

Quatrième partie
Géométrie différentielle

Chapitre 18

Bases de géométrie différentielle

Références : [21],[34],[28].

Introduction :

Ce que l'on recherche en géométrie différentielle est

- Ecrire les règles de calcul différentiel que l'on connaît sur l'espace \mathbb{R}^n , comme les dérivées partielles de fonctions, l'intégrale, le Laplacien, etc.. mais avec le **souci constant de définir des opérations et des objets qui soient indépendant du système de coordonnées choisies.**
- Faire du calcul différentiel sur des espaces autres que l'espace euclidien \mathbb{R}^n , comme la sphère, les espaces projectifs, etc.. . On commence par donner une définition des espaces où l'on peut faire ce calcul différentiel, et que l'on appelle **variété différentiable.**

18.1 Variété différentiable

Voici tout d'abord l'idée vague : une variété différentiable de dimension n est un ensemble de points qui ressemble à \mathbb{R}^n au voisinage de chaque point. Par exemple la surface d'une sphère¹ S^2 ressemble à \mathbb{R}^2 au voisinage de chaque point, c'est donc une variété différentiable de dimension 2.

Maintenant nous allons préciser la définition. Prenons l'exemple de la surface de la terre considérée comme une sphère lisse S^2 . Pour les voyageurs, il existe un ensemble de N cartes géographiques indicées par $\alpha = 1 \dots N$, qui recouvrent la surface de la Terre. Chaque carte a deux coordonnées $(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha})$. Toute point sur Terre $x \in S^2$ est représenté par au

1. Par définition la sphère S^2 est l'ensemble des points à la distance 1 de l'origine de \mathbb{R}^3 :

$$S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

moins un point sur une des cartes. Il y a des formules de changement de coordonnées qui permettent de passer d'une carte à la carte voisine. De cette façon l'ensemble des cartes définissent la surface terrestre sans avoir besoin de vision globale ni de savoir que $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.



Remarque 18.1.1. Les angles et les distances ne sont pas respectées sur les cartes. Nous verrons qu'il existe des systèmes de coordonnées qui respectent les angles ("cartes conformes"), cela était utile pour la navigation, pour garder un cap. Il n'existe pas de cartes sur S^2 qui préserve les distances. On verra cela découle du fait que la sphère a de la "courbure" et n'est pas un "espace euclidien".

Remarque 18.1.2. C'est H. Weyl en 1913 qui a donné la première définition intrinsèque de variété différentielle, puis Whitney 1936 pour une définition abstraite de variété Riemannienne que l'on donnera ci-dessous (ref : Petersen [23]).

Pour la suite, on rappelle qu'un **difféomorphisme** C^∞ est une application $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre des ouverts $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ qui est dérivable un nombre infini de fois, qui est bijective et d'inverse aussi dérivable.

Définition 18.1.3. Une **variété différentiable** (voir aussi **variété**) M de dimension réelle n , est un ensemble $M = \bigcup_{\alpha=1}^N U_{\alpha}$ où pour chaque ensemble U_{α} on a une bijection

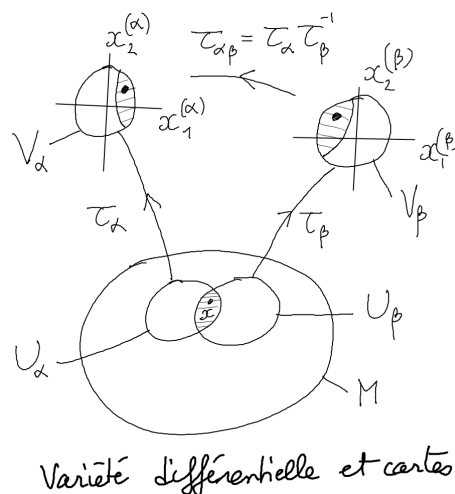
$$\tau_{\alpha} : \begin{cases} U_{\alpha} \subset M & \rightarrow V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow \tau_{\alpha}(x) = (x_{1,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha}) \in \mathbb{R}^n \text{ : "coordonnées du point } x \text{"} \end{cases}$$

avec $V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ ensemble ouvert et t.q. pour tout α, β , $\tau_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et

$$\tau_{\alpha\beta} := \tau_{\alpha} \circ \tau_{\beta}^{-1} : \tau_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tau_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subset \mathbb{R}^n \quad (18.1.1)$$

est un difféomorphisme C^{∞} appelé "changement de coordonnées".

Par analogie avec la géographie, chaque application $\tau_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}$ s'appelle une **carte** et l'ensemble des cartes s'appelle un **atlas**. On dit aussi que $\tau_{\alpha}(x) = (x_{1,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha})$ est un **système de coordonnées locales**.



Exemple 18.1.4. Exemple de la sphère S^2 . On considère tout d'abord la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de rayon 1 définie par

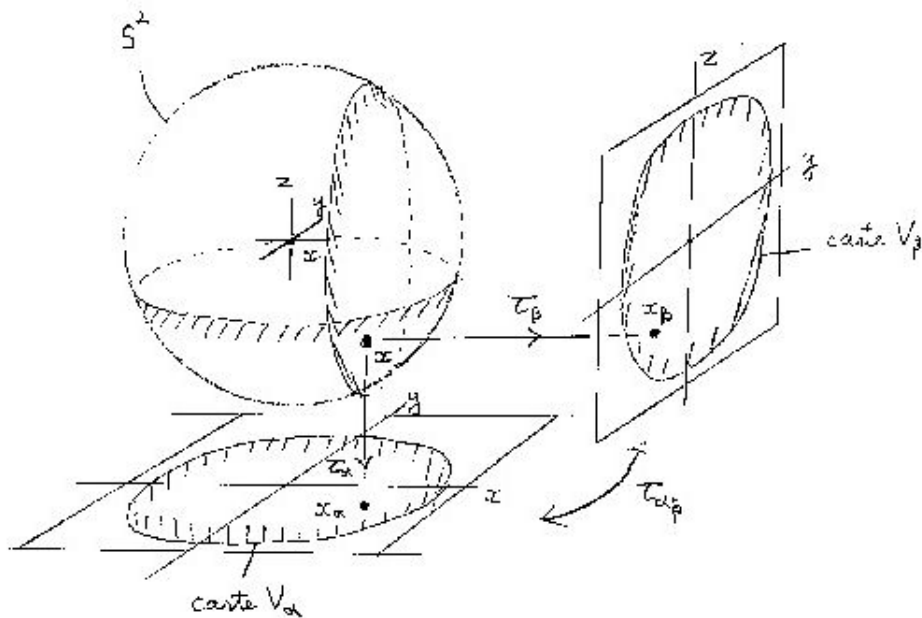
$$S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Comme sur la figure ci-dessous, considérons la carte qui décrit une partie de "l'hémisphère sud", qui, à un point $x \in S^2$, associe les coordonnées $\tau_{\alpha}(x) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et une autre carte qui associe les coordonnées $\tau_{\beta}(x) = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$. La formule du changement de coordonnées pour passer de la carte τ_{β} à la carte τ_{α} est simplement

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha} \circ \tau_{\beta}^{-1} : \begin{cases} V_{\beta} & \rightarrow V_{\alpha} \\ (x_{2,\beta}, x_{3,\beta}) & \rightarrow (x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}) \end{cases}$$

avec $x_{2,\alpha} = x_{2,\beta}$ inchangé et

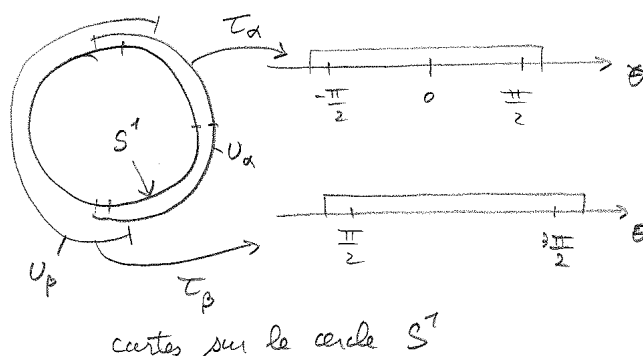
$$x_{1,\alpha} = \sqrt{1 - (x_{2,\beta})^2 - (x_{3,\beta})^2}$$



Les deux cartes précédentes ne recouvrent pas la sphère, mais avec 6 cartes de la sorte, on peut recouvrir la sphère S^2 . L'ensemble de ces 6 cartes forment un atlas de la sphère.

Remarque 18.1.5.

- Sur la sphère S^2 (imaginer la surface de la Terre), on peut utiliser 2 cartes pour recouvrir totalement la sphère : les coordonnées longitude et latitude (φ, θ) avec $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, pour une carte qui exclue un méridien joignant les deux pôles et une carte recouvrant ce méridien et ces deux pôles.
- (*) La figure suivante montre que l'on peut utiliser deux cartes pour le cercle S^1 :



- La sphère $S^n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ est une variété de dimension n .

- On peut généraliser la définition de variété ci-dessus de différentes manières :
 - une **variété à bord** où les coordonnées locales sont parfois avec $x_1 \geq 0$.
 - une **variété complexe** de dimension n , si le systèmes de coordonnées sont des nombres complexes $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et les fonctions de transitions sont des fonctions bi-holomorphes (cad holomorphes, bijectives, d'inverse holomorphe).
- On dit aussi qu'une variété différentiable est une variété C^∞ . Une variété C^k avec $k \geq 0$ est une variété telle que les fonctions de transitions (18.1.1) ont la contrainte d'être au moins k fois dérivables.

18.1.1 Variétés équivalentes

Définition 18.1.6. Deux variétés M et N sont **difféomorphes (ou équivalentes)** si il existe une application $\varphi : M \rightarrow N$ qui est représentée par des difféomorphismes dans un système de cartes (i.e. si $\tau_\beta \circ \varphi \circ \tau_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont localement des difféomorphismes pour tous α, β).

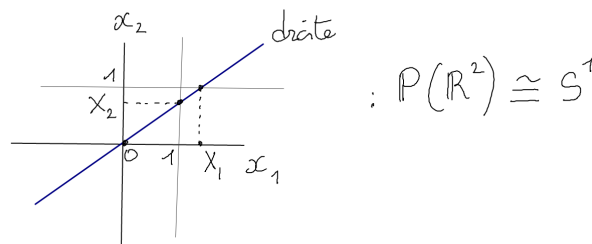
Avec cette équivalence, le nombre de cartes ne compte plus. On peut se demander si il existe des variétés non équivalentes? Il est clair que si M et N ont des dimensions différentes alors elles sont non équivalentes.

On peut essayer de classifier les (classes d'équivalences de) variétés différentielles.

18.1.1.1 Variétés de dimension 1

On appelle souvent **courbe** une variété de dimension 1. Toute variété de dimension 1 est difféomorphe au cercle S^1 (qui est compact) ou à la droite \mathbb{R} (qui est non compacte).







Exemple 18.1.7. l'espace projectif $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des droites de \mathbb{R}^2 passant par $(0, 0)$. Voir figure. On peut caractériser une droite par l'angle avec l'axe x_1 , donc \mathbb{RP}^1 est équivalent à S^1 . On caractérise un point de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ par ses coordonnées homogènes $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ ou inhomogènes X^1 ou $X^2 : (x^1, x^2) \sim \left(1, X^2 = \frac{x^2}{x^1}\right) \sim \left(X^1 = \frac{x^1}{x^2}, 1\right)$ avec la formule de changement de carte $X^2 = 1/X^1$.



18.1.1.2 Variétés de dimension 2

On appelle souvent **surface** une variété de dimension 2. Il y a une classification des surfaces compactes à l'aide de deux paramètres : l'orientabilité (oui/non) et le genre $g \in \mathbb{N}$.

Surfaces compactes orientables :

genre g	0	1	2	...
orientable	S^2 	\mathbb{T}^2 		...
non orientable	$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ 	bouteille Klein 		...

Une surface \mathcal{S} est **orientable** si pour toute courbe fermée simple (i.e. sans auto-intersection) $\gamma \subset \mathcal{S}$ il existe un voisinage homéomorphe au ruban trivial $[0, 1]_x \times]-\epsilon, \epsilon[_y$ avec $(1, y) \sim (0, y)$ (où γ est identifié au cercle $(x, 0)_x$), sinon elle est **non orientable**. Ainsi pour une surface non orientable, il existe une courbe fermée γ dont un voisinage est homéomorphe au **ruban de Moëbius** $[0, 1]_x \times]-\epsilon, \epsilon[_y$ avec $(1, y) \sim (0, -y)$.

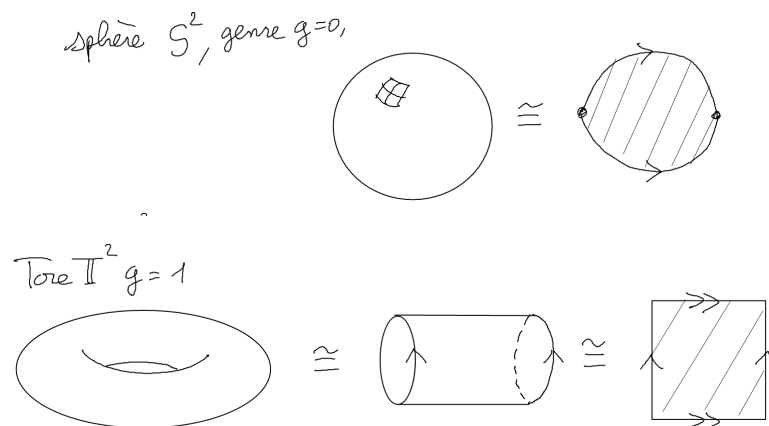
Le **genre** $g \in \mathbb{N}$ d'une surface se calcule de la manière suivante. On recouvre la surface par des polygones conjoints. Soit V le nombre de sommets (vertices), E le nombre d'arêtes (edges) et F le nombre de faces (de polygones). La **caractéristique d'Euler** est

$$\chi := V - E + F = 2 - 2g$$

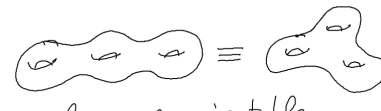
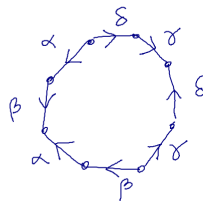
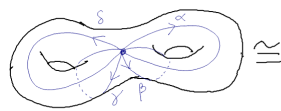
On vérifie que g ne dépend pas du choix des polygones, car si on rajoute un sommet alors $V' = V + 1$, $E' = E + 2$, $F' = F + 1$ donc $g' = g$. Si on rajoute une arête alors $V' = V$, $E' = E + 1$, $F' = F + 1$ donc $g' = g$.

Théorème 18.1.8. “**Classification des surfaces**”. La classe d'équivalence d'une surface compacte et sans bord est caractérisée par son orientabilité (oui/non) et son genre $g \in \mathbb{N}$.

Exemple 18.1.9. voir figures qui montre le **patron** des surfaces, c'est à dire un disque avec des règles d'identifications aux bords représentées par des flèches. Surfaces orientables : la sphère S^2 (genre $g = 0$), le tore \mathbb{T}^2 (genre $g = 1$), ... plus généralement à une surface à g trous (de genre g), avec $g \geq 0$. Surfaces non orientables : le projectif $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ (i.e. droites dans \mathbb{R}^3 passant par 0) de genre $g = 0$, la **bouteille de Klein** de genre $g = 1$, etc...

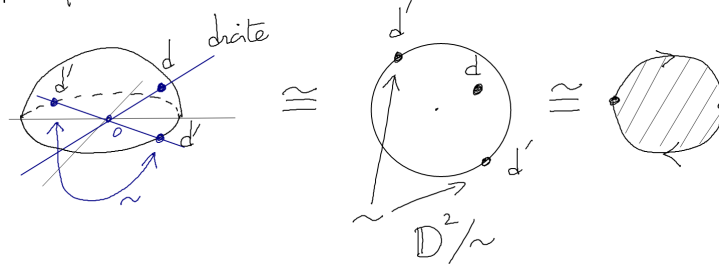


Tore à $g=2$ trous

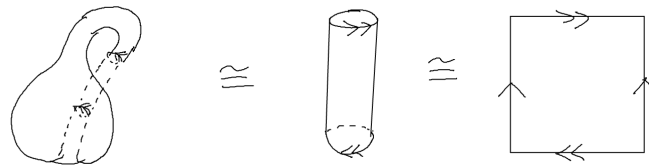


surface $g=3$, orientable

Espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, genre $g=0$, non orientable

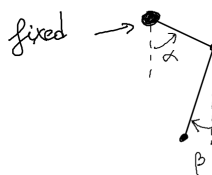


Bouteille de Klein, $g=1$, non orientable



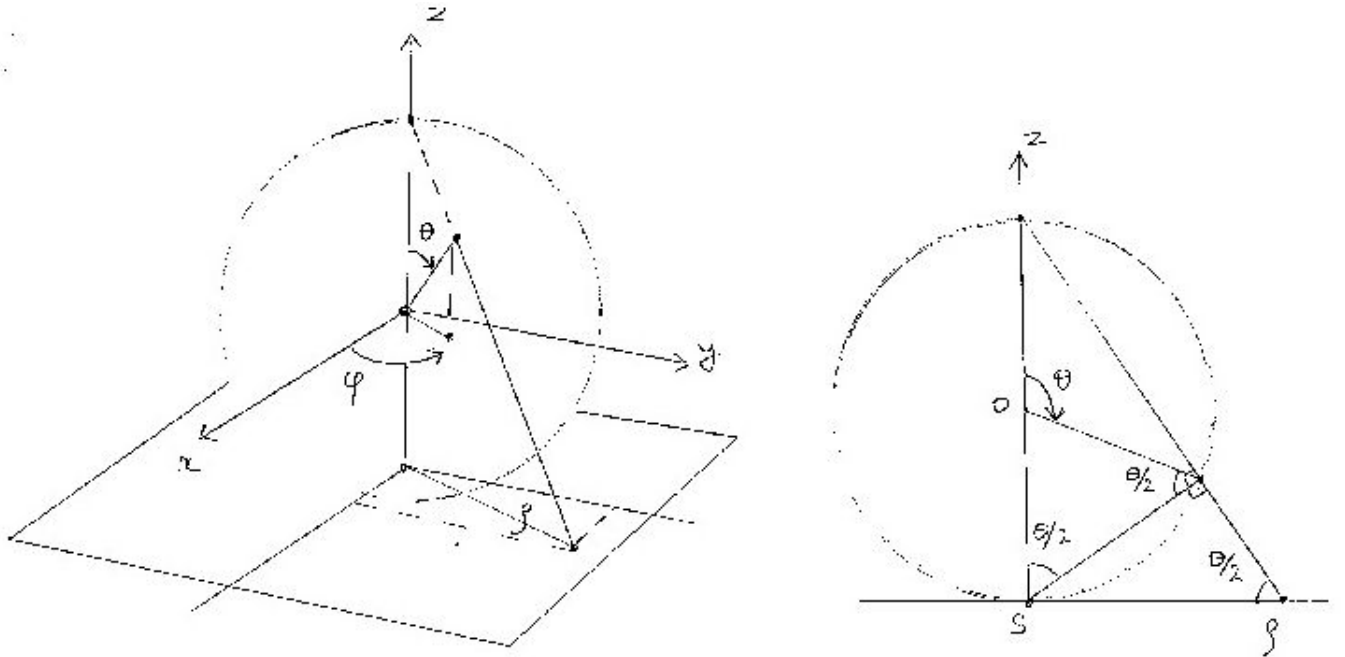
Exemple 18.1.10. En physique, l'espace de configuration du double pendule est $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ paramétré par exemple par deux angles α, β .

Double pendule:



Exercice 18.1.11. Pour la sphère S^2 de rayon 1, établir d'après les figures suivantes, les formules de projection stéréographique $(\theta, \varphi) \rightarrow (\rho, \varphi)$ qui associe à un point de la sphère ses coordonnées stéréographiques (ρ, φ) :

$$\rho = 2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



Montrer que S^2 est une variété complexe de dimension 1. (poser $z_1 = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $z_2 = \frac{1}{z_1} \in \mathbb{C}$ et montrer que l'on a un atlas avec deux cartes).

18.1.1.3 Variétés de dimension 3 et plus

Il y a une classification récente des variétés compactes de dimension 3, appelées **3-variétés**. Il n'y a pas de classification des variétés compactes de dimension $n \geq 4$.

18.1.1.4 (*) Exemples importants de variétés

— L'espace projectif réel

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} / \sim$$

est ensemble des droites passant par 0 dans \mathbb{R}^{n+1} , i.e. avec la relation d'équivalence $x' \sim x$ si $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s.t. $x' = \lambda x$. C'est une variété de dimension n . Comme pour \mathbb{RP}^1 , ci-dessus, on introduit des coordonnées locales appelées "coordonnées inhomogènes" (X_1, X_2, \dots, X_n) par $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \sim (X_1, X_2, \dots, X_n, 1)$ avec $X_j = \frac{x_j}{x_{n+1}}$ si $x_{n+1} \neq 0$, etc..

— L'espace projectif complexe

$$\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}^{n+1} / \sim$$

est ensemble des "droites complexes" passant par 0 dans \mathbb{C}^{n+1} , i.e. avec la relation d'équivalence $x' \sim x$ si $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s.t. $x' = \lambda x$. C'est une variété complexe de dimension n (mais de dimension réelle $2n$).

- Par exemple, la courbe complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ est utile en physique pour décrire les états quantiques à 2 niveaux, appelés **quantum bits** ou **qbits**. (car un vecteur quantique est $x \in \mathbb{C}^2$ et l'observation ne distingue pas x et λx avec $\lambda \in \mathbb{C}$). L'exercice 18.1.11 montre que en tant que variété réelle, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \equiv S^2$ appelée **sphère de Riemann**.
- Par définition $SU(n)$ est l'ensemble des matrices M à coefficients complexes, de taille n , unitaires cad $\langle Mu | Mv \rangle = \langle u | v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{C}^n$ et de déterminant $\det M = 1$. $SU(n)$ est une variété réelle de dimension $n^2 - 1$. Voir page 102. Par exemple pour $n = 2$, $SU(2) \equiv S^3$, voir Proposition 15.0.2.
- Le groupe $SO(3)$ (matrices 3×3 , orthogonales i.e. $M^{-1} = M^\dagger$ et de déterminant 1) est une variété différentiable de dimension 3. On peut penser $SO(3)$ comme l'ensemble des rotations dans \mathbb{R}^3 ou l'ensemble des repères o.n. dans \mathbb{R}^3 (car une rotation permet de passer du repère canonique vers un autre repère). En physique du solide, un point de $SO(3)$ permet de caractériser l'orientation d'un solide (la position spatiale du solide est paramétrée par \mathbb{R}^3), ainsi la trajectoire d'un solide est une trajectoire sur $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Voir Section 14. Plus généralement $SO(n)$ est une variété différentiable de dimension $n(n-1)/2$. Voir (12.0.2).

