 290
23.2.10 Variation et changement de connexion . . . . . . . . . . . . . . . . 292
23.2.11 Dérivée covariante de tenseurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293
23.2.11.1 Produit tensoriel de Fibrés. Dérivée covariante $D$ sur $F_1 \otimes F_2$ 293
23.2.11.2 Fibré dual, trace partielle. Dérivée covariante $D$ sur $F^*$ . . 293
23.2.11.3 Dérivée covariante $D$ sur $Hom(F_1, F_2) = F_1^* \otimes F_2$ . . . . . 294
23.2.11.4 Dérivé covarinate d'une métrique . . . . . . . . . . . . . . 295
23.2.11.5 Formule générale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 295
23.3 Connexion de Riemann sur une variété Riemannienne . . . . . . . . . . . 296
23.3.1 Connexion de Riemann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 296
23.3.1.1 Exemple : Sous variété d'un espace euclidien . . . . . . . . 297
23.3.1.2 Expression par rapport à une trivialisation . . . . . . . . . 298
23.3.2 Courbure de Riemann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301
23.3.3 Equations d'Einstein de la relativité générale . . . . . . . . . . . . . 303
23.3.3.1 Les champs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 303

23.3.3.2 L'action . . . 304
23.3.4 Modèles cosmologiques en relativité générale . . . 307
23.3.4.1 Description de l'espace temps $M_\epsilon$ . . . 308
23.3.4.2 Lignes d'univers cosmologiques . . . 309
23.3.4.3 Tenseur énergie impulsion et équations d'Einstein . . . 311
23.3.4.4 Solutions de l'équation d'évolution de Friedmann-LeMaître 313

**A Solution des exercices** **315**
A.1 Chapitre Analyse . . . 315
A.2 Chapitre algèbre . . . 320
A.3 Chapitre géométrie différentielle . . . 324
A.4 Chapitre espaces fibrés . . . 329
A.4.0.1 Exercice 23.1.14 page 264 : . . . 330
A.4.0.2 Exercice 23.2.5 page 270 : . . . 330

**B Formules** **332**
B.1 Analyse et intégrales . . . 332
B.1.1 Intégrales Gaussiennes . . . 332

**Conventions de notation :** On utilise le signe := pour signifier que le terme de gauche est **défini** par le terme de droite. Par exemple :

$$A := \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

signifie que $A$ est l'ensemble des entiers s'écrivant $2n$ avec $n$ entier. $A$ est donc l'ensemble des entiers pairs.

# Annexe B

# Formules

## B.1 Analyse et intégrales

### B.1.1 Intégrales Gaussiennes

**Formule 1**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-X^2\right) dX = \sqrt{\pi} \tag{B.1.1}$$

*Démonstration.* Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy\right) \\ &= \int_0^{\infty} drr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi\left(\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\right) = \pi \end{aligned}$$

donc $I = \sqrt{\pi}$. $\square$

**Formule 2** Soit

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$A, B, C \in \mathbb{C} \quad \text{et } \Re(A) > 0 \text{ pour la convergence.}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-Q(x)\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-C + \frac{B^2}{4A}\right) \tag{B.1.2}$$

Preuve : @@

**Formule 3.** Pour $n \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

où

$$(2n-1)!! := (2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1 == \frac{(2n)!}{2^n (n!)}$$

appelée **double factorielle**. (par symétrie, pour une puissance impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0$).

*Démonstration.* Il faut dériver la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ par rapport à $\alpha$ et faire $\alpha = 1$ à la fin : soit

$$I_\alpha := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

On a

$$\frac{d^n I_\alpha}{d\alpha^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \ldots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

□

# Bibliographie


[1] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.

[2] V.I. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*. 1990.

[3] Hall B. *An Elementary Introduction to Groups and Representations*. https ://arxiv.org/abs/math-ph/0005032, 2000.

[4] Hall B. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations : An Elementary Introduction*. Springer-Verlag New York, 2004.

[5] Parisse B. *Logiciel libre de calcul formel*. Taper xcas dans google.

[6] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[7] A. Cannas Da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.

[8] Yvonne Choquet-Bruhat. *General relativity and the Einstein equations*. Oxford University Press, 2009.

[9] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes*. 1987.

[10] J.P. Demailly. *Complex analytic and algebraic geometry*. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly.

[11] K.J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Inc, 2003.

[12] F. Faure. *Cours de géométrie et topologie pour la physique pour Master M2 de physique*. link, 2010.

[13] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. link, 2014.

[14] B. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory*. 1996.

[15] Griffiths, Phillip and Harris, Joseph. *Principles of algebraic geometry*. A Wiley-Interscience Publication. New York, 1978.

[16] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. http ://www.math.cornell.edu/~hatcher/, 1998.

[17] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. 1980.

[18] T.S.Ratiu J.E. Marsden. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 1998.

[19] Lee. *Riemannian Manifolds :An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.

[20] Jerrold E. Marsden and Thomas J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity.* Dover Publications Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1983 original.

[21] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Institute of Physics Publishing, 2003.

[22] Jet Nestruev, AV Bocharov, and S Duzhin. *Smooth manifolds and observables.* Springer, 2003.

[23] Petersen P. *Riemannian Geometry.* Springer, 2006.

[24] M. Reed and B. Simon. *Mathematical methods in physics, vol I : Functional Analysis.* Academic press, New York, 1972.

[25] J.J. Sakurai. *Advanced quantum mechanics.* 1967.

[26] C. Segal. *Lectures on Lie groups and Lie Algebras.* 1995.

[27] S. Sternberg. *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1994.

[28] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I.* Springer, 1996.

[29] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol II.* Springer, 1996.

[30] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol III.* Springer, 1996.

[31] L.N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and pseudospectra.* Princeton University Pr., 2005.

[32] Robert M Wald. *General relativity.* University of Chicago press, 2010.

[33] R.O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds.* Springer-Verlag, 1980.

[34] M. Dillard-Bleick Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette. *Analysis, manifolds and physics.* North-Holland, 1982.

**#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.**

```
pdftk cours.pdf cat 1-7 332-end output cours_intro.pdf
    pdftk cours.pdf cat 9-47 output cours_chap1_analyse.pdf
    pdftk cours.pdf cat 48-95 output cours_chap2_espaces_vectoriels.pdf
    pdftk cours.pdf cat 96-135 output cours_chap3_groupes.pdf
    pdftk cours.pdf cat 136-249 output cours_chap4_geom_diff.pdf
    pdftk cours.pdf cat 250-314 output cours_chap5_espaces_fibres.pdf
    pdftk cours.pdf cat 315-331 output cours_solutions.pdf
    pdftk cours.pdf cat 1-314 332-end output cours_complet_sans_solutions.pdf
```