18.2 Fonctions

Définition 18.2.1. Une **fonction** f à valeurs réelles sur une variété différentielle M est une application :

$$f : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow f(x) \end{cases}$$

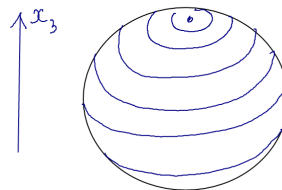
Si $\tau_\alpha(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ est un système de coordonnées locales, alors f est représentée par une fonction numérique à n variables :

$$f_\alpha(x^1, \dots, x^n) = f(\tau_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n))$$

On notera $C^\infty(M; \mathbb{R})$ ou $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions sur M dérivables une infinité de fois (i.e. si f_α est C^∞ pour tout indice de carte α).

Schématiquement, on peut se représenter (ou s'imaginer) une fonction par ses lignes de niveaux.

Lignes de niveaux de la fonction x_3 sur S^2



Remarques :

- Pour simplifier on enlèvera parfois l'indice α de la fonction numérique f_α que l'on notera $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$.
- Par exemple la i -ème coordonnée dans une carte, $x \in M \rightarrow x^i \in \mathbb{R}$, est une fonction sur M définie sur une carte $U \subset M$.
- Les fonctions sont les premiers “objets géométriques élémentaires” associés à une variété : à un point est associé un nombre. En physique on dit parfois qu'une fonction f est un “**champ scalaire**” (voir plus loin).²
- Dire qu'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est dérivable k fois a un sens intrinsèque (i.e. indépendant du système de coordonnées) que si la variété est C^k .
- Généralisation : on peut aussi considérer les fonctions à valeurs complexes ou à valeur dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{C}^p$, avec $p \geq 1$, etc.

18.3 Vecteurs tangents

Définition 18.3.1. une **courbe paramétrée** ou **trajectoire** γ sur une variété M qui est C^∞ (penser une **trajectoire**) est une application

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow M \\ t & \rightarrow \gamma(t) \end{cases}$$

Si $\tau_\alpha(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ est un système de coordonnées locales, alors γ est représentée par les n coordonnées de la trajectoire.

$$t \rightarrow (x^1(t), \dots, x^n(t)) = \tau_\alpha(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Remarque 18.3.2. On voudrait définir le vecteur tangent à la courbe au point $\gamma(0)$ par exemple comme étant le **vecteur vitesse** “ $V = \left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$ ”, mais cela n'a pas de sens a priori car les points $\gamma(t)$ ne s'additionnent pas entre eux, et donc $\gamma(t) - \gamma(0)$ n'a pas de sens. Comment donner un sens à la vitesse? Penser à un parapentiste à la position $\gamma(t)$ dans un nuage. Il veut connaître sa vitesse verticale, mais ne voit rien. Il observe son altimètre qui lui donne une valeur numérique $f(\gamma(t))$ à chaque instant t . Remarquer que maintenant $\frac{df(\gamma(t))}{dt} /_{t=0}$ a un sens car c'est une dérivée numérique. Par contre le résultat dépend du choix de la fonction f . Cela amène à la définition suivante qui considère l'ensemble des fonctions

2. (*) Voir [33],[22, chap3] pour une présentation des variétés à partir de l'espace des fonctions qui y “vivent” : si \mathcal{F} est une \mathbb{R} -algèbre (cad commutative, associative avec unité 1), on considère les homomorphismes $M := \{x : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et le dual $\mathcal{F}^{**} := \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$. Si $\bigcap_{x \in M} \text{Ker } x = \{0\}$ alors $\mathcal{F}^{**} \cong \mathcal{F}$ et on peut interpréter M comme une variété et \mathcal{F} comme l'algèbre des fonctions sur M . Une branche récente des mathématiques appelée **géométrie non commutative**, développée par Alain Connes, est basée sur une généralisation de cette approche.

Définition 18.3.3. Le **vecteur tangent** V à la courbe γ au point $\gamma(0)$ est l'application

$$V : \begin{cases} C^\infty(M) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \rightarrow V(f) := \frac{df(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (18.3.1)$$

Remarque 18.3.4. V agit sur les fonctions et renvoie un nombre qui détecte leur variation au 1er ordre. On utilisera parfois la notation $V = \frac{d\gamma(t)}{dt}$ bien qu'elle ne soit pas correcte.



On va voir maintenant que la fonctionnelle V est en fait simplement un opérateur différentiel d'ordre 1.

18.3.1 Expression d'un vecteur tangent V dans un système de coordonnées locales

Si $(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \tau_\alpha(\gamma(t))$ sont les coordonnées du point sur la courbe paramétrée γ , et $f_\alpha(x^1, \dots, x^n) = f(\tau_\alpha(x))$ alors

$$f(\gamma(t)) = f_\alpha(\tau^{-1}(\tau(\gamma(t)))) = f_\alpha(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

et d'après la formule de composition,

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{df(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df_\alpha(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^1} \right) \frac{dx^1}{dt} + \dots + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^n} \right) \frac{dx^n}{dt} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_\alpha \end{aligned}$$

donc l'expression de V en coordonnées locales au point $x = \gamma(0)$ est donnée par $V(f) = V_\alpha(f_\alpha)$ avec

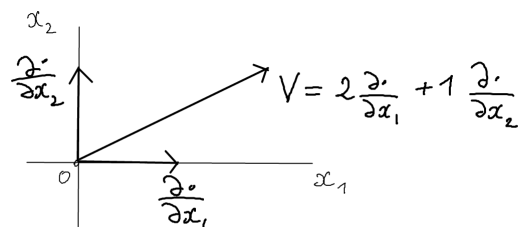
$$V_\alpha = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad V^i = \frac{dx^i(t)}{dt} \Big|_{t=0} \in \mathbb{R} \text{ : "composante"} \quad (18.3.2)$$

Si on considère une autre courbe paramétrée γ passant par le même point $x(0)$, les composantes V^i seront différents. On déduit que

Proposition 18.3.5. *En tout point $x \in M$, un vecteur tangent V s'écrit en coordonnées locales $V(f) = V_\alpha(f_\alpha)$ avec*

$$V_\alpha = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad V^i \in \mathbb{R}. \quad (18.3.3)$$

$(V^1, \dots, V^n) \in \mathbb{R}^n$ sont les "composantes de V ". V_α est un opérateur différentiel d'ordre 1. On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents au point x , appelé **espace tangent au point x** . C'est un espace vectoriel de dimension n et les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1 \rightarrow n$, forment donc une base de $T_x M$ (base associée au choix des coordonnées).



Exemple de vecteur tangent V exprimé dans une base

Pour simplifier, dans la suite, on notera directement $V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ à la place de V_α .

Exemple 18.3.6. Sur le plan \mathbb{R}^2 avec les coordonnées euclidiennes (x, y) , considérons la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)$, décrivant un cercle de rayon 1. Le vecteur tangent à γ en $t = 0$ est :

$$V = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

ses composantes sont donc $(V^x, V^y) = (0, 1)$ dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

Définition 18.3.7. L'ensemble des espaces tangents est noté

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

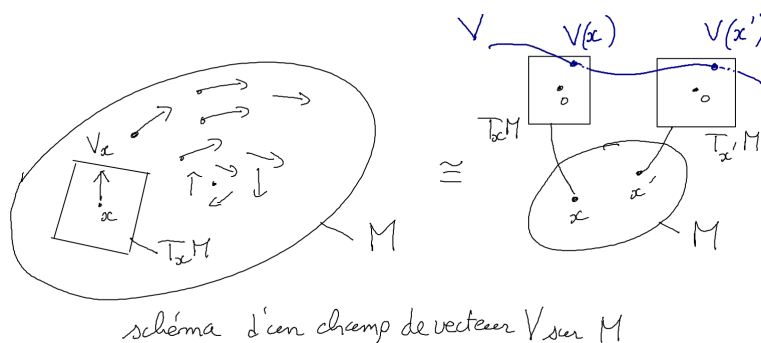
C'est une variété de dimension $2n$, avec les coordonnées locales $(x^i, V^i)_{i=1 \rightarrow n}$. TM est un **espace fibré vectoriel** de rang n , appelé **l'espace fibré tangent** ou **espace tangent**.

Voir Section 23 pour plus d'informations sur les espaces fibrés.

Définition 18.3.8. Un **champ de vecteur** sur M (ou **section** du fibré TM), est un choix de vecteur tangent en chaque point :

$$V : \begin{cases} M & \rightarrow TM \\ x & \rightarrow V(x) \in T_x M \end{cases}$$

On note $C^\infty(M; TM)$ est l'ensemble des champs de vecteur C^∞ sur M (i.e. ensemble des sections C^∞ du fibré TM).



Théorème 18.3.9. Un **champ de vecteur** $V \in C^\infty(M; TM)$ est une **dérivation** sur l'espace des fonctions, c'est à dire un opérateur linéaire

$$V : \begin{cases} C^\infty(M) & \rightarrow C^\infty(M) \\ f & \rightarrow V(f) \end{cases}$$

vérifiant la "**formule de Leibniz**"

$$\forall f, g \in C^\infty(M), \quad V(fg) = V(f)g + fV(g),$$

s'exprimant par un opérateur différentiel d'ordre 1 : $V_\alpha = \sum_{i=1}^n V_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec des composantes $V_i(x) \in C^\infty$. Inversement toute dérivation est un champ de vecteur. (Cela peut servir de définition).

Démonstration. (*) D'après son expression locale comme un opérateur de dérivation (18.3.3), il est clair qu'un champ de vecteur vérifie la formule de Leibniz. Inversement si D est une dérivation, on écrit près d'un point une fonction $f(x) = f(0) + \sum_i x_i g_i(x)$ avec $g_i(0) = (\partial_{x_i} f)(0)$. La loi de Leibniz donne

$$(Df)(0) = \sum_i D(x_i)(0) g_i(0) = \sum_i V_i(0) (\partial_{x_i} f)(0),$$

donc $D = \sum_i V_i \partial_{x_i}$ est un champ de vecteur. \square

Remarques

- (*) Eq.(18.3.2) montre que V représente bien le vecteur vitesse $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ comme souhaité au début de la section.
- (*) En physique, on utilise parfois **la convention d'Einstein** qui est d'omettre le signe $\sum_{i=1}^n$ lorsque cela est évident :

$$V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(noter que dans cette écriture il y a deux indices muets i sur lequel on somme : un "en haut" et un "en bas").

- (*) **Intérêt de la notation Eq.(18.3.3)** : elle est indépendante du système de coordonnées. L'exemple le plus simple pour comprendre le mécanisme est sur \mathbb{R} , en dimension 1. Supposons la coordonnée $x \in \mathbb{R}$ et le changement de coordonnée $y = \phi(x)$ sur la même droite où ϕ est un difféomorphisme. Un champ de vecteur est exprimé dans chaque système de coordonnée :

$$V = V^x(x) \frac{\partial}{\partial x} = W^y(y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Question : exprimer W^y à partir de V^x .

Réponse : on écrit d'après la loi de composition des dérivées

$$V = V^x \frac{\partial}{\partial x} = \left(V^x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

donc $W^y = V^x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = V^x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$.

- Autre exemple : sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on considère les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (r, θ) qui sont reliées par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

supposons que

$$V = V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y}$$

est un champ de vecteur.

Question : exprimer ses coordonnées (V^x, V^y) cartésiennes en fonction de ses coordonnées polaires (V^r, V^θ) ?

Réponse : on écrit d'après la formule des changements de variables pour la dérivée :

$$\begin{aligned}
 V &= V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 &= V^r \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + V^\theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\
 &= V^r \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) + V^\theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
 &= V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y}
 \end{aligned}$$

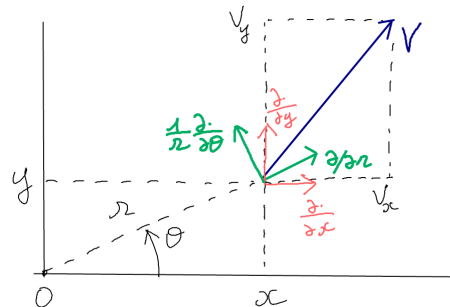
avec

$$\begin{aligned}
 V^x &= \cos \theta V^r - r \sin \theta V^\theta \\
 V^y &= \sin \theta V^r + r \cos \theta V^\theta
 \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^r \\ rV^\theta \end{pmatrix}$$

En cours de physique, on apprend à trouver ce résultat directement à l'aide de la figure suivante.



Exercice 18.3.10. Plus généralement si \$(x^1, \dots, x^n)\$ et \$(y^1, \dots, y^2)\$ sont deux systèmes de coordonnées, et \$V = \sum_j V^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k W^k \frac{\partial}{\partial y^k}\$ est un champ de vecteur alors ses coordonnées dans les deux systèmes sont reliées par

$$\forall k, \quad W^k = \sum_j \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right) V^j.$$

D'après cette formule, en physique, on appelle le vecteur des composantes \$(V^j)_j\$, un **vecteur contravariant**.

18.3.2 Trajectoires et flot

Ci-dessus, on a défini un vecteur tangent comme étant un “vecteur vitesse” le long d’une trajectoire donnée. Inversement, on va maintenant considérer un champ de vecteur donné et voir qu’il définit un ensemble de trajectoires, que l’on appelle “**lignes de champ**” ou “**flot**”.

Définition 18.3.11. Soit V un champ de vecteur sur M . Pour $t \in \mathbb{R}$, le **flot généré par ce champ de vecteur** est l’application

$$\phi^t : \begin{cases} M & \rightarrow M \\ x & \rightarrow \phi^t(x) \end{cases}$$

définie par la condition

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = V(\phi^t(x)). \quad (18.3.4)$$

et $\phi^{t=0} = \text{Id}$. Autrement dit, $(\phi^t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ est la trajectoire passant par x telle que V est le champ de vitesses.

Remarques :

- Si le champ de vecteur V est donné, alors d’après (18.3.2), dans un système de coordonnées la trajectoire $x(t) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$ est solution d’un système d’équations différentielles ordinaires du type :

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = V^i(x(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (18.3.5)$$

où $V^i(x)$ sont les composantes du champ de vecteur au point x . D’après le **théorème de Cauchy-Lipschitz** (voir [28] p.8 ou wikipedia), la solution existe et est unique à condition que $V^i(x)$ soit Lipschitz continu (C^1 est donc suffisant). Pour trouver la trajectoire, il faut “**intégrer**” ce “**système d’équations différentielles ordinaire d’ordre 1**”. Voir remarque page 153.

- (*) On a la propriété de groupe suivante. Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$:

$$\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{t+s}(x)$$

- (*) La notion de champ de vecteur et de trajectoire ou flot associé est fondamentale en **mécanique classique**. (Voir plus loin pour une définition précise). Par exemple étant donné un Hamiltonien $H(x, p)$, les équations de Hamilton dans l’espace des phases $(x, p) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V^x = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= V^p = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

définissent un champ de vecteur de composantes $V^x = \frac{\partial H}{\partial p}$, $V^p = -\frac{\partial H}{\partial x}$ et stipulent que la trajectoire classique suit le flot de ce champ de vecteur. Le résultat d'existence et d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz traduit le **déterminisme** de la mécanique classique.

18.3.3 Exemples de champs de vecteurs et leur flot

— Sur \mathbb{R} , avec la coordonnée $x \in \mathbb{R}$:

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_t : x(t) = x(0) + t \quad (18.3.6)$$

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = x \quad \phi_t : x(t) = e^t x(0)$$

— Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, avec les coordonnées polaires r, θ :

$$V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \end{cases} \quad \phi_t : \begin{cases} r(t) = r(0) \\ \theta(t) = \theta(0) + \frac{t}{r} \end{cases}$$

c'est une rotation à vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}$. Les trajectoires sont des cercles.

Exercice 18.3.12. Sur \mathbb{R}^2 , en coordonnées cartésiennes (x, y) , tracer le champ de vecteur $V = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ et déterminer le flot ϕ_t associé et la forme des trajectoires.

Remarque 18.3.13. Dans les exemples ci-dessus on trouve facilement les trajectoires (le flot) à partir de l'expression du champ de vecteur. Le **théorème de Poincaré Bendixon** montre que plus généralement en dimension 2, il est possible d'intégrer un champ de vecteur pour trouver les trajectoires, qui ont un comportement "simple". Par contre à partir de la dimension 3, il est en général impossible de trouver les trajectoires explicitement, bien que elles soient "déterminées". Une expression simple de champ de vecteur peut générer des trajectoire d'apparence "très complexes et aléatoires". Ce problème est à la base de **la théorie du chaos déterministe**. La raison est un phénomène de "sensibilité aux conditions initiales".

Remarque 18.3.14. Conjecture, **16ème problème de Hilbert** : un champ de vecteur polynomial sur le plan \mathbb{R}^2 admet un nombre fini de cycles et points fixes. **Question de Hilbert** : « Un degré n étant donné, quel est le nombre maximal $H(n)$ de cycles limites que peut avoir un champ de vecteurs polynomial de degré n ? »

18.3.4 Transport de fonctions par le flot

On considère un champ de vecteur V sur une variété M , générant un flot ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$ définit en (18.3.4).

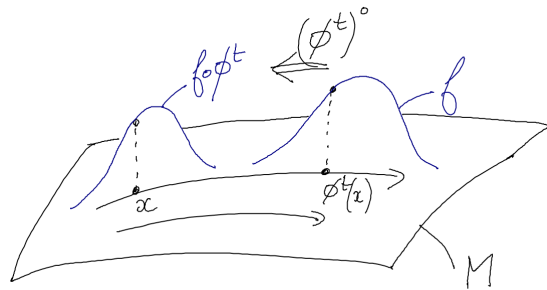


FIGURE 18.3.1 –

Définition 18.3.15. Le flot $\phi^t : M \rightarrow M$ définit un **opérateur linéaire de composition**, appelé aussi “pull-back”, “tiré en arrière”, “opérateur de Koopman” :

$$(\phi^t)^\circ : \begin{cases} C^\infty(M) & \rightarrow C^\infty(M) \\ f & \rightarrow f \circ \phi^t \end{cases}$$

Remarquer que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad (\phi^s)^\circ \circ (\phi^t)^\circ = (\phi^{s+t})^\circ,$$

montrant que la famille d’opérateurs $(\phi^t)^\circ_{t \in \mathbb{R}}$ forme un groupe à un paramètre t .

Proposition 18.3.16. La famille de fonctions $f_t(x) = f(\phi^t(x)) = (\phi^t)^\circ f$ transportée par le flot ϕ^t vérifie l’équation de transport infinitésimale :

$$\frac{df_t}{dt} = V(f_t) \tag{18.3.7}$$

On dit que V est le **générateur** du transport des fonctions par le flot. De même

$$\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V(\phi^t)^\circ$$

et $(\phi^{t=\text{Id}})^\circ = \text{Id}$. Formellement on écrit donc

$$(\phi^t)^\circ = "e^{tV}."$$

Démonstration. Par définition $(\phi^t)^\circ f = f \circ \phi^t$ et $\frac{df \circ \phi^t}{dt} = V(f \circ \phi^t)$ donc

$$\frac{d(\phi^t)^\circ f}{dt} = V(\phi^t)^\circ f$$

pour toute fonction f donc $\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V(\phi^t)^\circ$. □

Exemple simple de la translation en x sur l'espace \mathbb{R} : Soit le champ de vecteur constant de composante $V_x = 1$, c'est à dire

$$V = \frac{d}{dx}$$

qui génère le flot, d'après (18.3.6),

$$\phi_t(x) = x + t$$

qui est une translation. Soit $f_0(x)$ une fonction à $t = 0$. Alors

$$f_t(x) \stackrel{(\text{??})}{=} f_0(\phi^t(x)) = f_0(x + t)$$

Remarque pour la mécanique quantique : Afin de montrer l'utilité de cela en mécanique quantique, introduisons la constante de Planck \hbar et l'opérateur impulsion $\hat{p}_x := -i\hbar \frac{d}{dx}$. L'équation de transport infinitésimal (18.3.7) s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{df_t}{dt} &= V f_t = \frac{df}{dx} \\ \Leftrightarrow i\hbar \frac{df_t}{dt} &= i\hbar \frac{df}{dx} = -\hat{p}_x(f) \end{aligned}$$

La dernière équation est l'équation de Schrödinger écrite avec l'opérateur impulsion $-\hat{p}_x$. Pour cette raison on dit que \hat{p}_x est le générateur des translations de fonctions dans la direction x .

18.3.5 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

On a vu dans la Proposition 18.3.5 qu'un champ de vecteur V est un opérateur différentiel d'ordre 1. On note

$$[V_1, V_2] := V_1 V_2 - V_2 V_1$$

appelé **commutateur** ou **crochet de Lie** des deux champ de vecteur³.

Proposition 18.3.17. Soient V_1, V_2 deux champs de vecteurs générant les flots $\phi_{t_1}^{(1)}, \phi_{t_2}^{(2)}$ respectivement. Si $[V_1, V_2] = 0$ alors

$$\phi_{t_1}^{(1)} \left(\phi_{t_2}^{(2)}(x) \right) = \phi_{t_2}^{(2)} \left(\phi_{t_1}^{(1)}(x) \right), \quad \forall t_1, t_2, x$$

on dit que les deux **flots commutent**.

3. Cela signifie que si $f \in C^\infty(M)$, $[V_1, V_2]f = V_1(V_2(f)) - V_2(V_1(f))$. A priori $[V_1, V_2]$ est un opérateur différentiel d'ordre 2.

Démonstration. Soit $\hat{T}_{t_1}^{(1)} = e^{-t_1 V_1}$, $\hat{T}_{t_2}^{(2)} = e^{-t_2 V_2}$ les opérateurs de transfert associés. Si $V_1 V_2 = V_2 V_1$ alors on déduit que $\hat{T}_{t_1}^{(1)} \hat{T}_{t_2}^{(2)} = \hat{T}_{t_2}^{(2)} \hat{T}_{t_1}^{(1)}$ donc

$$f \left(\phi_{t_1}^{(1)} \left(\phi_{t_2}^{(2)} (x) \right) \right) = f \left(\phi_{t_2}^{(2)} \left(\phi_{t_1}^{(1)} (x) \right) \right), \quad \forall t_1, t_2, x, f$$

et on déduit le résultat. \square

Théorème 18.3.18. *Si V et W sont deux champs de vecteurs, alors le commutateur*

$$[V, W] := VW - WV \quad (18.3.8)$$

*est un champ de vecteur appelée **crochet de Lie de V et W** .*

C'est à dire c'est un opérateur différentiel d'ordre 1 et non pas d'ordre 2 comme on pourrait le supposer a priori. (VW ou WV sont eux d'ordre 2).

Démonstration. (* en exercice) preuve 1 : montrer que $[V, W]$ est une dérivation, cf Théorème 18.3.9.

preuve 2 : dans un système de coordonnées : $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $W = \sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Si $f \in C^\infty(M)$ alors

$$(VW - WV) f = \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(W^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(V^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (18.3.9)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + V^i W^j \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &\quad - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (18.3.10)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_i V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

donc $Z = VW - WV$ est un champ de vecteur de composantes

$$Z_j = \left(\sum_i V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \right)$$

\square

Remarque sur la signification de $[V_1, V_2]$:

- Le champ de vecteur $[V_1, V_2] := V_1V_2 - V_2V_1$ représente la non-commutation infinitésimale des flots générés par V_1 et V_2 .
- En termes de théorie des groupes, les opérateurs de composition forment un groupe de Lie de dimension infinie (non commutatif). Les champs de vecteurs sont donc les générateurs. L'espace des champs de vecteur est une algèbre de Lie (avec le crochet de Lie). Historiquement, Sophus Lie a étudié ce groupe et cette algèbre pour développer ensuite la théorie des groupes et algèbres de Lie.

Exercice 18.3.19. Sur $M = \mathbb{R}^2$, avec les coordonnées (x, y) , soit $V = x \frac{\partial}{\partial y}$ et $W = y \frac{\partial}{\partial x}$. Calculer et représenter le champ de vecteur $Z = [V, W]$ ainsi que ses trajectoires.

Solution 18.3.20. $Z = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$. Ses trajectoires sont des hyperboles (voir ex. page 153).

Exercice 18.3.21. Champ de vecteur et flot de rotation sur \mathbb{R}^2

Dans le plan \mathbb{R}^2 , un point x peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) ou polaires (r, θ) ou complexes (z, \bar{z}) définies par

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & x_2 &= r \sin \theta \\ z &= x_1 + ix_2 = re^{i\theta}, & \bar{z} &= x_1 - ix_2 = re^{-i\theta} \end{aligned}$$

(Utilisant la notation d'opérateur différentiel) on considère le champ de vecteur V défini par

$$V = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. C'est à dire que ses composantes polaires sont $V_r = 0, V_\theta = \omega$.

1. Tracer l'allure du champ de vecteur V dans le plan \mathbb{R}^2 . Exprimer V en coordonnées cartésiennes et complexes, c'est à dire trouver les composantes V_{x_1}, V_{x_2} et $V_z, V_{\bar{z}}$ définies par

$$V = V_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + V_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} = V_z \frac{\partial}{\partial z} + V_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Solution 18.3.22. On écrit

$$\begin{aligned} V &= \omega \frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} = \omega (-r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega (r \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= -\omega x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Donc

$$V_{x_1} = -\omega x_2, \quad V_{x_2} = \omega x_1.$$

De même

$$V = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \omega \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \omega (iz) \frac{\partial}{\partial z} + \omega (-i\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Donc

$$V_z = i\omega z, \quad V_{\bar{z}} = -i\omega \bar{z}.$$

2. On note $\phi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le flot généré par le champ de vecteur V . Ecrire les équations de mouvement des trajectoires générées par ce champ de vecteur dans les différents systèmes de coordonnées. Choisir le meilleur système de coordonnées pour les résoudre et déduire l'expression du flot ϕ^t . Schéma du flot.

Solution 18.3.23. En coordonnées polaires

$$\frac{dr}{dt} = V_r = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = V_\theta = \omega,$$

la solution est simple : $r(t) = r(0)$, $\theta(t) = \omega t + \theta(0)$. En coordonnées (x_1, x_2)

$$\frac{dx_1}{dt} = V_{x_1} = -\omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = V_{x_2} = \omega x_1,$$

c'est moins simple à résoudre (système couplé 2×2). En coordonnées (z, \bar{z})

$$\frac{dz}{dt} = V_z = i\omega z, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = V_{\bar{z}} = -i\omega \bar{z},$$

la solution est simple : $z(t) = e^{i\omega t} z(0)$, $\bar{z}(t) = e^{-i\omega t} \bar{z}(0)$.

3. On note $(\phi^t)^\circ : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'opérateur de composition défini par $(\phi^t)^\circ f = f \circ \phi^t$. Montrer que $\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V(\phi^t)^\circ$, $(\phi^{t=0})^\circ = \text{Id}$ et donc (formellement)

$$(\phi^t)^\circ = e^{tV}.$$

Solution 18.3.24. Par définition $(\phi^t)^\circ f = f \circ \phi^t$ et $\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V(f \circ \phi^t)$ donc

$$\frac{d(\phi^t)^\circ f}{dt} = V(\phi^t)^\circ f$$

pour toute fonction f donc $\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V(\phi^t)^\circ$.

4. On appelle $p_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}$, $p_2 = -i\frac{\partial}{\partial x_2}$ les “opérateurs impulsion” (utilisés en mécanique quantique). Montrer que

$$-iV = \omega(x_1 p_2 - x_2 p_1)$$

Solution 18.3.25. On a

$$-iV = -i(-\omega x_2 \partial_{x_1} + \omega x_1 \partial_{x_2}) = \omega(x_1 p_2 - x_2 p_1).$$

Exercice 18.3.26. Moment angulaire, groupe et algèbre des rotations dans \mathbb{R}^3

Cet exercice fait suite à l'exercice précédent.

1. On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $p_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 1, 2, 3$ et $p = (p_1, p_2, p_3)$ qui est un triplet de champ de vecteurs appelé **opérateur impulsion**. On note

$$L = x \wedge p := \begin{cases} L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{cases}$$

Ainsi $L = (L_1, L_2, L_3)$ est appelé **opérateurs moment angulaire**. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ vecteur unitaire, $\|u\| = 1$. Montrer que le champ de vecteur

$$V_u = i(L.u) := i(L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3)$$

génère un flot $(\phi_u^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ qui est une rotation d'un angle α autour de l'axe $\mathbb{R}u$. (Aide : il suffit de traiter le cas $u = (0, 0, 1)$). On dit que l'opérateur moment angulaire est le **générateur des rotations**. Et l'opérateur de composition $R_{\alpha, u} = e^{-\alpha V_u} = ((\phi_u^\alpha)^\circ)^{-1}$ est appelé opérateur de rotation.

Solution 18.3.27. Dans le cas $u = (0, 0, 1)$, on a $V_u = iL_3 = i(x_1 p_2 - x_2 p_1) = V_{\omega=1}$ de l'exercice 18.3.21. On a vu que e^{-tV_u} est une rotation d'un angle t autour de l'axe x_3 .

2. Pour des opérateurs A, B , par définition $[A, B] := AB - BA$ est appelé commutateur. Montrer que

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_2, L_3] = iL_1, \quad [L_3, L_1] = iL_2$$

appelé relation de commutation de l'algèbre $\mathfrak{so}(3)$.

Solution 18.3.28. On observe que $[x_j, p_j] f = x_j (-i \partial_{x_j}) f - (-i \partial_{x_j}) (x_j f) = i f$ donc $[x_j, p_j] = i \text{Id}$. Et donc

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= [x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3] = [x_2 p_3, x_3 p_1] + [-x_3 p_2, -x_1 p_3] \\ &= x_2 p_1 [p_3, x_3] + x_1 p_2 [x_3, p_3] = i(-x_2 p_1 + x_1 p_2) = iL_3. \end{aligned}$$

De même pour les autres.

3. Plus généralement, déduire que si on note $U = \alpha u \in \mathbb{R}^3$ et $V_U = i(L.U)$ le champ de vecteur qui génère l'opérateur de rotation $R_{\alpha, u} = e^{-V_U} = ((\phi_u^\alpha)^\circ)^{-1}$, alors pour $U, W \in \mathbb{R}^3$ quelconques

$$[V_U, V_W] = -V_{U \wedge W}.$$

Solution 18.3.29. On a $U \wedge W = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{j,k,l} U_j W_k e_l$ avec le **symbole de Levi-Civita** $\epsilon_{j,k,l} \in \{-1, 0, 1\}$ et vecteur de base $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. On a

vu que $[L_j, L_k] = \sum_l \epsilon_{j,k,l} L_l$ et $L.e_l = L_l$. Alors

$$\begin{aligned} [V_U, V_W] &= [iL.U, iL.W] = - \sum_{j,k=1}^3 U_j W_k [L_j, L_k] \\ &= -i \sum_{j,k,l=1}^3 U_j W_k \epsilon_{j,k,l} L_l = -i \sum_{j,k,l=1}^3 U_j W_k \epsilon_{j,k,l} e_l . L \\ &= -i (U \wedge W) . L = -V_{U \wedge W}. \end{aligned}$$

18.4 Vecteurs cotangents ou 1 formes

Rappel : **une forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire sur E à valeur dans \mathbb{R} :

$$\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'espace des formes linéaires est appelé **espace dual** et noté E^* . Voir page 63.

Définition 18.4.1. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction, sa **différentielle** en un point $x \in M$ est une forme linéaire sur l'espace tangent $T_x M$ et définie par (grâce à Eq.(18.3.1) et (18.3.3)) :

$$df_x : \begin{cases} T_x M & \rightarrow \mathbb{R} \\ V & \rightarrow df(V) := V(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} V^i \end{cases} \quad (18.4.1)$$

Remarque 18.4.2. $df_x \in (T_x M)^*$. Le nombre $df_x(V)$ représente la variation infinitésimale de la fonction f dans le direction du vecteur V au point $x \in M$.

En particulier, si $f = x^i$ (la fonction de coordonnée x^i), alors sa différentielle est

$$dx^i(V) = \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right)}_{\delta_{i,j}} V^j = V^i \quad (18.4.2)$$

donc on peut écrire

$$df(V) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(V)$$

relation valable pour tout V . On déduit donc une notation pour df indépendante du système de coordonnées :

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i$$

On déduit la proposition suivante :

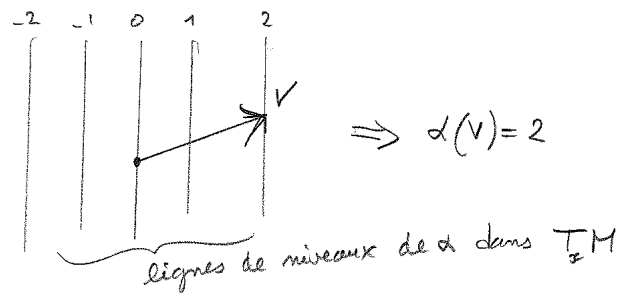
Proposition 18.4.3. *En tout point $x \in M$, une **forme linéaire**, aussi appelée **vecteur cotangent** est une forme linéaire*

$$\xi : \begin{cases} T_x M & \rightarrow \mathbb{R} \\ V & \rightarrow \xi(V) = \sum_{i=1}^n \xi_i V^i \end{cases} \quad (18.4.3)$$

$$\xi \stackrel{(18.4.2)}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$$

avec des composantes $(\xi_i)_i \in \mathbb{R}^n$ appelées **coordonnées duales**. L'ensemble des vecteurs cotangents au point $x \in M$ est noté $T_x^*M := (T_x M)^*$ et appelé **espace cotangent au point x** . C'est un espace vectoriel de dimension n et les vecteurs $(dx^i)_{i=1 \rightarrow n}$ forment une base de T_x^*M associée au choix de coordonnées locales.

— On peut se représenter une forme linéaire par ses lignes de niveau sur l'espace $T_x M$, et $\alpha(V) \in \mathbb{R}$ est la valeur de la ligne à l'extrémité de V . (voir aussi page 63).



Remarque 18.4.4. La base de T_x^*M

$$(dx^1, \dots, dx^n)$$

est appelée **base duale** de la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ de $T_x M$, car on a la relation suivante (en notant $\delta_{i=j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i=j} = 0$ si $i \neq j$).

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{i=j} \quad (18.4.4)$$

Voir propriété 8.0.2 page 65.

Exemple et intérêt de la notation Eq.(??) : Cette notation est utile pour les calculs lors de changements de coordonnées. Sur \mathbb{R}^2 , avec les coordonnées polaires ou cartésiennes $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, considérons la 1 forme $\alpha = dx$ (de coordonnées $(\alpha_x, \alpha_y) = (1, 0)$ dans la base (dx, dy)). On écrit (en dérivant) :

$$\alpha = dx = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \quad (18.4.5)$$

$$= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad (18.4.6)$$

et l'on déduit que α a pour coordonnées $(\alpha_r, \alpha_\theta) = (\cos \theta, -r \sin \theta)$ dans la base $(dr, d\theta)$.

— Plus généralement si (x^1, \dots, x^n) et (y^1, \dots, y^2) sont deux systèmes de coordonnées, et $\xi = \sum_j \xi_j dx^j = \sum_k \eta_k dy^k$ est un champ de vecteur cotangents alors ses coordonnées dans les deux systèmes sont reliées par

$$\forall k, \quad \eta_k = \sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k} \right) \xi_j. \quad (18.4.7)$$

D'après cette formule, en physique, on appelle le vecteur des composantes $(\xi_j)_j$, un **vecteur covariant**.

Définition 18.4.5. La collection des espaces cotangents :

$$T^*M := \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$$

est appelé le **fibré cotangent**. C'est une variété de dimension $2n$, avec les coordonnées locales $(x^i, \xi_i)_{i=1 \rightarrow n}$.

Définition 18.4.6. un “**champ de vecteurs cotangents**” ou **1-forme différentielle** sur M est une section $\xi \in C^\infty(M; T^*M)$ de ce fibré, c'est à dire le choix $\xi(x) \in T_x^*M$ en tous points $x \in M$ et C^∞ par rapport à $x \in M$.

Le théorème suivant montre une grande importance et utilité des 1-formes.

Théorème 18.4.7. Si $\xi \in C^\infty(M; T^*M)$ est une 1-forme et $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est une courbe paramétrée C^∞ , on définit “**l'intégrale de ξ sur γ** ” $\int_\gamma \xi \in \mathbb{R}$ par

$$\int_\gamma \xi := \int_0^1 \left(\xi_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) \right) dt, \quad (18.4.8)$$

où le membre de droite est une intégrale numérique ordinaire de la contraction $\xi_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) \in \mathbb{R}$ entre le vecteur cotangeant $\xi_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}^*M$ et le vecteur tangent vitesse $\frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$. Le résultat ne dépend pas du paramétrage $\gamma(t)$ de la courbe γ .

Démonstration. Si $t = \varphi(t')$ est un autre paramétrage, alors en notant $\frac{dt}{dt'} = \varphi'(t')$ et $\frac{dt'}{dt} = 1/\varphi'(t')$, on obtient

$$\int_0^1 \left(\xi_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) \right) dt = \int_0^1 \left(\xi_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt'} \left(\frac{dt'}{dt} \right) \right) \right) \left(\frac{dt}{dt'} \right) dt' = \int_0^1 \left(\xi_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt'} \right) \right) dt'.$$

donnant la même expression indépendamment du paramétrage. □

Remarque 18.4.8. En chaque point de la courbe γ on a le vecteur tangent $\frac{d\gamma}{dt}$ donnant le nombre $\xi \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)$ qui mesure une variation de ξ dans la direction $\frac{d\gamma}{dt}$. Intuitivement l'intégrale $\int_{\gamma} \xi = \int_{\gamma} \xi \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) dt$ est la somme de ces variations le long de γ .

Remarque 18.4.9. En coordonnées locales, $\int_{\gamma} \xi = \int_0^1 \sum_j \xi_j(x(t)) \left(\frac{dx_j(t)}{dt} \right) dt$.

Remarque 18.4.10. Si $f \in C^{\infty}(M)$ est une fonction alors $df \in C^{\infty}(M; T^*M)$ est une 1-forme. Dans ce cas particulier, compte tenu de $df \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) \stackrel{(18.4.1, 18.3.1)}{=} \frac{df(\gamma(t))}{dt}$, (18.4.8) donne

$$\int_{\gamma} df = \int_0^1 \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

qui dépend que des points extrêmes de la courbe γ . Mais pour une 1-forme quelconque ξ , l'intégrale $\int_{\gamma} \xi$ dépend du chemin et donc on ne peut pas trouver une fonction f qui permet d'écrire $\xi = df$. Si $\xi = df$ on dit que ξ est une **1-forme exacte**.

Exercice 18.4.11. On discutera plus loin en détail la question importante de savoir détecter si une 1 forme est exacte. Montrer qu'une condition nécessaire est

$$\forall j, k, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}.$$

Donner un exemple sur \mathbb{R}^2 de 1-forme non exacte.

Solution 18.4.12. Si

$$\xi = df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \sum_j \xi_j dx_j,$$

alors $\xi_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ et d'après le **Théorème de Schwartz**,

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}.$$

Un contre exemple sur \mathbb{R}^2 est

$$\xi = x_1 dx_2.$$

Si on considère la courbe γ qui est le bord du carré $[0, 1]_{x_1} \times [0, 1]_{x_2}$, alors

$$\int_{\gamma} \xi = 1 \neq 0.$$

18.4.1 1-formes en thermodynamique

Référence :

En thermodynamique, on considère l'espace \mathbb{R}^2 avec les variables (T, P) de température et pression. Pour un système donnée (par exemple un gaz dans une enceinte), il y a les fonctions entropie $S(T, P)$, énergie $U(T, P)$ donnant les différentielles dS, dU , et la 1-forme **chaleur** notée $\delta Q = TdS$ qui n'est pas exacte et la 1 forme **travail** notée δW qui n'est pas exacte, donnée par la relation $dU = \delta Q + \delta W$.

Exercice 18.4.13. Donner un exemple concret de variation de chaleur et de travail $\int_{\gamma} \delta Q, \int_{\gamma} \delta W$ sur un **cycle fermé de Carnot** γ .

18.5 Métrique sur M

Sur une variété différentielle, comme étudiée dans la section 18.1, il n'y a pas la notion de distance entre deux points, ni la notion de volume d'un espace. Pour introduire ces notions (et beaucoup d'autres) on utilise une métrique Riemannienne. On dit que l'on rajoute une "structure" sur l'espace.

18.5.1 Variété Riemannienne

Rappel : on a vu la définition 9.1.1 d'un produit scalaire sur un espace vectoriel, dans le chapitre 9.1.

Définition 18.5.1. Une **métrique Riemannienne** g sur une variété M est un choix de produit scalaire Euclidien g_x sur chaque espace tangent $T_x M, x \in M$ noté

$$\forall V, W \in T_x M, \quad g_x(V, W) = \underset{\text{ou}}{\langle V_x, W_x \rangle_{T_x M}}$$

$$\|V\|_g := \sqrt{g_x(V, V)} \quad : \text{norme de } V.$$

On dit alors que (M, g) est une **variété Riemannienne** et que g est le **champ de tenseur métrique**.

Remarque 18.5.2.

- $g \in C^\infty(M; S(T^*M \otimes T^*M))$ est une section du fibré des tenseurs symétriques d'ordre 2, (et tel que g_x soit non dégénéré et positif en tout $x \in M$).
- Une **variété Lorentzienne** est de façon similaire une variété M avec une métrique g Lorentzienne.

Proposition 18.5.3. *Ecriture de g dans un système de coordonnées locales $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$:*

$$g_x(V, W) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) V^i W^j$$

avec $(g_{ij}(x))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ composantes de g_x qui forment une matrice inversible et symétrique en tout $x \in M$ et données par le produit scalaire des vecteurs tangents de base :

$$g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

On a $dx^i(V) \otimes dx^j(W) \stackrel{(18.4.2)}{=} V^i W^j$ et donc

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \quad (18.5.1)$$

Démonstration. On évalue le tenseur g sur les vecteurs de base $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$ avec i, j quelconques et on utilise que $dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_{k,i}$:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(x) dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \otimes dx^l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij}(x).$$

□

Exemple 18.5.4. Sur \mathbb{R}^n avec les coordonnées cartésiennes (x^1, \dots, x^n) , la métrique

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i \quad (18.5.2)$$

(cad $g_{ij} = \delta_{i,j}$) s'appelle **la métrique euclidienne**, et (\mathbb{R}^n, g) est l'**espace euclidien** de dimension n . On verra que c'est un "espace plat".

Exemple 18.5.5. Sur \mathbb{R}^4 avec les coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) , la métrique $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ s'appelle **la métrique de Minkowski**, et (\mathbb{R}^4, g) est l'**espace de Minkowski** qui modélise un "espace-temps plat" en relativité restreinte.

Exercice 18.5.6. sur $M = \mathbb{R}^2$, avec les coordonnées cartésiennes (x, y) , la métrique euclidienne s'écrit

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy \quad (18.5.3)$$

cad

$$g_{i,j} \equiv_{(x,y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que en coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) :

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta \quad (18.5.4)$$

cad que la matrice des composantes est :

$$g_{i,j} \equiv_{(r,\theta)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (18.5.5)$$

Solution : Par simplicité on note $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$,

$$dx = cdr - rsd\theta, \quad dy = sdr + rcd\theta$$

donc

$$\begin{aligned} g &= dx \otimes dx + dy \otimes dy \\ &= (c^2 + s^2) (dr \otimes dr) + (-rcs + rcs) (dr \otimes d\theta) + (r^2 s^2 + r^2 c^2) (d\theta \otimes d\theta) \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta \end{aligned}$$

Exercice 18.5.7. sur $M = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) , la métrique euclidienne s'écrit

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \quad (18.5.6)$$

cad

$$g_{i,j} \equiv_{(x^1,x^2,x^3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.5.7)$$

Montrer que le même tenseur en coordonnées sphériques (A.3.1) s'écrit :

$$g = dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \quad (18.5.8)$$

cad que la matrice des composantes est :

$$g_{i,j} \equiv_{(r,\theta,\varphi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (18.5.9)$$

Par conséquent, sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de rayon r (fixé), la métrique induite est (car $dr(V) = 0$ pour tout vecteur tangent $V \in TS^2$)

$$g_{S^2} = r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \quad (18.5.10)$$

Solution : On utilise les formules (A.3.2).

Exercice 18.5.8. Soit $f : \theta \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ une fonction C^∞ . Dans \mathbb{R}^3 on considère la surface de révolution définie en coordonnées sphériques par $\mathcal{S} = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = f(\theta)\}$. Tracer l'allure de \mathcal{S} dans les cas $f(\theta) = 1$ ou $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$. Pour f quelconque, donner en coordonnées (θ, φ) , l'expression de la métrique $g_{\mathcal{S}}$ induite sur \mathcal{S} par la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^3 .

Solution 18.5.9. Dans le cas $f(\theta) = 1$, c'est une sphère de rayon 1 et pour $f(\theta) = 2 + \cos(2\theta)$ c'est une forme allongée, rayon $r = 3$ selon l'axe x_3 et rayon $r = 1$ dans le plan (x_1, x_2) . Pour calculer la métrique induite, on a $r = f(\theta)$ donc $dr = f'(\theta) d\theta$ que l'on remplace dans (18.5.8) donnant

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{S}} &= (f'(\theta) d\theta) \otimes (f'(\theta) d\theta) + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \\ &= \left(r^2 + (f'(\theta))^2 \right) d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi. \end{aligned}$$

Définition 18.5.10. Une variété est **localement euclidienne** au point $x \in M$, si il existe un système de coordonnées (x^i) au voisinage de x tel que

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n \tag{18.5.11}$$

(comme $\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle$, Eq.(18.5.6)).

Remarques : Une question importante de géométrie Riemannienne est de savoir si une variété est localement euclidienne ou pas. Il ne suffit pas d'observer l'écriture de g , car par exemple rien ne laisse pas supposer que g est euclidienne dans Eq.(18.5.8), et ne l'est pas dans le cas de S^2 , Eq.(18.5.10). Autre exemple, un cône de révolution dans \mathbb{R}^3 est localement euclidien. Pour répondre à cette question, on utilisera le **tenseur de courbure de Riemann** R , et on verra que M est localement euclidienne si et seulement ssi $R = 0$ en tout point.

Définition 18.5.11. Sur une variété Riemannienne (M, g) , si $\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t) \in M$ est une courbe paramétrée, sa **longueur** mesurée par g est définie par :

$$l(\gamma)_g = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|_g dt \tag{18.5.12}$$

où $\frac{d\gamma}{dt}$ est le vecteur tangent au point $\gamma(t)$ (défini par Eq.(18.3.1)) et $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|_g = \sqrt{g \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)}$ est sa norme. Alors $l(\gamma)$ est indépendant de la paramétrisation (i.e. indépendant de la vitesse à laquelle la courbe est parcourue).

Démonstration. Notons $V_t = \frac{d\gamma}{dt}$. Si $t = \varphi(t')$ est un changement de paramétrisation, et $f \in C^\infty(M)$ une fonction, alors $V_{t'}(f) = \frac{df(\gamma(\varphi(t')))}{dt'} = V_t(f) \cdot \frac{d\varphi}{dt'}$ donc $V_{t'} = \varphi' V_t$, et donc

$$\int_0^1 \sqrt{g(V_{t'}, V_{t'})} dt' = \int_0^1 \sqrt{(\varphi')^2 g(V_t, V_t)} \underbrace{\left(\frac{dt'}{dt}\right)}_{(\varphi')^{-1}} dt = \int_0^1 \sqrt{g(V_t, V_t)} dt$$

□

Définition 18.5.12. Si $x, y \in M$ sont deux points, leur distance mesurée par la métrique g est

$$d_g(x, y) := \inf_{\gamma \text{ t.q. } \gamma(0)=x, \gamma(1)=y} |\gamma|_g$$

La courbe γ qui réalise la **borne inférieure** est appelée **courbe géodésique** entre x et y .

Remarque 18.5.13. La métrique g sur M donne la notion de distance infinitésimale sur M .

Rappel : on a défini

$$\tilde{g}_x : \begin{cases} T_x M & \rightarrow T_x^* M \\ V & \rightarrow g_x(V, \cdot) \end{cases}$$

qui est inversible et

$$\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^* M} := \langle \tilde{g}^{-1}(\xi), \tilde{g}^{-1}(\eta) \rangle_{T_x M}$$

le produit scalaire induit sur $T_x^* M$. Autrement dit \tilde{g} est une isométrie par définition.

Lemme 18.5.14. On a

$$\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^* M} = \sum_{i,j} (\mathbf{g}^{-1})^{i,j} \xi_i \eta_j \quad (18.5.13)$$

où \mathbf{g}^{-1} est la matrice inverse de $\mathbf{g} = (g_{ij})_{ij}$.

Démonstration. En effet, on a $\mathbf{g}_{i,j} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \tilde{g}(\partial_{x_i})(\partial_{x_j})$ donc

$$\tilde{g}(\partial_{x_i}) = \sum_j \mathbf{g}_{i,j} \partial_{x_j}. \quad (18.5.14)$$

$$\partial_{x_j} = \sum_i (\mathbf{g}^{-1})_{j,i} \partial_{x_i}. \quad (18.5.15)$$

Posons $G_{k,l} = \langle dx_k | dx_l \rangle$ que l'on cherche car donnant $\langle \xi, \eta \rangle_{T_x^* M} = \sum_{i,j} G_{i,j} \xi_i \eta_j$. On a

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \langle \partial_{x_i} | \partial_{x_j} \rangle = \langle \tilde{g} \partial_{x_i} | \tilde{g} \partial_{x_j} \rangle \\ &= \sum_{k,l} g_{i,k} g_{j,l} \langle dx_k | dx_l \rangle \\ &= g_{i,k} G_{k,l} g_{l,j} \end{aligned}$$

qui est un produit de matrice $\mathbf{g} = \mathbf{G} \mathbf{G} \mathbf{g}$. Donc $\mathbf{G} = \mathbf{g}^{-1}$, soit $G_{k,l} = (\mathbf{g}^{-1})_{k,l}$. □

Définition 18.5.15. Si $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ est une fonction sur M , son **gradient** est

$$(\text{grad}(f))_x := \tilde{g}_x^{-1}(df_x) \in T_x M. \quad (18.5.16)$$

Ainsi $\text{grad}(f)$ est un champ de vecteur sur M .

Exemple 18.5.16. “Expression du gradient sur l’espace \mathbb{R}^3 Euclidien, en coordonnées cartésiennes et sphériques”.

En coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , d’après (18.5.7), la matrice des composantes et son inverse sont la matrice identité. On déduit de (18.5.15) que $\tilde{g}^{-1}(dx_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Or $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$,

$$\text{grad}(f) \stackrel{(18.5.16)}{=} \tilde{g}^{-1}(df) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \tilde{g}^{-1}(dx_j) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Les composantes de $\text{grad}(f)$ en coordonnées cartésiennes sont donc (la flèche signifie que ce sont des composantes)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) \equiv_{(x^1, x^2, x^3)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right). \quad (18.5.17)$$

Même démarche en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . D’après (18.5.9), on déduit que $\tilde{g}^{-1}(dr) = \frac{\partial}{\partial r}$, $\tilde{g}^{-1}(d\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\tilde{g}^{-1}(d\varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, et $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$, donc

$$\text{grad}(f) \stackrel{(18.5.16)}{=} \tilde{g}^{-1}(df) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

Les composantes dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ sont donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) \equiv_{(r, \theta, \varphi)} \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \quad (18.5.18)$$

Attention, dans les livres de physique, on utilise la base orthonormée, $(u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r \partial \theta}, \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \varphi} \right)$, et dans cette base on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) \equiv_{(u_r, u_\theta, u_\varphi)} \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \quad (18.5.19)$$

18.6 Forme symplectique canonique Ω sur T^*M

[Vidéo sur cette Section.](#)

Dans cette Section on montre l’existence d’une forme bilinéaire antisymétrique particulière sur l’espace cotangent, notée Ω et appelée **forme symplectique canonique**.

Par choix pédagogique, on propose ici une définition de Ω en coordonnées et on vérifie ensuite que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées. Il existe une définition géométrique de Ω (sans utiliser les coordonnées) que l'on donnera plus loin.

Soient (x^1, \dots, x^n) des coordonnées locales sur une variété M . Un vecteur cotangent est noté $\xi = \sum_j \xi_j dx^j$ et $(\xi_j)_j$ sont ses coordonnées. Ainsi $(x^j, \xi_j)_{j=1 \rightarrow n}$ forment des coordonnées locales sur l'espace cotangent T^*M .

Soit $(x, \xi) \in T^*M$ un point de l'espace cotangent et

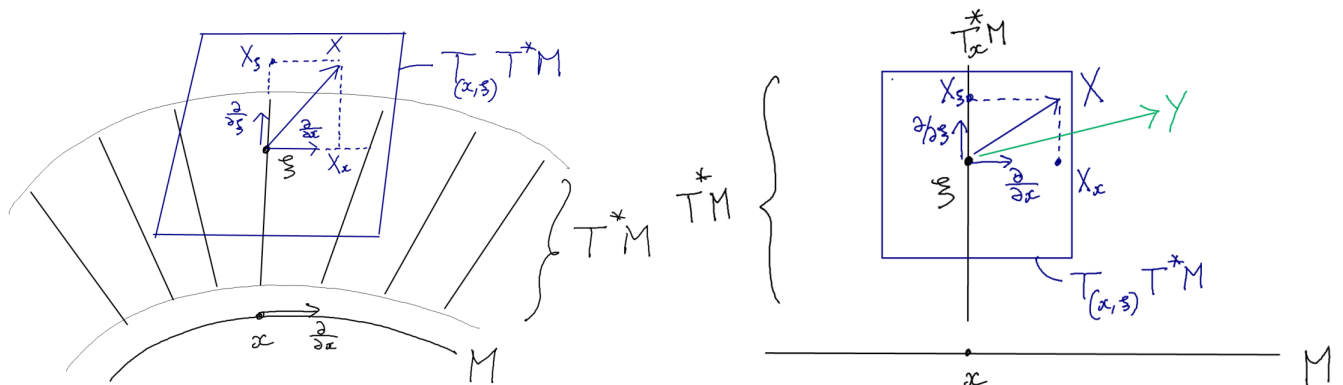
$$X, Y \in T_{(x, \xi)}(T^*M)$$

deux vecteurs tangents. Leurs coordonnées $(X_{x^j}, X_{\xi_j})_{j=1 \rightarrow n} \in \mathbb{R}^{2n}$ et $(Y_{x^j}, Y_{\xi_j})_{j=1 \rightarrow n}$ sont définies par

$$X = \sum_{j=1}^n X_{x^j} \frac{\partial}{\partial x^j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

et de même pour Y . Rappel : $dx^j(X) = X_{x^j}$ etc.

Les schéma suivants représentent la variété M , la variété T^*M comme collection des espaces vectoriels cotangents $(T_x^*M)_{x \in M}$, l'espace tangent $T_{(x, \xi)}T^*M$, les vecteurs tangents $X, Y \in T_{(x, \xi)}T^*M$ ainsi que les coordonnées de X . La deuxième figure est équivalente à la première mais un peu plus schématique et sera utilisé dans la suite.



Définition 18.6.1. On définit la forme bilinéaire Ω sur $T_{(x,\xi)}(T^*M)$ par

$$\Omega(X, Y) := \sum_{j=1}^n X_{x^j} Y_{\xi_j} - X_{\xi_j} Y_{x^j},$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{j=1}^n dx^j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx^j \\ &=: \sum_{j=1}^n dx^j \wedge d\xi_j \end{aligned} \quad (18.6.1)$$

Remarque 18.6.2. Ω est antisymétrique : $\Omega(Y, X) = -\Omega(X, Y)$ et non dégénérée c'est à dire que

$$\tilde{\Omega} : \begin{cases} T_{(x,\xi)}(T^*M) & \rightarrow T_{(x,\xi)}^*(T^*M) \\ X & \rightarrow \tilde{\Omega}(X) := \Omega(X, \cdot) \end{cases} \quad (18.6.2)$$

est un isomorphisme. En effet d'après (18.6.1), $\tilde{\Omega}(\partial_{x_j}) = d\xi_j$, $\tilde{\Omega}(\partial_{\xi_j}) = -dx_j$, donc, dans les bases $(\partial_{x_j}, \partial_{\xi_j}) \rightarrow (dx_j, d\xi_j)$, les composantes de $\tilde{\Omega}$ sont données par la matrice

$$\tilde{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice inversible, car $\tilde{\Omega}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 18.6.3. Ω est indépendante du choix de coordonnées. On appelle Ω la *forme symplectique canonique* sur T^*M .

Démonstration. Si $(x^j)_j \rightarrow (x'^k)_k$ est un changement de coordonnées locales sur M , soit

$$\Omega' := \sum_{j=1}^n dx'^j \wedge d\xi'_j.$$

On veut montrer que $\Omega' = \Omega$. On a

$$dx'^j = \sum_k \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k.$$

Donc

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_k \xi_k dx^k = \sum_j \xi'_j dx'^j \\ &= \sum_k \sum_j \xi'_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k\end{aligned}$$

donc

$$\xi_k = \sum_j \xi'_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right)$$

et

$$d\xi_k = \sum_j \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) d\xi'_j + \sum_j \sum_l \xi'_j \left(\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} \right) dx^l.$$

Donc

$$\Omega = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge d\xi_k = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge d\xi'_j + \sum_j \xi'_j \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} \right) dx_k \wedge dx_l$$

et le deuxième terme s'annule car $\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^k \partial x^l}$ (symétrique) alors que $dx_k \wedge dx_l = -dx_l \wedge dx_k$, ainsi le terme (k, l) est opposé au terme (l, k) . Donc

$$\Omega = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge d\xi'_j = \sum_j dx'^j \wedge d\xi'_j = \Omega'.$$

□

Chapitre 19

Lois de la mécanique classique d'après Hamilton (1834)

19.1 Equations de mouvement de Hamilton, cas général

[Vidéo sur cette Section.](#)

Définition 19.1.1. Soit M une variété appelée « **espace de configuration** ». L'espace cotangent T^*M est appelé « **espace des phases** ». Soit $H \in C^\infty(T^*M; \mathbb{R})$ une fonction sur l'espace des phases appelée « **Hamiltonien** » ou « énergie totale ». Soit

$$X := \tilde{\Omega}^{-1}(dH) \quad (19.1.1)$$

le champ de vecteur sur T^*M appelé « **champ de vecteur Hamiltonien** », autrement dit, $\Omega(X, \cdot) \stackrel{(18.6.2)}{=} dH$. Il génère un flot $\phi^t : T^*M \rightarrow T^*M$ appelé le **flot Hamiltonien**, défini par

$$\frac{d\phi^t}{dt} = X. \quad (19.1.2)$$

Remarque 19.1.2. Eventuellement $H(t)$ peut dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi X dépendrait du temps.

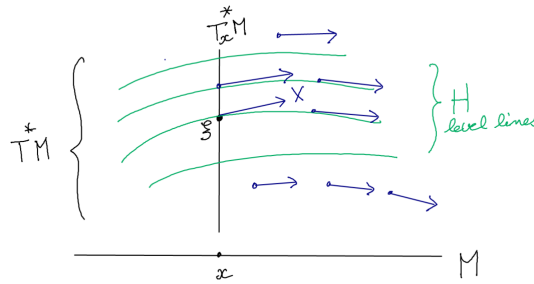


FIGURE 19.1.1 – Trajectoires Hamiltonienne

19.1.1 Expression en coordonnées

Proposition 19.1.3. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des coordonnées locales sur M et (ξ_1, \dots, ξ_n) les coordonnées duales sur T_x^*M . Le champ de vecteur Hamiltonien s'écrit

$$X = \sum_{j=1}^n X_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

et génère des trajectoires de composantes $(x_j(t), \xi_j(t))_{j=1 \dots n} = \phi^t(x(0), \xi(0))$ qui vérifient les **équations de Hamilton**

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} &= X_{x_j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= X_{\xi_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases} \quad (19.1.3)$$

Démonstration. On a $X = \tilde{\Omega}^{-1}(dH) \Leftrightarrow \Omega(X, \cdot) = dH$. Or

$$dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial H}{\partial \xi_j} d\xi_j$$

et

$$\Omega = \sum_j dx_j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx_j$$

Donc

$$\Omega(X, \cdot) = \sum_j X_{x_j} d\xi_j - X_{\xi_j} dx_j$$

L'identification des composantes de $\Omega(X, \cdot) = dH$ donne $X_{x_j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ et $-X_{\xi_j} = \frac{\partial H}{\partial x_j}$. \square

19.1.2 Conservation de l'énergie

Proposition 19.1.4. « *Conservation de l'énergie* ». $X(H) = 0$ et $H(\phi^t(\rho)) = H(\rho)$ pour tout $\rho \in T^*M$ et $t \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que l'énergie totale est conservée par le flot Hamiltonien.

Démonstration. On a $X(H) \stackrel{(18.4.1)}{=} dH(X) \stackrel{(19.1.1)}{=} \Omega(X, X) = 0$ car Ω est antisymétrique. Si on note $E(t) = H(\phi^t(\rho))$ l'énergie au temps t du point $\rho = (x, \xi) \in T^*M$, on a $\frac{dE}{dt} \stackrel{(18.3.7)}{=} \frac{dH(\phi^t(\rho))}{dt} = X(H) = 0$, ce qui montre que $E(t)$ est constante, l'énergie est conservée. \square

Remarque 19.1.5. La proposition indique que les trajectoires sont incluses dans les lignes de niveau de H qui sont de dimension $\dim T^*M - 1 = 2\dim M - 1$. Comme cas particulier important, si $\dim M = 1$, c'est à dire que l'espace de configuration est de dimension 1, alors $\dim T^*M = 2$, et les lignes de niveau de H sont de dimension $\dim T^*M - 1 = 1$. Ainsi les trajectoires coïncident avec les lignes de niveau, comme sur la figure 19.1.1. Attention, il peut y avoir des points fixes.

19.2 Cas de la mécanique

[Vidéo sur cette Section.](#)

On appelle “**mécanique**” ou “**mécanique classique**”, la théorie de Newton (1685), ensuite reformulée par Lagrange (1780) et Hamilton (1834). Elle concerne le mouvement des objets soumis à des forces, ces objets pouvant être des points (“mécanique du point”), des objets solides (“mécanique du solide”), des fluides (“mécanique des fluides”), le champ électromagnétique, etc.

En mécanique, la variété est $M = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées (x_1, x_2, x_3) fixées par rapport aux étoiles, que l'on appelle le **référentiel cosmique**, et la métrique Euclidienne $g = \sum_{j=1}^3 dx_j \otimes dx_j$.

On considère une fonction $U \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ appelée **énergie potentielle**.

Pour la mécanique du point, considérons un objet ponctuel de masse $m > 0$. A l'instant $t \in \mathbb{R}$, sa position est $x(t) \in M$. On note $(x, \xi) \in T^*M \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, point de l'espace cotangent ou espace des phases.

Définition 19.2.1. La fonction de Hamilton de la mécanique (ou énergie totale) est

$$\begin{aligned}
 H(x, \xi) &:= \underbrace{\frac{1}{2m} \|\xi\|_g^2}_{\text{energie cinétique}} + \underbrace{U(x)}_{\text{energie potentielle}} & (19.2.1) \\
 &= \frac{1}{2m} \left(\sum_j \xi_j^2 \right) + U(x_1, x_2, x_3).
 \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton déterminent un champ de vitesse $X = \tilde{\Omega}^{-1}(dH)$ sur l'espace des phases, générant les trajectoires $(x(t), \xi(t)) \in T^*M$ de la particule dans l'espace des phases. Ses coordonnées dans $M = \mathbb{R}^3$ sont $x(t) = (x_j(t))_j$ et coordonnées duales $\xi(t) = (\xi_j(t))_j$.

Proposition 19.2.2. Les équations de Hamilton (19.1.3) donnent la **Loi de Newton (1685)** :

$$m \frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = F_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (19.2.2)$$

avec les composantes $F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$, $\forall j = 1, 2, 3$ du champ de vecteur

$$F(x) = -\text{grad}(U) \in T_x M. \quad (19.2.3)$$

appelé **champ de forces** et

$$\xi_j = m \frac{dx_j}{dt}$$

appelée **impulsion** ou **quantité de mouvement**.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_j(t)}{dt} &= X_{x_j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \frac{1}{m} \xi_j, \\
 \frac{d\xi_j(t)}{dt} &= X_{\xi_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j,
 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{d\xi_j(t)}{dt} = \frac{1}{m} F_j.$$

□

Remarque 19.2.3. Lorsque un champ de force (i.e. champ de vecteur) F vérifie $\exists U$ t.q. $F = -\text{grad}(U)$, on dit que c'est un "**champ de force conservatif**". Une condition nécessaire et suffisante sur \mathbb{R}^3 est que $\text{rot}(F) = 0$. (voir définition de $\text{rot}(\cdot)$ plus loin).

Remarque 19.2.4. d'après la preuve que l'aspect antisymétrique du tenseur Ω se traduit par le fait que la loi de Newton est du deuxième ordre en temps, i.e. fait intervenir l'accélération et non pas la vitesse. Découvrir cela a occupé Newton et **Hooke** pendant plusieurs années [2].

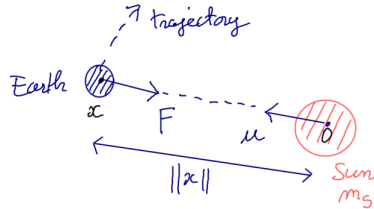
Définition 19.2.5. Un **référentiel Galiléen** est un système de coordonnées qui est en déplacement à vitesse constante par rapport au coordonnées cosmiques.

Proposition 19.2.6. Dans un référentiel Galiléen, les équations de mouvements ont la même forme que (19.2.2).

Démonstration. Car Si $x'(t) = x(t) + Vt$ alors l'accélération $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ est inchangée. \square

Ainsi en considérant (de façon approximative) que le Terre est en déplacement à vitesse constante dans l'univers, on peut appliquer les équations de Newton (ou Hamilton) dans un système de coordonnées liées à la Terre.

Exemple 19.2.7. « Le problème à deux corps (Newton 1687) » La Terre est assimilée à un point $x(t) \in \mathbb{R}^3$ de masse $m = 6.10^{24}\text{kg}$ et le Soleil est à l'origine $x = 0$.



Du fait de la présence du Soleil, la Terre a l'énergie potentielle de gravitation

$$U(x) = -C \frac{1}{\|x\|}, \quad (19.2.4)$$

avec $C = \mathcal{G}mm_s$, la masse du Soleil $m_s = 2.10^{30}\text{kg}$ et la constante universelle de la gravitation $\mathcal{G} = 6.67.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Par conséquent la Terre subit la force suivante de la part du Soleil

$$F(x) = -\text{grad}(U) = -C \frac{u}{\|x\|^2}.$$

avec le vecteur unitaire $u = \frac{x}{\|x\|}$. Pour justifier la dernière égalité, on calcule

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \left(-C \partial_{x_j} \left(\frac{1}{\|x\|} \right)_{j=1,2,3} \right),$$

$$\partial_{x_j} \left(\frac{1}{\|x\|} \right) = \partial_{x_j} \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2x_j}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x_j / \|x\|}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = -\frac{u}{\|x\|^2}. \quad (19.2.5)$$

On déduit les équations de mouvement de Newton

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x) = -\mathcal{G}m_S \frac{u}{\|x\|^2}. \quad (19.2.6)$$

Dans l'exercice 19.2.14 on montre que ces équations impliquent que les trajectoires sont des ellipses ou hyperboles (ou paraboles) dont le Soleil est un foyer. Historiquement, les physiciens (Ptolémée, Copernic, Kepler, ...) ont d'abord observé les planètes et leur trajectoire sur des ellipses. Newton a ensuite expliqué leur trajectoire à partir de son équation et l'expression de $F(x)$.

Remarque 19.2.8. Du fait que la masse de la Terre m apparaît dans (19.2.2) mais aussi dans la constante C , l'équation (19.2.6) ne dépend plus de la masse m . Cela signifie qu'une poussière aurait la même trajectoire que la Terre. Cette propriété s'appelle le principe d'équivalence et apparaît ici comme une coïncidence. Cette observation a inspiré Einstein pour établir la théorie de la relativité générale. On en parle plus loin.

Remarque 19.2.9. dans un atome d'hydrogène, la situation est très semblable. La masse d'un électron est $m = 9.31 \cdot 10^{-31} \text{kg}$. Il subit une énergie potentielle électrostatique de la part du proton (noyau de l'atome) qui est

$$U(x) = -C' \frac{1}{\|x\|},$$

avec

$$C' = k_C q^2,$$

$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ l'unité de charge et $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ la constante de Coulomb. La charge de l'électron est $-q$, la charge du proton est $+q$.

19.2.1 Exercices

Exercice 19.2.10. Sur Terre, $M = \mathbb{R}^3$, si x_3 est la coordonnées verticale, l'énergie potentielle de pesanteur est

$$U(x) = mgx_3, \quad (19.2.7)$$

avec $g = 9.81 \text{ms}^{-2}$.

1. Exprimer le champ de force $F(x)$?
2. Résoudre les équations de mouvements avec position initiale $x(0) \in M$ et vitesse initiale $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) \in T_{x(0)}M$ données.

3. La Terre est de masse $m_{\text{Terre}} = 6.10^{24}\text{kg}$ et son rayon est $R = 6371\text{km}$. En utilisant la formule (19.2.4), $\mathcal{U}(x) = -\mathcal{G}m_{\text{Terre}}m\frac{1}{\|x\|}$, déduire l'expression (19.2.7) au premier ordre avec la valeur de g .
4. De combien varie g à une altitude $h = 10\text{km}$?

Solution 19.2.11 (de l'exercice 19.2.10).

1. On a $U(x) = mgx_3$ et la force $F \stackrel{(19.2.3)}{=} -\text{grad}U$ appelé **poinds**, de composantes $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -mg$.
2. Les équations de mouvement de Newton sont $m\frac{d^2x_j}{dt^2} = F_j$, donnant pour la composante verticale $m\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} = -mg \Leftrightarrow \frac{d^2x_3(t)}{dt^2} = -g$, soit $x_3(t) = x_3(0) + v_3(0)t - \frac{1}{2}gt^2$ et $x_j(t) = x_j(0) + v_j(0)t$ pour les composantes horizontales $j = 1, 2$.
3. On part de $\mathcal{U}(x) = -\mathcal{G}m_{\text{Terre}}m\frac{1}{\|x\|}$. On considère le point $x(0) = (0, 0, R)$ à la surface de la Terre. Alors d'après le développement de Taylor au premier ordre

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x(0) + x_3) &= \mathcal{U}(x(0)) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3}(x(0))\right) x_3 + O(x_3^2) \\ &= \mathcal{U}(x(0)) - \mathcal{G}m_{\text{Terre}}m \left(\frac{\partial(1/\|x\|)}{\partial x_3}\right) x_3 + O(x_3^2) \\ &\stackrel{(19.2.5)}{=} \mathcal{U}(x(0)) + \mathcal{G}m_{\text{Terre}}m \frac{R}{(R^2)^{3/2}} x_3 + O(x_3^2) \\ &= \mathcal{U}(x(0)) + mgx_3 + O(x_3^2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g &= \mathcal{G}m_{\text{Terre}} \frac{1}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} 6.10^{24}\text{kg} \frac{1}{(6.371 \cdot 10^6)^2 \text{m}^2} \\ &= 9.8 \text{Nkg}^{-1} \end{aligned}$$

On retrouve la valeur mesurée sur Terre.

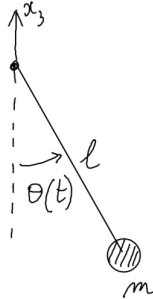
4. On a montré que $g(R) = \mathcal{G}m_{\text{Terre}}\frac{1}{R^2}$ diminue avec la distance R au centre de la Terre. Donc la variation à l'altitude h est (d'après la formule de Taylor)

$$\begin{aligned} \Delta g(h) &= g(R+h) - g(R) = \left(\frac{dg}{dR}\right) h + O(h^2) = -2\mathcal{G}m_{\text{Terre}} \frac{h}{R^3} + O(h^2) \\ &= -0.03 \text{Nkg}^{-1} \end{aligned}$$

Galilée a en effet fait des expériences, en observant la période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ d'un **pendule** au sommet d'une montagne.

Exercice 19.2.12. « Diagramme de phase du pendule »

Le pendule est un objet de masse m pouvant tourner dans un plan vertical à une distance l d'un point d'attache. La masse est soumise à l'énergie potentielle de pesanteur $U(x_3) = mgx_3$ avec $g = 9.8\text{m/s}^2$. On caractérise sa position angulaire à la date t par l'angle $\theta(t)$ mesuré à partir de la position la plus basse.



1. En utilisant la coordonnée angulaire θ comme variable de position, montrer que le **Hamiltonien est**

$$H(\theta, \xi_\theta) = \frac{1}{2ml^2} \xi_\theta^2 \underbrace{-mgl \cos \theta}_{U(\theta)}$$

Tracer la courbe $F(\theta) = -\frac{dU}{d\theta}$ qui représente la force tangentielle.

2. Dans le plan $(\theta, \xi_\theta) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ appelé **espace de phase** (et qui est un cylindre), tracer l'allure des lignes de niveau de $H(\theta, \xi_\theta)$, appelé **diagramme de phase**. Préciser le sens de parcourt des trajectoires.
3. Ecrire les équations du mouvement. Trouver les points fixes et linéariser les équations près des points fixes. Trouver la fréquence d'oscillation près du point fixe stable, et le coefficient d'instabilité du point fixe instable.

Solution 19.2.13. Voir le TD1 et sa solution sur cette [page web, cours mécanique analytique en L3 de physique](#).

Exercice 19.2.14. Champ de force central. Le problème à deux corps (Newton 1687)

Références : [1, p.33]

Cet exercice modélise le **mouvement d'une planète autour d'une étoile** dans le cadre de la mécanique classique de Newton. Dans un référentiel Galiléen de \mathbb{R}^3 , en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on considère une particule de masse m (qui peut être une planète assimilée à un point) soumise à une force radiale c'est à dire un vecteur tangent de la forme $F(r) = f(r) \frac{\partial}{\partial r}$ où l'intensité $f(r) \in \mathbb{R}$ dépend seulement de r .

1. Montrer qu'il existe une énergie potentielle $U(r)$, fonction uniquement de r , telle que $F = -\text{grad}(U)$ et que $f(r) = -\frac{dU}{dr}$. Aide : en coord. sphériques, $\text{grad}(U) \stackrel{(18.5.19)}{=} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Donner l'expression de $f(r)$ et $U(r)$ pour une planète soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil, i.e. expression (19.2.4).

2. Ecrire le Hamiltonien H en coordonnées sphériques et écrire les équations de mouvements de Hamilton. Justifier pourquoi on peut restreindre l'étude au plan (x_1, x_2) , i.e. $\theta = \pi/2$, n'utiliser que les coordonnées (r, φ) , (ξ_r, ξ_φ) .
3. A l'aide des équations de Hamilton, montrer que ξ_φ est une grandeur conservée que l'on interprétera. On note $\mathcal{L} = \frac{\xi_\varphi}{m}$ appelé moment angulaire. Montrer que le problème est décrit par le "Hamiltonien radial"

$$H(r, \xi_r) = \frac{\xi_r^2}{2m} + \tilde{U}(r)$$

avec une énergie potentielle $\tilde{U}(r)$ que l'on précisera et que l'on tracera. Montrer que les équations de mouvement de Hamilton donnent

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m} f(r) + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

Donner le sens physique des termes. Qui y a-t-il de remarquable dans le cas de la force gravitationnelle? (appelé principe d'équivalence)

4. Tracer $\tilde{U}(r)$ dans le cas de la force gravitationnelle. Dessin des trajectoires dans l'espace des phases (r, ξ_r) . Dédire l'allure des trajectoires $r(t)$ et $(x_1(t), x_2(t))$.
5. Faire le changement de variable $r \rightarrow u = 1/r$. Montrer que l'équation de mouvement radiale devient

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{m\mathcal{L}^2 u^2} F(r)$$

dont la solution dans le cas de la gravitation donne des ellipses de la forme :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Solution 19.2.15. de l'exercice 19.2.14.

1. En coordonnées sphériques,

$$F = f(r) \frac{\partial}{\partial r} = -\text{grad}(U) \stackrel{(18.5.19)}{=} -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

On déduit que

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f(r), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \tag{19.2.8}$$

donc

$$U(r) = -\int_{r_0}^r f(r') dr'.$$

Pour une planète soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil,

$$U(r) \stackrel{(19.2.4)}{=} -\mathcal{G}mm_S \frac{1}{r}, \tag{19.2.9}$$

$$f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\mathcal{G}mm_S \frac{1}{r^2}, \tag{19.2.10}$$

2. Le Hamiltonien est

$$H \stackrel{(19.2.1)}{=} \underbrace{\frac{1}{2m} \|\xi\|_g^2}_{\text{energie cinétique}} + \underbrace{U(x)}_{\text{energie potentielle}}$$

Or en coordonnées sphériques

$$\|\xi\|_g^2 \stackrel{(18.5.8, 18.5.13)}{=} \xi_r^2 + \frac{1}{r^2} \xi_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \xi_\varphi^2$$

donc

$$H(r, \xi_r, \theta, \xi_\theta, \varphi, \xi_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(\xi_r^2 + \frac{1}{r^2} \xi_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \xi_\varphi^2 \right) + U(r).$$

Equations de mouvement de Hamilton, d'après (19.1.3) sont

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \xi_r} = \frac{\xi_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\theta} = \frac{\xi_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\varphi} = \frac{\xi_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (19.2.11)$$

$$\dot{\xi}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{\xi}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \xi_\varphi^2, \quad \dot{\xi}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (19.2.12)$$

Si au départ $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\xi_\theta = 0$, alors $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\xi}_\theta = 0$, il en restera toujours ainsi, c'est à dire que la particule reste dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$. Une autre explication est que notant $x(0) \in \mathbb{R}^3, v(0) \in \mathbb{R}^3$ la position et vitesse initiale, la force est proportionnelle à $x \in \mathbb{R}^3$ donc la particule sera toujours dans le plan engendré par $x(0), v(0)$. On peut choisir les coordonnées telles que ce plan est $x_3 = 0$, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. D'après ci-dessus, $\dot{\xi}_\varphi = 0$ donc ξ_φ est constante. On note $\mathcal{L} = \frac{\xi_\varphi}{m}$ appelé moment angulaire. Alors

$$H(r, \xi_r) = \frac{1}{2m} \left(\xi_r^2 + \frac{1}{r^2} \xi_\varphi^2 \right) + U(r) = \frac{1}{2m} \xi_r^2 + \tilde{U}(r)$$

avec

$$\tilde{U}(r) = \frac{1}{2mr^2} \xi_\varphi^2 + U(r) = \frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2} + U(r).$$

Alors

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \stackrel{(19.2.11)}{=} \frac{\dot{\xi}_r}{m} \stackrel{(19.2.12)}{=} -\frac{1}{m} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} \stackrel{(19.2.8)}{=} \frac{1}{m} f(r) + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$

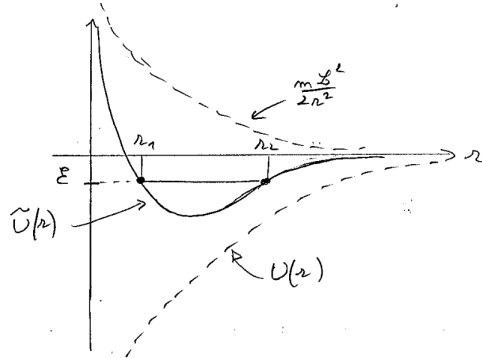
Le premier terme fait intervenir la force gravitationnelle, le deuxième terme est appelé "**force centrifuge**". Dans le cas de la force gravitationnelle $f(r) \stackrel{(19.2.10)}{=}$

$-\mathcal{G}m_S \frac{1}{r^2}$ alors

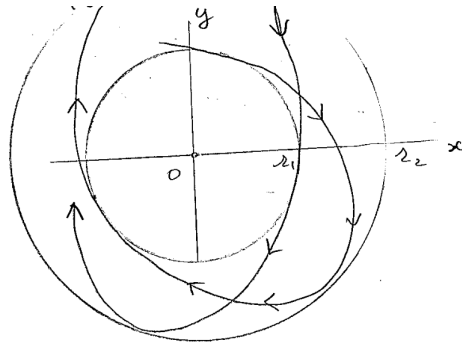
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\mathcal{G}m_S \frac{1}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} \quad (19.2.13)$$

qui ne fait pas intervenir la masse m de la planète. Ainsi la trajectoire suivie autour du Soleil ne dépend pas de la nature de la la particule (planète ou simple poussière).

4. Pour la force gravitationnelle, $\tilde{U}(r) = \frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2} + U(r) \stackrel{(19.2.9)}{=} \frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2} - \mathcal{G}mm_S\frac{1}{r}$. Pour $r \rightarrow 0$, le terme $\frac{m\mathcal{L}^2}{2r^2}$ domine. Pour $r \rightarrow \infty$, le terme $-\mathcal{G}mm_S\frac{1}{r}$ domine.



5. Pour une énergie totale $\min \tilde{U} < \mathcal{E} < 0$ le rayon $r(t)$ oscille entre $r_1 < r(t) < r_2$. Par ailleurs $r^2\dot{\varphi} = \mathcal{L}$ est constant donc $\varphi(t)$ est monotone.



6. Pour résoudre (19.2.13), on pose $r = \frac{1}{u}$. Rappelons que $\dot{\varphi} \stackrel{(19.2.11)}{=} \frac{\xi_\varphi}{mr^2} = \frac{\mathcal{L}}{r^2}$ donc $\varphi(t)$ est déterminée par $r(t)$. On a

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{du}\right) \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{\mathcal{L}}{r^2} = -\mathcal{L} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\mathcal{L} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\mathcal{L} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \frac{\mathcal{L}}{r^2} = -\mathcal{L}^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$$

donc (19.2.13) donne

$$-\mathcal{L}^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = -\mathcal{G}m_S u^2 + \mathcal{L}^2 u^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) + u = \frac{\mathcal{G}m_S}{\mathcal{L}^2}$$

qui est une équation différentielle ordinaire simple à résoudre (linéaire avec second membre). La solution est

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mathcal{G}m_S}{\mathcal{L}^2}$$

avec des constantes A, φ_0 qui dépendent des conditions initiales $u(0), \frac{du}{d\varphi}(0)$. Alors

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{Gm_S}{\mathcal{L}^2}} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

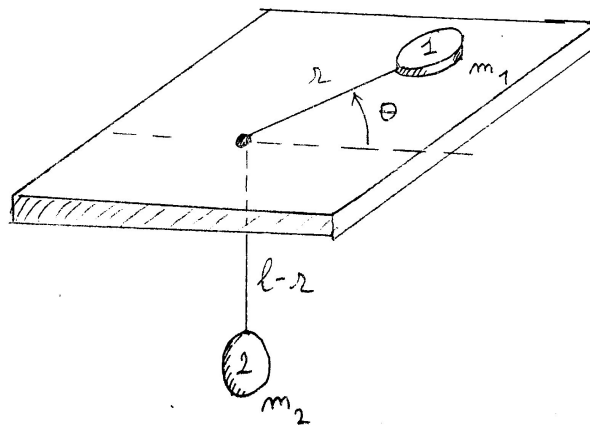
qui est l'équation polaire d'une ellipse dont le Soleil est un foyer. Il est à noter que le fait que les trajectoires sont périodiques (ellipses) est particulier au cas du potentiel en $1/r$ et en r^2 . Voir **Théorème de Bertrand**.



Exercice 19.2.16. Objet glissant sur une table attaché à une masse pesante

Un objet 1 de masse m_1 (un petit disque) est posé sur une table horizontale et glisse parfaitement (i.e. il n'y a pas de frottement). Il est attaché par une fil de longueur l fixe à un objet 2 de masse m_2 . Le fil passe sans frottement par un trou de la table considéré comme ponctuel et la masse m_2 ne peut se déplacer que verticalement dans le champ de pesanteur g (pas de balancement). La diamètre de la table est supposé très grand.

On note r la longueur du fil qui est sur la table. On note θ la position angulaire de l'objet 1 ainsi (r, θ) sont les coordonnées polaires de l'objet 1 sur la table. On note z la coordonnées verticale de l'objet 2. Le but du problème est de décrire le mouvement $(r(t), \theta(t))$ de l'objet 1 sur la table étant donné un état initial (position-vitesse).



1. Ecrire l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle U du système total 1-2 en fonction de r, θ, z de l'impulsion p_r, p_θ, p_z et m_1, m_2, l . Pour simplifier on choisira $U(r=0) = 0$.

Solution 19.2.17.

2. Dédurre l'expression du Hamiltonien $H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z)$.

Solution 19.2.18.

3. Ecrire les équations de mouvement de Hamilton qui expriment $\frac{dr}{dt}, \frac{dp_r}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dp_\theta}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dp_z}{dt}$ (sans les résoudre).

Solution 19.2.19.

4. A partir des équations précédentes montrer que p_θ est une constante du mouvement notée $p_\theta = \mathcal{L}$. Déduire \mathcal{L} à partir des conditions initiales $r(0), \dot{\theta}(0)$ avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Solution 19.2.20.

5. Déduire l'expression du Hamiltonien (réduit) sous la forme

$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2M} + V(r)$$

en fonction des variables radiales r, p_r seulement et des paramètres m_1, m_2, \mathcal{L} .

Solution 19.2.21.

6. Interpréter les différents termes de $V(r)$ et le sens de la force. Tracer leur allure et tracer $V(r)$.
7. Trouver le minimum r_0 et $V(r_0)$ de la fonction $V(r)$ si il existe. Discuter les différentes trajectoires possibles du mouvement $r(t)$ dans le potentiel $V(r)$ selon les conditions initiales (et l'énergie). Pour chacune de ces possibilités décrire la trajectoire $(r(t), \theta(t))$ de l'objet 1 sur la table.

19.3 Cas du flot géodésique

Dans cette partie on va considérer un cas particulier de dynamique Hamiltonienne, appelée le **flot géodésique**. Il est important en physique et en mathématique.

19.3.1 Particule libre sur une sous variété de \mathbb{R}^n , géodésiques

Voir ce paragraphe en [vidéo](#).

19.3.1.1 Définition Newtonienne du flot géodésique sur une sous variété de \mathbb{R}^n

On commence par le cas particulier de sous variétés de \mathbb{R}^n et donner une "formulation Newtonienne" du flot géodésique. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété C^∞ (lisse) de dimension d dans \mathbb{R}^n . Penser par exemple une surface ($d = 2$) dans \mathbb{R}^3 . Pour un point $x \in M$ on note

$$P_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M \tag{19.3.1}$$

le projecteur orthogonal sur l'espace tangent $T_x M$. Voir figure [19.3.1\(a\)](#).

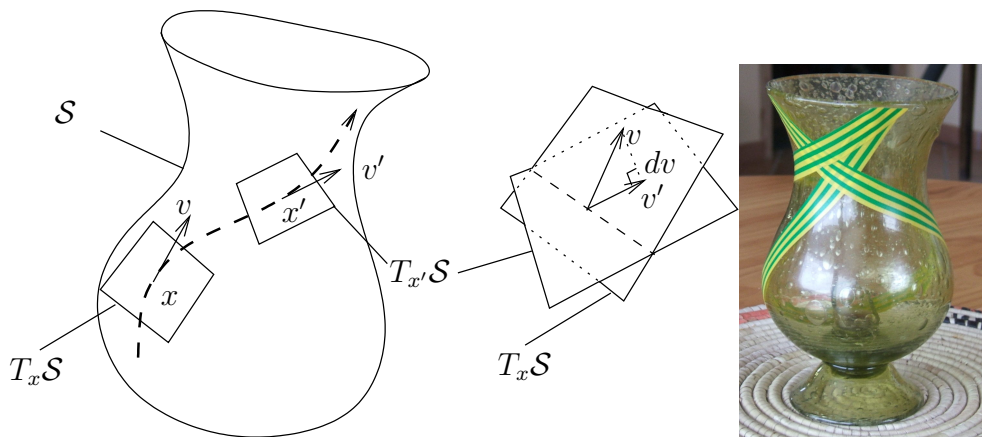


FIGURE 19.3.1 – (a) Géodésique sur une surface \mathcal{S} : le vecteur vitesse $v(t) = \frac{dx}{dt}$ est solution de $P_x \frac{dv}{dt} = 0$ où P_x est le projecteur orthogonal sur le plan tangent $T_x \mathcal{S}$ au point x . (b) En pratique une géodésique est obtenue en collant un ruban de scotch « de façon la plus plate possible », ici sur un vase ayant de la courbure de Gauss positive et négative.

Définition 19.3.1. Une trajectoire $t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in M \subset \mathbb{R}^n$ est une **géodésique** si pour tout t

$$P_{x(t)} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0. \quad (19.3.2)$$

19.3.1.2 Interprétations et remarques générales

Déterministe : On démontrera ci-dessous, Section 19.3.1.3, que étant donné une position initiale $x(0) \in M$ à $t = 0$ et une vitesse initiale $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) \in T_{x(0)}M$, cela détermine une unique trajectoire géodésique $x(t) \in M$ pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ (qui peut être $\epsilon = \infty$). Pour cela on montrera que (19.3.2) détermine un champ de vecteur sur l'espace tangent TM .

Interprétation physique : L'interprétation de (19.3.2) est que $a_T := P_{x(t)} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \in T_x M$ est l'accélération tangentielle de la trajectoire, donc (19.3.2) s'écrit $a_T = \frac{1}{m} F_T = 0$, c'est l'équation de Newton (19.2.2) avec une force tangentielle nulle $F_T = 0$. On dit que la trajectoire géodésique modélise le mouvement d'une **particule libre** (i.e. soumise à aucune force tangentielle) mais **contrainte** cependant à se déplacer sur la variété M . Cette contrainte peut être représentée par une force normale à M . L'absence de force tangentielle fait que la particule va le plus « droit possible » en restant sur la sous variété.

Un ruban de scotch suit une géodésique : Si on colle sans pli un ruban de scotch sur un plan, il suit une ligne droite. Essayer de se convaincre et de démontrer que si

l'on colle sans pli un ruban de scotch (étroit) sur une surface $M \subset \mathbb{R}^3$ alors il suit une géodésique. Voir la [vidéo](#). Remarquer l'effet des zones de courbure négative (creux du vase) sur l'écartement de géodésiques voisines, et inversement le rapprochement des géodésiques dans les zones de courbure positive (bosse du vase). Cette relation entre la courbure de l'espace et l'écartement de géodésiques voisines appelée **théorie de Jacobi** est à la base de la formulation de la relativité générale qui exprime les trajectoires comme des géodésiques dans l'espace temps et relie la courbure de l'espace temps à l'écartement de géodésiques voisines, ce qui se traduit par une accélération des trajectoires. Ainsi la courbure de l'espace temps sur une géodésique remplace effectivement la notion de force de Newton dans un espace plat pour la gravitation.

Exemple 19.3.2. sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ les géodésiques sont les grands cercles. Sur une surface plate (ou dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^d), les géodésiques sont des droites.

Extrema de longueur et d'énergie : On verra que [28, p.47] parmi tous les chemins paramétrés arbitraires $\gamma : s \in [0, t] \rightarrow x(s) \in M$ qui joignent deux points fixés $A = x(0)$ et $B = x(t)$ au temps t , la géodésique est un point critique pour la « fonctionnelle énergie » $\mathcal{E}(\gamma) := \int_0^t \frac{1}{2} \left\| \frac{dx}{dt} \right\|^2 dt$ et pour la « fonctionnelle longueur » $l(\gamma) := \int_0^t \left\| \frac{dx}{dt} \right\| dt$ (noter que $l(\gamma)$ est indépendant du paramétrage).

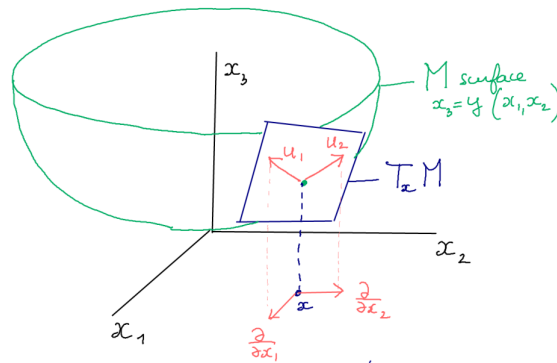
Dérivée covariante et transport parallèle Notons $v = \frac{dx}{dt}$ le vecteur tangent vitesse à la trajectoire et $\frac{Dv}{dt} := P \frac{dv}{dt} \in TM$ qui mesure la déviation de la trajectoire par rapport à une géodésique. Plus généralement si une famille de vecteurs $u(t) \in T_{\gamma(t)}M$ vérifie $\frac{Du}{dt} := P \frac{du}{dt} = 0$ on dit que la famille **suit le transport parallèle** ou **suit la connexion** et cela signifie que il n'y a pas de déviation, lors du transport. Dans la section 23.3 on donnera une définition précise pour l'opérateur $D := Pd$ qui mesure les déviations lors du transport parallèle, appelée la **dérivée covariante** ou **connexion de Levi-Civita**.

19.3.1.3 Déterminisme du flot géodésique, champ de vecteur sur TM

Voir ce paragraphe en [vidéo](#).

On va exprimer l'équation (19.3.2) sous forme d'une ODE (équation différentielle ordinaire) en utilisant des coordonnées locales et déduire l'existence d'une solution unique étant donnés position et vitesse initiale.

Dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 avec les coordonnées (x_1, x_2, x_3) , une surface M (de dimension $d = 2$) contenant l'origine et tangente au plan $x_3 = 0$, peut être décrite dans un voisinage de l'origine, par une fonction $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x_3 = y(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x_j}(0) = 0$.



Plus généralement, dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, g_{\text{euclid}})$, on considère une sous variété C^∞ (lisse) $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimension d . Par translation dans \mathbb{R}^n on peut amener tout point de M à l'origine, et après rotation dans \mathbb{R}^n on peut supposer que l'espace tangent T_0M coïncide avec $\mathbb{R}^d \oplus \{0\}$ (les d premiers axes de \mathbb{R}^n), donc que M est décrite au voisinage de l'origine par le graphe d'une fonction

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \rightarrow y := (x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m \quad (19.3.3)$$

avec $n = d + m$. On notera $y_a := x_{d+a}$, $a = 1 \dots m$. On suppose donc que

$$y_a(0) = 0, \quad \frac{\partial y_a}{\partial x_j}(0) = 0, \forall j, a. \quad (19.3.4)$$

Utilisant les coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_d)$ sur M , les **vecteurs** $(u_j)_{j=1 \dots d}$ **sui-vants forment une base de l'espace tangent** T_xM appelée trivialisation du fibré tangent (ou choix de Jauge en physique)

$$u_j(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{a=1}^m \left(\frac{\partial y_a}{\partial x_j}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (19.3.5)$$

En effet si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est une fonction arbitraire, constante sur M , c'est à dire $f(x, y(x)) = C$, alors $0 = \partial_x f + (\partial_y f) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$ donnant $u_j(f) = 0$, montrant que $u_j \in T_xM$. Par ailleurs $u_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1 \dots d$ sont indépendants.

On définit

$$D_{\partial/\partial x_k} u_j := P_x \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (19.3.6)$$

appelée dérivée covariante de u_j selon $\frac{\partial}{\partial x_k}$, où P_x est le projecteur orthogonal (19.3.1) sur T_xM . Se rappeler que $D_{\partial/\partial x_k} u_j$ mesure la déviation de u_j par rapport au transport parallèle, si on se déplace selon la direction $\partial/\partial x_k$. On a $D_{\partial/\partial x_k} u_j \in T_xM$ donc on peut le décomposer dans la base $(u_l)_l$:

$$D_{\partial/\partial x_k} u_j = \sum_{l=1}^d \Gamma_{j,k}^l u_l \quad (19.3.7)$$

avec des composantes $\Gamma_{j,k}^l(x) \in \mathbb{R}$ appelées **symboles de Christoffel**.

Théorème 19.3.3. *L'équation d'une géodésique $\gamma(t) = (x(t), y(x(t)))$ sur M avec les coordonnées locale $x = (x_1, \dots, x_d)$ s'écrit sous la forme d'une E.D.O. (Equa. diff. ordinaire) du premier ordre en t :*

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = v_j, \\ \frac{dv_j}{dt} = -\sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^j v_k v_l, \end{cases} \quad \forall j = 1 \dots d \quad (19.3.8)$$

où $(x_j, v_k)_{j,k=1\dots d}$ sont des coordonnées locales sur TM . Cela définit donc un champ de vecteur sur TM , et pour $x(0), v(0)$ donnés, il y a une unique solution $(x(t), v(t))$ pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

Démonstration. Supposons que $\gamma(t) = (x(t), y(x(t))) \in M$ est une trajectoire géodésique sur M , passant par l'origine $\gamma(0) = 0$. D'après (19.3.2), on a

$$P \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = 0. \quad (19.3.9)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy(x(t))}{dt} \right) = \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{a,j} \left(\frac{\partial y_a}{\partial x_j} \right) \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y_a} \\ &= \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_a \left(\frac{\partial y_a}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_a} \right) \stackrel{(19.3.5)}{=} \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right) u_j \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma}{dt^2} &= \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) u_j + \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \frac{du_j}{dt} \\ &= \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) u_j + \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 & \stackrel{(19.3.9)}{=} P \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) P u_j + \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \sum_k \left(P \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \\
 & \stackrel{(19.3.6, P u_j = u_j)}{=} \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) u_j + \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \sum_k (D_{\partial/\partial x_k} u_j) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \\
 & \stackrel{(19.3.7)}{=} \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) u_j + \sum_{j,k,l} \left(\frac{dx_j}{dt} \right) (\Gamma_{j,k}^l u_l) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \\
 & = \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right) u_j + \sum_{j',k,j} \Gamma_{j',k}^j u_j \left(\frac{dx_{j'}}{dt} \right) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \\
 & = \sum_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{j',k} \Gamma_{j',k}^j \left(\frac{dx_{j'}}{dt} \right) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \right) u_j
 \end{aligned}$$

Comme $(u_j)_j$ forme une base de $T_x M$ on déduit que

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^j \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \left(\frac{dx_l}{dt} \right), \quad \forall j = 1 \dots d$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} & = v_j, \\ \frac{dv_j}{dt} & = - \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^j v_k v_l, \end{cases} \quad \forall j = 1 \dots d$$

On rappelle que $(x_j)_j$ sont des coordonnées locales sur M et d'après $v_j = \frac{dx_j}{dt}$ on peut interpréter $(v_j)_j$ comme des coordonnées locales sur $T_x M$. Ainsi l'ODE (19.3.8) s'interprète comme un champ de vecteur sur le fibré tangent TM , où (x_j, v_k) sont des coordonnées locales sur TM . En particulier d'après le **théorème de Cauchy Lipschitz**, étant donné une condition initiale $x(0), v(0)$, il y a une unique solution $(x(t), v(t))$ pour $t \in] - \epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$. \square

Exercice 19.3.4. [28, p.53] Supposons que M est défini localement par $u(x) = 0$ avec une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que $\nabla u = \text{grad}(u) \neq 0$ sur M . Montrer que l'équation des géodésiques (19.3.2) s'écrit aussi :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \|\nabla u\|^{-2} \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^* \mid (\nabla^2 u) \frac{dx}{dt} \right\rangle \nabla u, \quad (19.3.10)$$

avec $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_j$, $\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{j,k}$ et $\left(\frac{dx}{dt} \right)^* = \left(\frac{dx}{dt} \right)^t$ vecteur colonne.

Solution 19.3.5. (Taylor tome 1 p.47 [28]) On dérive l'équation $u(x(t)) = 0$ donnant

$$\nabla u(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot (\nabla^2 u) \cdot \frac{dx}{dt} \right) + \nabla u \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Comme $\nabla u \perp T_x M$, alors (19.3.2) est équivalente à

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = K \nabla u \quad (19.3.11)$$

avec $K \in \mathbb{R}$. Cela implique $\nabla u \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = K \|\nabla u\|^2$ donc

$$K = \|\nabla u\|^{-2} \nabla u \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -\|\nabla u\|^{-2} \left(\frac{dx}{dt} \cdot (\nabla^2 u) \cdot \frac{dx}{dt} \right).$$

Ainsi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\|\nabla u\|^{-2} \left(\frac{dx}{dt} \cdot (\nabla^2 u) \cdot \frac{dx}{dt} \right) (\nabla u).$$

En fait (19.3.10) décrit le mouvement géodésique sur chaque surface de niveau de u . On vérifie que le mouvement sur la surface $u = 0$ est inchangé si on remplace u par $u' = fu$ avec une fonction f non nulle sur M . En effet car $\frac{dx}{dt} \cdot \nabla u = 0$.

19.3.1.4 Formulation Hamiltonienne du flot géodésique

Voir ce paragraphe en [vidéo](#).

La définition ci-dessus (19.3.2) ou (19.3.8) est une formulation “Newtonienne” du flot géodésique sur la variété M . On va maintenant donner une formulation Hamiltonienne sur T^*M , qui a l’avantage essentiel de donner une formulation géométrique (i.e. indépendant du système de coordonnées) comme un champ de vecteur sur T^*M . Un autre avantage est de proposer une définition plus générale du flot géodésique que l’on verra plus bas.

Théorème 19.3.6. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ sous variété avec g_M la métrique sur M induite par la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^n . Les géodésiques sur M sont les projections sur M des trajectoires Hamiltoniennes sur T^*M définies par le Hamiltonien*

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|_{g_M}^2, \quad (19.3.12)$$

ou par un Hamiltonien de la forme $H(x, \xi) = \|\xi\|_{g_M}^p$ avec $p > 0$, le facteur $\frac{1}{2}$ étant arbitraire.

Remarque 19.3.7. D’après (19.2.1) on interprète (19.3.12) comme le Hamiltonien d’une particule libre (car $U = 0$) sur une variété Riemannienne M, g . Cela correspond donc à l’interprétation ci-dessus 19.3.1.2.

Démonstration. ([28, p.52]) Supposons comme en (19.3.3) que la sous variété M de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m$ avec $n = d + m$ est décrite près de 0 par le graphe d’une fonction $x \in \mathbb{R}^d \rightarrow$

$y(x) \in \mathbb{R}^m$ avec $y(0) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(0) = 0$. On a donc

$$P_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(0) \stackrel{(19.3.4)}{=} 0, \quad (D_{\partial/\partial x_k} u_j)(0) \stackrel{(19.3.6)}{=} 0, \quad \Gamma_{j,k}^l(0) \stackrel{(19.3.7)}{=} 0.$$

Donc en $x = 0$, le champ de vecteur (19.3.8) sur TM défini par le flot géodésique s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt}(0) = v_j, \\ \frac{dv_j}{dt}(0) = 0, \end{cases} \quad \forall j = 1 \dots d \quad (19.3.13)$$

Par ailleurs la métrique Euclidienne $g = \sum_{j=1}^n dx_j \otimes dx_j$ sur \mathbb{R}^n induit la métrique $g_M \stackrel{(\text{??})}{=} \sum_{j=1}^d dx_j \otimes dx_j + O(x^2)$ sur M . Alors $H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|_g^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 + O(x^2) \right)$ et d'après les équations de Hamilton (19.1.3) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dx^j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \xi_j + O(x^2), \quad j = 1 \dots d, \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 + O(x) \end{aligned}$$

qui définit le même vecteur vitesse sur TM aux points $(x, v) = (0, v)$ que (19.3.13). Or le point $x = 0$ est arbitraire sur M , donc le résultat est valable partout. Avec $H_p(x, \xi) := \|\xi\|_g^p = (H_2(x, \xi))^{p/2}$ avec $p > 0$, donnant $dH_p = \frac{p}{2} H_2^{\frac{p}{2}-1} dH_2$, cela donne un champ de vecteur Hamiltonien $X_p = \tilde{\Omega}^{-1}(dH_p) = \frac{p}{2} H_2^{\frac{p}{2}-1} \tilde{\Omega}^{-1}(dH_2) = \frac{p}{2} H_2^{\frac{p}{2}-1} X_2$. Donc X_p et X_2 sont proportionnels donc les trajectoires coïncident. Noter que H_2 est constant le long des trajectoires, \square

19.3.2 Flot géodésique sur une variété Riemannienne

La propriété (19.3.6) montre le résultat remarquable que pour une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$, les trajectoires géodésiques sur M sont déterminées par la métrique induite sur M . Cela amène à la définition suivante qui permet de définir le flot géodésique pour une variété Riemannienne, sans qu'elle soit incluse dans un espace Euclidien \mathbb{R}^n .

Définition 19.3.8. Si (M, g) est une variété Riemannienne, le **flot géodésique** est le flot Hamiltonien sur T^*M avec

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|_g^2$$

Les géodésiques γ sont les projections sur M des trajectoires Hamiltoniennes $\tilde{\gamma} \subset T^*M$.

Remarque 19.3.9. On peut aussi écrire les “équations de la mécanique” sur une variété Riemannienne (M, g) de la façon suivante : si $U \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ est une fonction “énergie potentielle” et $m > 0$ la masse de la particule, le Hamiltonien est

$$H(x, \xi) := \frac{1}{2m} \|\xi\|_g^2 + U(x), \quad x \in M, \xi \in T_x^*M.$$

19.3.3 Flot géodésique sur une surface, courbure de Gauss et chaos

19.3.3.1 Courbure de Gauss d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$

Vidéo de cette Section.

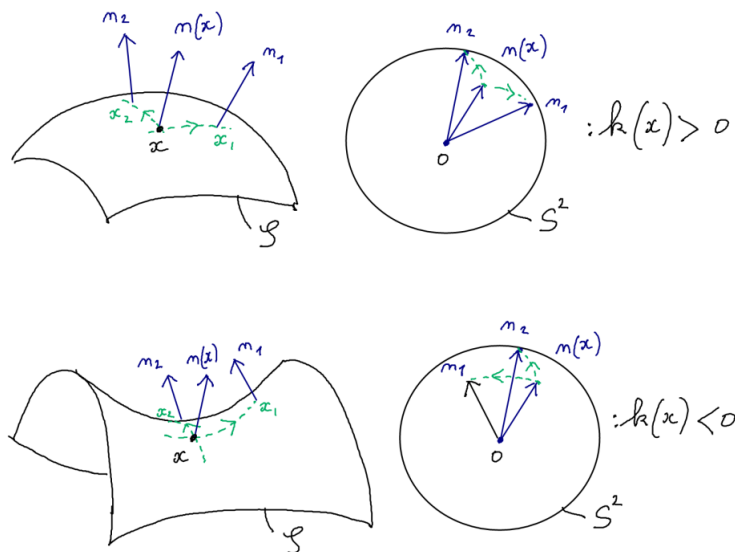
Considérons une surface lisse dans \mathbb{R}^3 Euclidien, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. En chaque point $x \in \mathcal{S}$, notons $n(x) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ le vecteur normal au plan tangent $T_x\mathcal{S}$ et unitaire. (On choisit arbitrairement entre $\pm n(x)$ c'est à dire que l'on choisit arbitrairement une orientation dans le voisinage d'un point $x \in \mathcal{S}$ donné). L'application ainsi obtenue

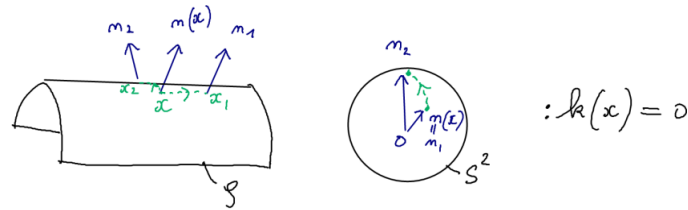
$$n : \begin{cases} \mathcal{S} & \rightarrow S^2 \\ x & \rightarrow n(x) \end{cases}$$

s'appelle l'**application de Gauss**. La différentielle de cette application en un point $x \in \mathcal{S}$ est une application linéaire $(dn)_x : T_x\mathcal{S} \rightarrow T_{n(x)}S^2$ entre deux espace Euclidiens. La **courbure de Gauss** est son déterminant :

$$k(x) := \det(dn_x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{S}.$$

Noter le rapport entre le signe de $k(x)$ (positif ou négatif) et le fait que la surface est d'un côté ou des deux côtés du plan tangent $T_x\mathcal{S}$. Voir figure :





En coordonnées locales $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sur \mathcal{S} telles que le point étudié est en $(x_1, x_2) = 0$ et $g(0) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$, et de même pour des coordonnées locales $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sur S^2 , on a explicitement

$$k(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 19.3.10. $k(x)$ ne dépend pas du choix d'orientation utilisé pour définir $n(x)$ car changer d'orientation revient à considérer $-n(x)$, ce qui ne change pas le déterminant.

Remarque 19.3.11. La courbure de Gauss s'exprime aussi

$$k(x) = \frac{1}{R_1(x) R_2(x)}$$

où $R_1(x), R_2(x)$ sont les rayons de courbures extrémaux et avec la convention que $k(x) > 0$ si la surface est d'un seul côté du plan plan tangent $T_x \mathcal{S}$ et $\kappa(x) \leq 0$ sinon.

Remarque 19.3.12. Si $\mathcal{C}_{x,r} := \{y \in \mathcal{S}, \text{dist}(x, y) = r\}$ est le cercle de centre x et rayon r et $|\mathcal{C}_{x,r}|$ est son périmètre (sa longueur) alors pour $r \rightarrow 0$ on a

$$|\mathcal{C}_{x,r}| = 2\pi r - \frac{1}{2}k(x)r^2 + O(r^3)$$

Autrement dit

$$k(x) = - \left(\frac{d^2 |\mathcal{C}_{x,r}|}{dr^2} \right)_{r=0}.$$

Cela montre que $k(x)$ s'obtient à partir de mesure de longueurs uniquement sur la surface. On dit que $k(x)$ est une grandeur géométrique intrinsèque à la surface en tant que variété Riemannienne. Ce résultat s'appelle le **théorema Egregium** de Gauss. En dimension plus grande la quantité correspondante est le tenseur de courbure de Riemann.

19.3.3.2 Courbure de Gauss et attraction/répulsion effective entre géodésiques voisines

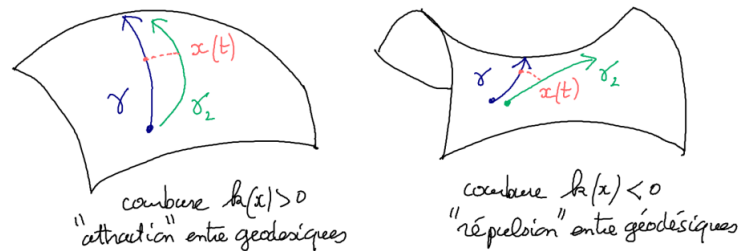
Cette section en **vidéo**.

Sur une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, considérons une géodésique de référence $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow \gamma(t)$, paramétrée par sa longueur t . On considère une géodésique "voisine" γ_2 et on note $x(t) \in \mathbb{R}$

la distance de γ_2 au point $\gamma(t)$. Supposons que $x(0), \frac{dx}{dt}(0) \ll 1$ sont très petits. Alors (on peut montrer que) $x(t)$ est gouverné par « l'équation de Newton » effective

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\gamma_2(t))x(t) \quad (19.3.14)$$

où $k(\gamma_2(t))$ est la courbure de Gauss de la surface \mathcal{S} au point $\gamma_2(t)$ (en fait $k(\gamma_2(t)) \approx k(\gamma(t))$). Cette équation s'écrit $\frac{d^2x}{dt^2} = F(x(t))$ avec une force effective $F(x, t) = -k(\gamma_2(t))x$ qui est attractive si $k(\gamma_2(t)) > 0$ et répulsive si $k(\gamma_2(t)) < 0$.



En effet prenant l'exemple de l'expérience des géodésiques sur le vase (Figure 19.3.1, et voir la vidéo.) on a considéré deux cas particuliers :

1. Sur la bosse du vase, où la **courbure est positive** $k(t) = k_0 > 0$ constant, donnant $\frac{d^2x}{dt^2} = -k_0x(t)$, une **force effective attractive** qui donne des **oscillations**

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = k_0 > 0$ et A, φ dépendant du point de départ de la géodésique γ_2 .

2. Dans le creux du vase, où la courbure est négative $k(t) = k_0 < 0$ constant, donnant $\frac{d^2x}{dt^2} = (-k_0)x(t)$, une **force effective répulsive** qui donne un comportement exponentiel

$$x(t) = A \sinh(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} (e^{\omega t + \varphi} - e^{-\omega t - \varphi})$$

avec $\omega^2 = (-k_0) > 0$ et A, φ dépendant du point de départ de la géodésique γ_2 .

Remarque 19.3.13. On vient d'observer qu'une géodésique, i.e. **une particule libre sur une surface à courbure variable** se comporte comme **une particule soumise à une force (effective) sur une surface plate**. Cela correspond au fait historique que Newton a découvert en 1685 que la Terre tourne autour du Soleil dans l'espace Euclidien (plat) et soumise à une force attractive, et ensuite en 1915, Einstein a découvert que la Terre a un mouvement libre dans l'espace-temps qui est une variété non plate, dont la courbure est déterminée par la présence du Soleil. Ces deux descriptions sont différentes mais équivalentes au premier ordre (voir exercice 19.3.25). La théorie d'Einstein est le modèle actuellement considéré en physique. Bien sûr la théorie de Newton est moins précise, mais plus simple, non encore largement utilisée lorsque les "effets relativistes" sont négligeables.

19.3.3.3 Comportement chaotique des géodésiques en courbure négative

On a vu que la courbure négative d'une surface implique un comportement effectif répulsif entre géodésiques voisines. Ainsi un petit changement dans les conditions initiales $x(0), \frac{dx}{dt}(0)$ va engendrer un écart $x(t)$ important. On appelle ce phénomène “**sensibilité aux conditions initiales**”. Il implique un comportement d'apparence aléatoire et imprévisible des trajectoires géodésiques que l'on appelle **chaos déterministe**.

En 1898, Hadamard a initié la théorie du chaos avec l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante (surfaces hyperboliques). En dimension quelconque (variété Riemannienne à courbure négative), cela a été établi par Anosov en 1965. Malgré son aspect un peu « abstrait », le flot géodésique sur les surfaces (ou variété) à courbure négative s'étudie bien et constitue donc un modèle d'étude privilégié en théorie du chaos.

Remarque 19.3.14. Il est établi que la dynamique géodésique sur une surface à courbure négative est chaotique partout. Le cas de courbure positive (non constante et pouvant ou pas changer de signe) est beaucoup plus compliquée. Sauf dans des cas particuliers ayant des symétries, on ne sait pas analyser la dynamique géodésique sur de telles surfaces. On observe numériquement que il y a des trajectoires chaotiques et d'autres non, mais on ne s'est pas mesurer leur mesure. (Il y a cependant de nombreux résultats, comme le **théorème KAM**, etc).

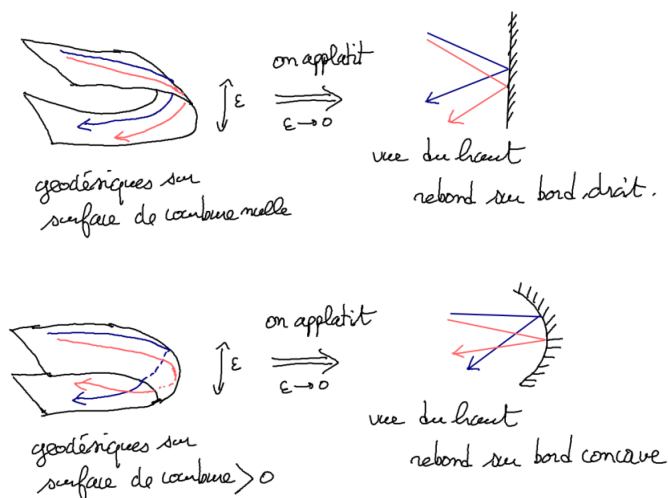
19.3.3.4 Du flot géodésique au billard

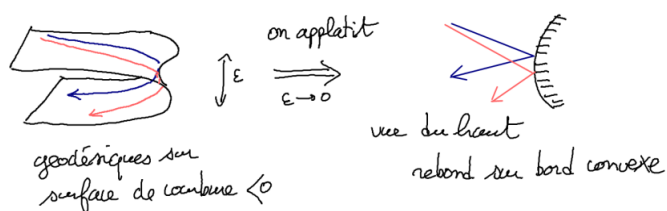
Cette Section en **vidéo**.

Supposons une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, que l'on “aplatit” (en la déformant), créant des plis.

Alors les trajectoires géodésiques deviennent des droites dans les zones plates, et semblent rebondir parfaitement sur les bords (les plis), comme pour la dynamique d'un **billard parfait**.

La courbure de la surface s'est concentrée sur les bords (les plis) qui sont convexes ou concaves selon le signe de la courbure.

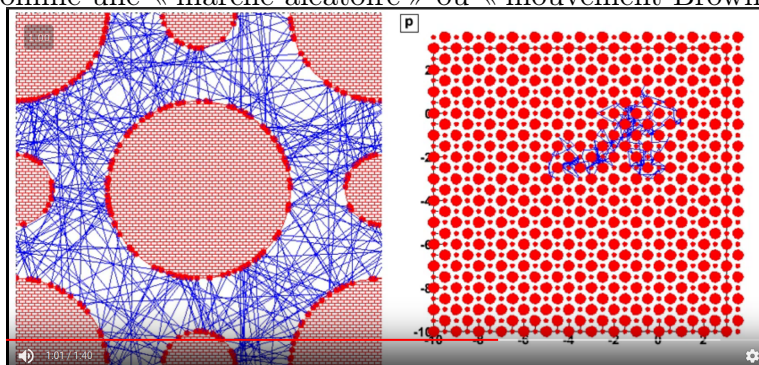




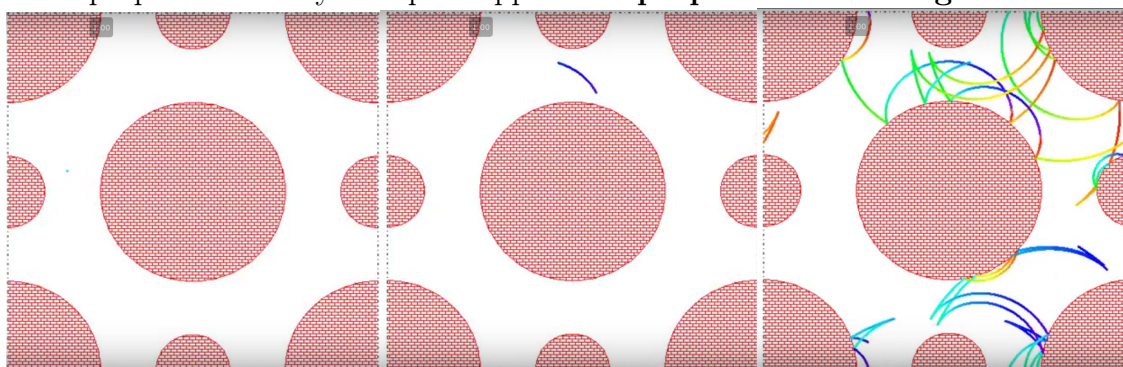
Ainsi la dynamique dans un billard parfait est la limite de mouvements géodésiques sur une surface, et la dynamique dans un billard aux bords convexes, appelé aussi **billard dispersif** ou **billard de Sinai**, est **chaotique**.

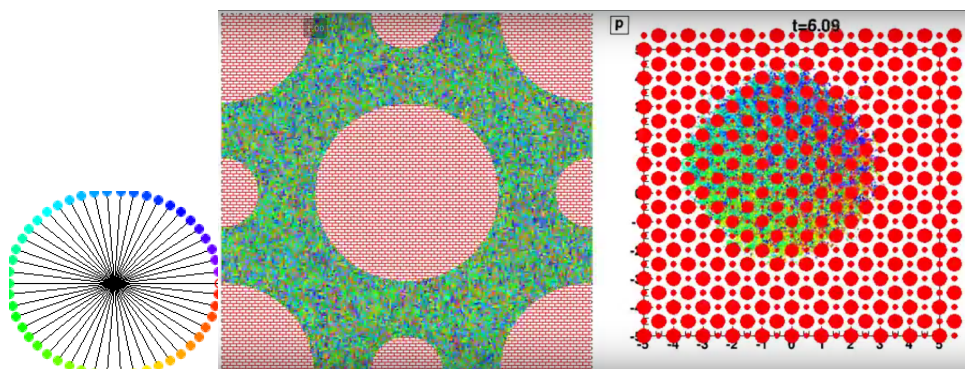
Exemple :

- Vidéo d'une trajectoire dans un billard de Sinai. Cette même trajectoire représentée sur le plan \mathbb{R}^2 qui est le recouvrement de \mathbb{T}^2 (i.e. conditions de périodicité enlevées). On observe comme une « marche aléatoire » ou « mouvement Brownien ».



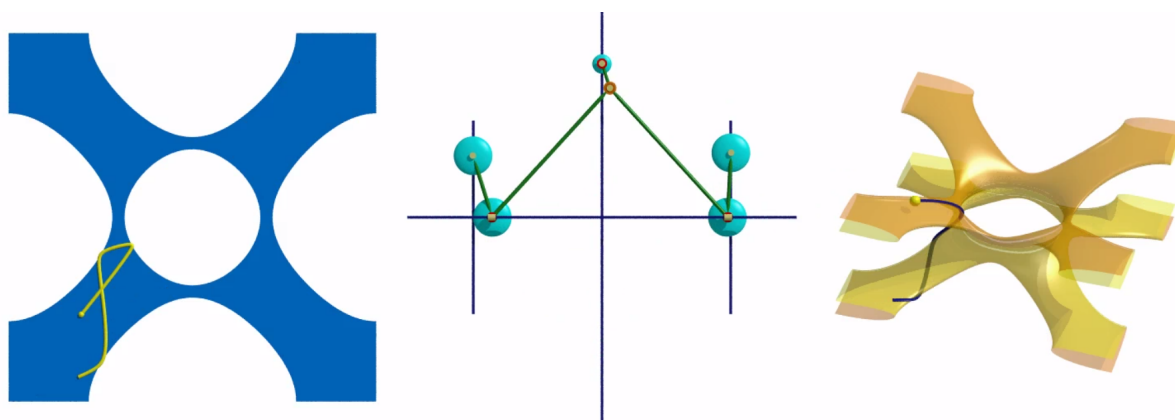
- Vidéo d'un ensemble de trajectoires indépendantes partant d'une position initiale $x(0)$ et vitesse initiale $\frac{dx}{dt}(0)$ avec de tous petits écarts. On observe que le nuage de particules se répand sur tout l'espace de phase disponible (position et vitesse). Cette propriété de la dynamique s'appelle **la propriété de mélange**.





19.3.3.5 Exemple en mécanique, du flot géodésique au billard.

Voici un exemple intéressant de système mécanique libre fait de tiges (“linkages”), étudié par [Mikael Kourganoff dans sa thèse](#). Dans le cas idéal sans frottement, il montre que le mouvement libre du système mécanique (image du centre) est équivalent au mouvement d’une particule libre sur une surface dans \mathbb{R}^3 (en jaune, image de droite, elle suit les géodésiques de la surfaces), et que ce flot est sensible aux conditions initiales”, plus précisément [Anosov](#). Il montre que lorsque la masse de la boule centrale tends vers 0, alors la surface de droite s’aplatit et vu du haut, la dynamique converge vers la dynamique dans un billard dispersif (en bleu, image de gauche).



Voici une [vidéo](#) de ce système.

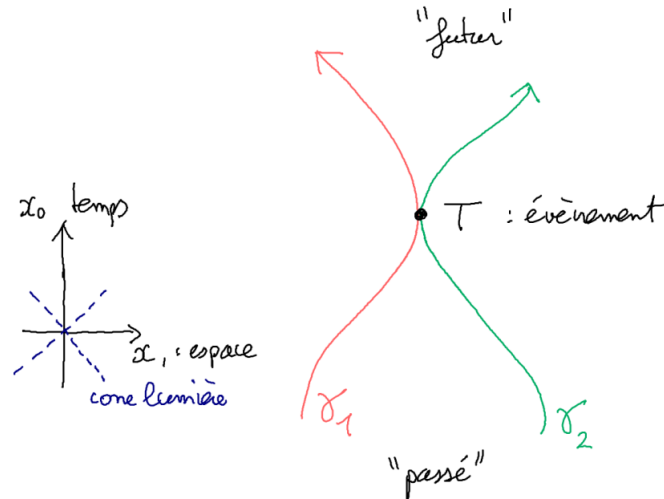
Voici une vidéo d’un autre exemple le “[triple linkage](#)”.

19.3.4 Trajectoires en théorie de la relativité

[Vidéo.](#)

En physique, dans la **théorie de la relativité**, Einstein (1915) a modélisé l’espace-temps par une variété Lorentzienne (M, g) de dimension $n = 4 = 1 + 3$ avec une dimension temporelle et 3 dimensions spatiales. Nous allons présenter et discuter ce modèle.

En relativité, il n'y a pas vraiment de "mouvement". Le mouvement apparaît suite à une "lecture" de l'espace temps M selon des "coupes" de type espace. Dans l'exemple suivant dans \mathbb{R}^2 avec les coordonnées x_1 d'espace et x_0 de temps, les courbes γ_1, γ_2 appelées lignes d'univers modélisent deux particules qui se rapprochent, se touchent (événement T) puis s'éloignent.



Avant de passer à la suite, voir au préalable, la section 9.3 pour la définition d'une métrique de Lorentz et des vecteurs de type lumière, temps ou espace.

19.3.4.1 Géométrie de l'espace temps

Vidéo

Définition 19.3.15. Une **variété Lorentzienne** de dimension n est une variété M avec une métrique de Lorentz g_x sur chaque espace tangent $T_x M$, $x \in M$.

On rappelle la notion de **longueur d'une courbe** mesurée par une métrique g Euclidienne, définie en (18.5.12), qui ne dépend pas du paramétrage.

Définition 19.3.16. Voici quelques mots de vocabulaire utilisés en relativité :

- Un point $x \in M$ s'appelle un **évènement**.
- Une courbe paramétrée $\gamma : s \in [0, 1] \rightarrow \gamma(s) \in M$ telle que le vecteur tangent $\frac{d\gamma}{ds} \in T_{\gamma(s)}M, \forall s \in [0, 1]$, est de type temps en tout point, s'appelle une **ligne d'univers**. La longueur mesurée le long de γ avec la métrique g , s'appelle le **temps propre** de γ :

$$|\gamma|_g := \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right)} ds$$

et ne dépend pas du paramétrage.

- Une courbe paramétrée $\gamma : s \in [0, 1] \rightarrow \gamma(s) \in M$ telle que le vecteur tangent $\frac{d\gamma}{ds} \in T_{\gamma(s)}M, \forall s \in [0, 1]$, est de type espace en tout point, s'appelle une **ligne de type espace**. La longueur mesurée le long de γ avec la métrique g , s'appelle la longueur propre de γ :

$$|\gamma|_g := \int_0^1 \sqrt{-g\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right)} ds$$

et ne dépend pas du paramétrage (noter le signe -1 nécessaire).

- Une courbe γ est de **type lumière** si le vecteur tangent $\frac{d\gamma}{ds}, \forall s$ est de type lumière. Dans ce cas

$$|\gamma|_g := \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right)} ds = 0 \quad (19.3.15)$$

- Une base orthonormée (e_0, e_1, \dots, e_n) de $T_x M$ s'appelle un **référentiel**. Si $u \in T_x M$, se décompose

$$u = u_0 e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i$$

on notera parfois $\vec{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ les composantes spatiales. $\vec{v} = \frac{1}{u_0} \vec{u}$ représente la vitesse de u dans le référentiel.

Remarque 19.3.17. sur les unités utilisées : si (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de $T_x M$, on décompose un vecteur $u \in T_x M$,

$$u = u_0 e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i$$

et dans la suite $u_0, u_i \in \mathbb{R}$ sera avec l'unité de distance (en mètre). On notera aussi $u_0 = cu_t$ avec $u_t = \frac{u_0}{c} \in \mathbb{R}$ en secondes où $c = 3.10^8 \text{m/s}$ est la vitesse de la lumière. Par exemple $\vec{v} = c \frac{1}{u_0} \vec{u}$ donne la vitesse \vec{v} en m/s.

Mais il est (toujours) conseillé de modéliser les évènements physique par des grandeurs sans unité (voir problème suivant comme exemple). De façon équivalente, on prendra $c = 1$ et on notera donc $u_t = u_0$ ou $t = x_0$ pour la composante ou coordonnée temporelle. En métrologie, depuis 1983, la **vitesse de la lumière** est fixée arbitrairement à

$$c = 299792458 \text{ m/s},$$

et cela définit par conséquent le **mètre** à partir de la **seconde**.

Remarque 19.3.18. (19.3.15) correspond au fait que le temps propre est inexistant pour les particules de lumière. Par exemple, la lumière traverse l'univers avec un durée nulle et la distance parcourue est nulle.

19.3.4.2 Schémas dans l'espace-temps de Minkowski $M = \mathbb{R}^2$

Vidéo

Afin de discuter quelques exemples spécifiques, on considère une **espace temps plat** $M = \mathbb{R}^n$ (aussi appelé modèle de la **relativité restreinte**) avec en tout point $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in M$, la métrique g dans ce système de coordonnées est

$$g = dx_0 \otimes dx_0 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} dx_i \otimes dx_i \right).$$

Attention, il est facile de confondre M avec l'espace tangent $T_x M$ en un point $x \in M$.

Pour simplifier les schémas, on considère la dimension $n = 2$ (i.e. la "partie espace" de dimension 1) :

$$g = dx_0 \otimes dx_0 - dx_1 \otimes dx_1.$$

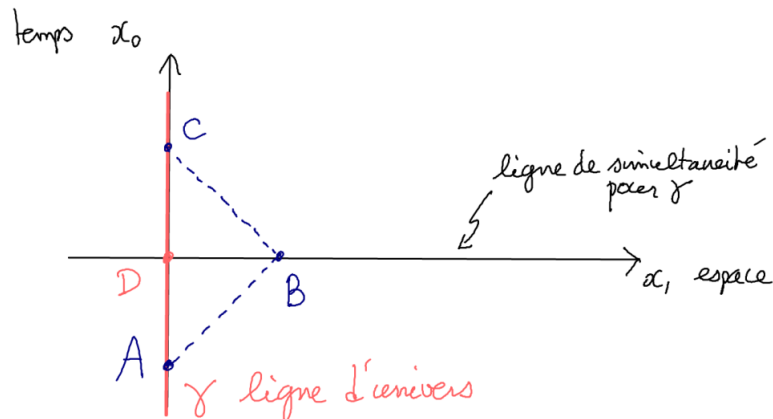
Rappel : on note $(e_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1})$ la base canonique de $T_x M = \mathbb{R}^2$ au point $x \in M$, qui est une base o.n. pour g donc appelée référentiel.

Exemple d'un particule immobile Par exemple, la courbe paramétrée

$$\gamma(s) = (x_0(s) = s, x_1(s) = 0), s \in \mathbb{R}$$

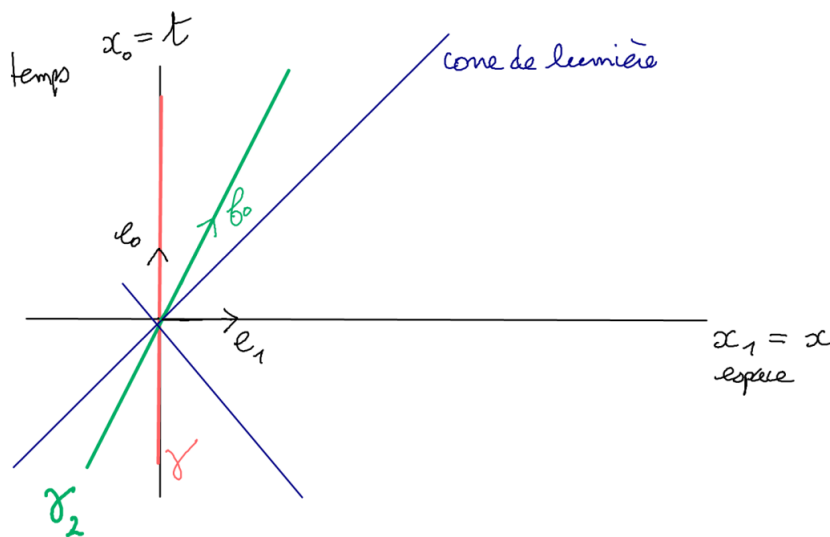
représente une **particule immobile** dans les référentiel (e_0, e_1) . La coordonnée $x_0(s) = s$ (ou $t = \frac{x_0}{c}$ mesurée en seconde si x_0 est en mètre) est le temps propre le long de γ .

Dans le schéma suivant la particule immobile émet un rayon lumineux (courbe type lumière) au point $A = (x_0, x_1) = (-x_*, 0)$ avec $x_* > 0$. Ce rayon est réfléchi au point $B = (0, x_*)$ et rejoint la particule en $C = (x_*, 0)$. On considère aussi l'évènement $D = (0, 0)$ qui est intermédiaire entre A et C . D'après cette expérience, on dira que les évènements B et D **sont simultanés par rapport à la ligne d'univers** γ de la particule (voir définition plus générale plus loin).



Ainsi dans cet exemple, les points de même ordonnées x_0 fixée sont simultanés pour la ligne γ . Les **distances mesurées par rapport à la ligne d'univers γ** (aussi appelée **longueurs propre pour γ**) sont les distances le long d'une ligne de simultanéité, mesurée avec la métrique g .

Exercice 19.3.19. "Formules de Lorentz" Considérons une personne immobile en $x_1 = 0$ de ligne d'univers γ et une autre personne de ligne d'univers γ_2 qui se déplace par rapport à la précédente à la vitesse constante $v \in \mathbb{R}$ (avec $|v| < 1$). Appelons f_0 le vecteur de type temps tangent à cette ligne d'univers γ_2 , et normalisé par $g(f_0, f_0) = 1$. Pour simplifier on note les coordonnées $x = x_1$ pour l'espace et $t = x_0$ pour le temps.



1. Exprimer f_0 dans la base (e_0, e_1) et faire intervenir le **facteur de Lorentz**

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Solution :

$f_0 = te_0 + xe_1$ avec $x = vt$ et

$$1 = g(f_0, f_0) = t^2 - x^2 = t^2 - t^2v^2 = t^2(1 - v^2)$$

donc

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x = vt = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

On a donc

$$f_0 = \gamma(e_0 + ve_1) \tag{19.3.16}$$

Remarquer que si $v \rightarrow 1$ alors $\gamma \rightarrow +\infty$.

2. Trouver le vecteur f_1 de type espace tel que (f_0, f_1) forme une base o.n. Représenter graphiquement (f_0, f_1) .

Solution :

Posons $f_1 = t'e_0 + x'e_1$. Il faut

$$-1 = g(f_1, f_1) = t'^2 - x'^2, \quad 0 = g(f_0, f_1) = t \cdot t' - x \cdot x'$$

$$\text{donc } tt' - vx' = 0 \Leftrightarrow t' = vx'.$$

et

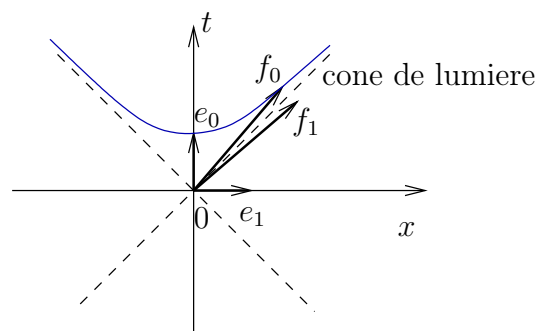
$$-1 = (vx')^2 - x'^2 = x'^2(v^2 - 1) \Leftrightarrow x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma$$

$$t' = vx' = v\gamma.$$

On a donc

$$f_1 = \gamma(v e_0 + e_1).$$

Montrant que les vecteurs f_1, f_0 sont symétriques par rapport au cône de lumière.



3. On décompose un vecteur $u \in T_x M$,

$$u = te_0 + xe_1$$

$$u = t'f_0 + x'f_1$$

Exprimer (t, x) à partir de (t', x') . Montrer que cela s'écrit sous la forme d'une "rotation hyperbolique" :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Solution :

Pour un vecteur quelconque $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u &= te_0 + xe_1 = t'f_0 + x'f_1 = \\ &\stackrel{(\text{??})}{=} t'\gamma(e_0 + ve_1) + x'\gamma(ve_0 + e_1) \\ &= \gamma(t' + x'v)e_0 + \gamma(t'v + x')e_1 \end{aligned}$$

donnant les **formules de Lorentz** pour le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + x'v) \\ x &= \gamma(t'v + x') \end{aligned}$$

Comme $\gamma^2 - (\gamma v)^2 = \gamma^2(1 - v^2) = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\gamma = \cosh \alpha, \quad \gamma v = \sinh \alpha$$

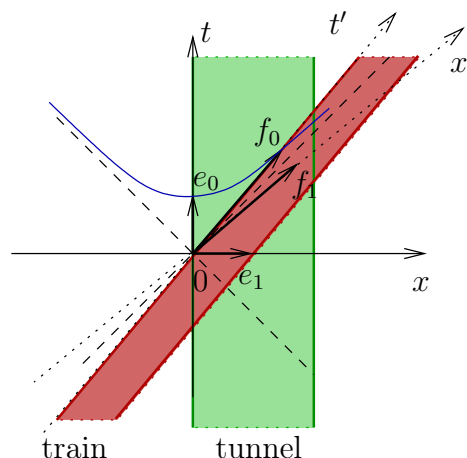
Alors

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

remarquer que $v = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Exercice 19.3.20. Contraction des longueurs. Montrer graphiquement que la longueur d'un tunnel perçue par un train en mouvement (à la vitesse v) est plus courte que la "longueur propre" du tunnel (i.e. perçue dans le référentiel du tunnel).

Solution :



Exercice 19.3.21. Dilatation du temps. Montrer graphiquement qu'une particule avec une faible durée de vie, comme le muon $\tau = 2.10^{-6}$ s. (dans son référentiel propre) peut traverser l'atmosphère ($H = 10$ km), si sa vitesse v est assez grande (mais $v < c = 3.10^8$ m.s⁻¹), bien que $c\tau = 600$ m $\ll H$. Montrer que sa durée de vie perçue dans le référentiel terrestre est plus grande que τ .

Exercice 19.3.22. Paradoxe des jumeaux de Langevin. Montrer graphiquement que si parmi deux frères jumeaux A et B, A reste immobile sur Terre, et B effectue un aller retour rapide sur une étoile voisine, alors à son retour B est plus jeune que A.

Exercice 19.3.23. "Temps écoulé dans un référentiel accéléré". Comparer les temps écoulés à l'avant et l'arrière dans une fusée de longueur L qui accélère avec l'accélération a constante. Appliquer cela au temps écoulé entre le haut et le bas d'un immeuble de hauteur H , qui est dans le champ de pesanteur $g = 9.8$ m/s².

19.3.4.3 Dynamique relativiste

En relativité générale, les géodésiques sont des courbes γ sur l'espace temps définies comme dans le cas des géodésiques sur une variété Riemannienne, Définition 19.3.8.

Définition 19.3.24. Si (M, g) est une variété Lorentzienne modélisant l'espace-temps, le **flot géodésique** est le flot Hamiltonien sur T^*M du Hamiltonien

$$H(x, \xi) := \frac{1}{2} (g^{-1})(\xi, \xi), \quad x \in M, \xi \in T_x^*M$$

Les **géodésiques** γ sont les projections sur M des trajectoires Hamiltoniennes $\tilde{\gamma} \subset T^*M$. Elles sont de type temps ou lumière ou espace selon la définition 19.3.16.

En relativité, **la gravitation n'est pas une force**. Par contre il y a des forces comme les forces électromagnétiques ou forces nucléaires, que l'on verra plus loin.

- Les **particules libres** (i.e. sans force extérieure) de masse $m > 0$ ont des trajectoires géodésiques de type temps. Par exemple, une planète autour de son étoile, ou une pomme qui tombe de l'arbre, en négligeant les forces de frottement.
- Les particules libres (i.e. sans force extérieure) de masse $m = 0$ ont des trajectoires géodésiques de type temps. Par exemple un rayon lumineux dans l'espace ou un **neutrino** (en considérant sa masse $m = 0$). Dans un espace très courbé les rayons lumineux sont déviés. Cela a été observé la première fois en **1919 lors d'une éclipse** ou plus récemment, par la lumière en orbite autour du **trou noir M87***.
- On appellerait **tachyon** des particules qui suivent des géodésiques de type espace. On n'en connaît pas en physique. Et leur existence contredirait des phénomènes de physique statistique, lié à l'irréversibilité.

Exercice 19.3.25. Trajectoires géodésiques autour d'une étoile ou autour d'un trou noir en relativité

Le but de l'exercice est d'illustrer une idée de la relativité générale : une particule libre dans un espace-temps courbe (suivant une géodésique) subit une déviation similaire à celle créée par la "force de gravitation". Cet exercice fait suite à l'exercice 19.2.14.

1. On choisit l'unité de masse étant la masse du Soleil $M_0 = 2.10^{30}kg$, l'unité de distance sera $r_0 = \frac{M_0 \mathcal{G}}{c^2}$ et l'unité de temps $t_0 = r_0/c$ avec $c = 3.10^8 m/s$ et $\mathcal{G} = 6.6 \cdot 10^{-10} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Ainsi on remplace les grandeurs physique temps t , distance r et masse M par des grandeurs sans unités : t/t_0 , r/r_0 et M/M_0 . Calculer r_0, t_0 en unité standard. Dans la suite on travaille avec les grandeurs sans unités notées t, r, M .
2. On considère les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans l'espace \mathbb{R}^3 et la métrique suivante, appelée **métrique de Schwarzschild**, dans l'espace temps $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées sphériques (t, r, θ, φ) . Pour un vecteur tangent $V \in T\mathbb{R}^4$ de coordonnées $V = (V_t, V_r, V_\theta, V_\varphi)$,

$$g(V, V) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (V_t)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (V_r)^2 - r^2 ((V_\theta)^2 + \sin^2 \theta (V_\varphi)^2).$$

Cette métrique décrit une « déformation » de l'espace temps créée par une étoile (ou un trou noir) immobile de masse M située à l'origine. Montrer que le cas $M = 0$ correspond à un espace temps plat.

3. Dans la suite on travaille dans le plan $z = 0$ avec $\theta = \pi/2$ et donc avec seulement les coordonnées polaires $(t, r, \varphi) \in \mathbb{R}^3$. On a $g(V, V) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (V_t)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (V_r)^2 - r^2 (V_\varphi)^2$. Le principe de la relativité est que la trajectoire d'une particule libre (ou d'une planète considérée comme ponctuelle) est une **géodésique** de l'espace temps $\gamma : s \in \mathbb{R} \rightarrow (t(s), r(s), \varphi(s)) \in \mathbb{R}^3$ avec la condition $g\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right) = 1$. Écrire le Hamiltonien $H(t, r, \varphi, \xi_t, \xi_r, \xi_\varphi)$ et les équations de mouvement de Hamilton sur $T^*\mathbb{R}^4$. Dédire qu'il y a trois quantités conservées $E := p_t$ et $\mathcal{L} := -p_\varphi$ et H l'Hamiltonien lui-même. (on prendra $H = 1$ pour une particule massive $m > 0$ afin que s s'identifie vraiment au **temps propre**, et $H = 0$ pour un photon ou autre particule de masse nulle).
4. Montrer que l'équation de mouvement radiale s'écrit

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{MH}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} - \frac{3M\mathcal{L}^2}{r^4} \tag{19.3.17}$$

et interpréter les deux premiers termes, en comparant à l'exercice 19.2.14. Commenter l'effet du troisième terme.

5. Écrire l'équation radiale (19.3.17) sous la forme $\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{dU}{dr}$ avec une "énergie potentielle effective" $U(r)$. Discuter l'allure de $U(r)$ et les conséquences sur l'allure des trajectoires selon les valeurs de \mathcal{L} et de H .
6. Trajectoires circulaires : trouver les trajectoires circulaires possibles et leur période pour une planète et pour un photon.

19.4 Formulation Lagrangienne et variationnelle de la mécanique

19.4.1 Préliminaires sur la transformée de Legendre

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $L \in C^\infty(E; \mathbb{R})$ une fonction sur E . Pour tout $v \in E$ on $T_v E = E$ et la différentielle $(dL)_v : T_v E = E \rightarrow \mathbb{R}$ c'est à dire :

$$dL : \begin{cases} E & \rightarrow E^* \\ v & \rightarrow \xi = (dL)_v \end{cases}$$

On supposera dL inversible. Soit $H \in C^\infty(E^*; \mathbb{R})$ la fonction suivante appelée **transformée de Legendre de L**

$$H(\xi) := \xi(v) - L(v), \quad \text{avec } v = (dL)^{-1}(\xi).$$

Exemple 19.4.1. Sur $E = \mathbb{R}^n$ avec une métrique g symétrique non dégénérée, soit

$$L(v) = \frac{1}{2} \|v\|_g^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g_{j,k} v^j v^k = \frac{1}{2} \langle v, \mathbf{g}v \rangle$$

avec la matrice symétrique $\mathbf{g} = (g_{j,k})_{j,k}$. Alors

$$\xi = (dL)_v = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial v_j} \right) dv_j = \sum_j (\mathbf{g}v)_j dv_j = g(v, \cdot) = \tilde{g}(v)$$

est le vecteur dual métrique. En coordonnées, $\xi = \sum_j \xi_j dv^j$ avec

$$\xi_j = \frac{\partial L}{\partial v^j} = (\mathbf{g}v)_j \Leftrightarrow v_j = \sum_k (\mathbf{g}^{-1})^{jk} \xi_k$$

Alors

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \xi(v) - L(v) = g(v, v) - \frac{1}{2} g(v, v) = \frac{1}{2} g(v, v) \\ &= \frac{1}{2} \|\xi\|_g^2 \end{aligned}$$

19.4.2 Théorème de moindre action de Hamilton

Soit M une variété différentiable. Soit

$$L \in C^\infty(TM \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R})$$

c'est à dire une fonction $L(x, v, t) \in \mathbb{R}$ avec $x \in M, v \in T_x M, t \in \mathbb{R}$. D'après la section 19.4.1, pour $x \in M, t \in \mathbb{R}$ fixés, on a la différentielle restreinte à $T_x M$:

$$(dL_{/T_x M})_v : T_v(T_x M) = T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

donc

$$dL_{/T_x M} : \begin{cases} T_x M & \rightarrow T_x^* M \\ v & \rightarrow \xi = (dL_{/T_x M})_v \end{cases}$$

Théorème 19.4.2. « *Théorème de moindre action de Hamilton (1834)* » Soit M une variété différentiable. Soit $L \in C^\infty(TM \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction « **Lagrangien** ». On suppose que $dL_{/T_x M} : T_x M \rightarrow T_x^* M$ est inversible. Soient $a, b \in M$ et $t_a, t_b \in \mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{T} := \{ \gamma : t \in [t_a, t_b] \rightarrow \gamma(t) \in M, \text{ t.q. } \gamma(t_a) = a, \gamma(t_b) = b \}$$

c'est à dire courbes paramétrées aux extrémités fixées. Pour une telle courbe $\gamma \in \mathcal{T}$ on note son **action**

$$S(\gamma) := \int_{t_a}^{t_b} L\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}, t\right) dt.$$

Soit $\gamma_s, s \in \mathbb{R}$ une famille de courbes. On s'intéresse à la courbe γ_0 . Soit

$$w(t) := \left(\frac{d\gamma_s(t)}{ds} \right)_{s=0} \in T_{\gamma_0(t)} M$$

appelé **champ w de vecteur de déformation de Jacobi**. Rem : $w(t_a) = 0$ et $w(t_b) = 0$.

Alors : $\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{s=0} = 0$, pour tout champ de déformation w , cad que l'**action est extrémale**, si et seulement si la trajectoire γ_0 est la projection sur M d'une trajectoire pour le flot Hamiltonien sur T^*M de Hamiltonien

$$H(x, \xi, t) = \xi(v) - L(x, v, t), \quad \text{avec } v = (dL_{T_x M})_v^{-1}(\xi).$$

Démonstration. Pour la preuve on va utiliser des coordonnées locales x^1, \dots, x^n . On note $\gamma_s(t) \equiv (x_s^j(t))$.

On a

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_j \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial x_s^j}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) \left(\frac{\partial v_s^j}{\partial s} \right) \right) dt$$

or $\left(\frac{\partial x_s^j}{\partial s} \right)_{s=0} = w^j(t)$ et $\left(\frac{\partial v_s^j}{\partial s} \right)_{s=0} = \left(\frac{\partial x_s^j(t)}{\partial s \partial t} \right)_{s=0} = \frac{d}{dt}(w^j(t))$. Donc

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_j \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) w^j(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) \frac{d}{dt}(w^j(t)) \right) dt$$

On fait une intégration par parties¹ du deuxième terme, et on utilise l'hypothèse que $w^j(t_A) = w^j(t_B) = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_j \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) w^j(t) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) \right) w^j(t) \right) dt + \underbrace{\left[\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) w^j(t) \right]_{t_A}^{t_B}}_{=0} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_j \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) \right) \right) w^j(t) dt \end{aligned}$$

On déduit que

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = 0, \forall w(t) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) \right) \right) = 0, \forall j. \quad (19.4.1)$$

Ces dernières équations sont appelées équations de **Euler Lagrange**. La relation $v = (dL_{T_x M})_v^{-1}(\xi)$ fait que on a des fonctions $v^j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ et inversement $\xi_k(v_1, \dots, v_n)$. On a

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \right) = v^j + \sum_k \xi_k \frac{\partial v^k}{\partial \xi_j} - \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right)}_{\xi_k} \left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi_j} \right) = v^j = \frac{dx^j}{dt}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial x^j} \right) &= \sum_k \xi_k \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial v^k}}_{\xi_k} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} = -\frac{\partial L}{\partial x^j} \\ &\stackrel{(19.4.1)}{=} -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) = -\frac{d\xi_j}{dt} \end{aligned}$$

qui sont les équations de Hamilton. □

19.4.2.1 Cas de la mécanique

On a vu en (19.2.1) que sur \mathbb{R}^n Euclidien,

$$H(x, \xi, t) = \frac{\|\xi\|_g^2}{2m} + U(x, t).$$

1. rappel :

$$[f \cdot g]_{t_A}^{t_B} = f(t_B)g(t_B) - f(t_A)g(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(f \cdot g) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(f)g + \int_{t_A}^{t_B} f \frac{d}{dt}(g)$$

donc

$$\int_{t_A}^{t_B} f \frac{d}{dt}(g) = [f \cdot g]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(f)g$$

Alors

$$L(x, v, t) = \frac{1}{2}m \|v\|_g^2 - U(x, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v^j} &= mv^j = \xi^j \text{ impulsion} \\ \frac{\partial L}{\partial x^j} &= -\frac{\partial U}{\partial x^j} = F_j : \text{ force} \end{aligned} \tag{19.4.2}$$

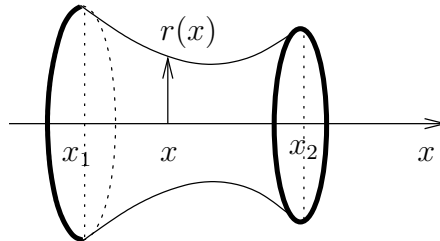
Le théorème de “moindre action” montre que parmi toutes les trajectoires possibles (à extrémités fixées), la trajectoire suivie par une particule soumise à une force F est celle qui rend l'action $S = \int L dt$ extrémale (pas forcément minimale!). En résumé les formulations suivantes sont équivalentes

- L'action S est extrémale
- Equations de Euler-Lagrange
- Equations de Newton
- Equations de Hamilton.

Exercice 19.4.3. « Film de Savon »

Le but de cet exercice est de montrer un problème de minimisation qui n'est pas directement un problème d'équation de mouvement de la mécanique mais qui utilise aussi le formalisme Lagrangien.

On considère un axe x et une surface de révolution définie par son rayon $r(x)$. Dans la suite, cette surface représentera un film de savon tendu entre deux cercles fixés en $x = x_1$ et $x = x_2$ et de rayon respectifs $r(x_1)$, $r(x_2)$. Au repos, la tension superficielle fait que la surface totale S du film de savon doit être minimale.



1. Pour un film de savon justifier qualitativement pourquoi la surface a une forme incurvée comme sur la figure, et non pas la forme d'un cylindre droit.
2. Pour une fonction $r(x)$ décrivant une surface de révolution quelconque autour de l'axes x , montrer que la surface entre x_1 et x_2 est donnée par

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx$$

3. En imposant que cette surface soit “extrémale” avec des conditions aux bords fixées $r(x_1)$, $r(x_2)$ écrire l'équation de Euler-Lagrange que doit satisfaire la fonction $r(x)$. (Attention : ici x joue le rôle du temps en mécanique)

4. Dédurre la fonction Hamiltonien $H(r, \xi_r)$ et écrire les équation de mouvement de Hamilton. Y a-t-il une "quantité conservée" ?
5. En supposant que l'origine de l'axe x soit bien choisie, montrer que

$$r(x) = \rho \cosh\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad \rho > 0$$

est une solution.

6. On souhaite tendre un film de savon entre deux cercles parallèles de même rayon R et distants de $2L$. Montrer que cela est possible tant que $\frac{R}{L} > C$ avec une constante C que l'on déterminera. Que se passe-t-il si $\frac{R}{L} < C$? Discuter la solution physique. Tracer $S(\rho)$. Faire l'expérience, voir [Videos](#).

Chapitre 20

Formes différentielles

20.1 1-formes et intégrales curviligne

Proposition 20.1.1. *Si*

$$\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t) \in M$$

*est une courbe paramétrée et $\alpha \in T^*M$ une 1-forme, alors on définit l'intégrale de α sur la courbe γ par le membre de droite de l'expression suivante qui est une intégrale ordinaire :*

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_{\gamma} \sum_i \alpha_i dx^i = \int_0^1 \sum_i \alpha_i(\gamma(t)) \left(\frac{dx^i}{dt} \right) dt \quad (20.1.1)$$

et on observe que $\int_{\gamma} \alpha \in \mathbb{R}$ ainsi défini ne dépend ni du paramétrage de la courbe γ , ni du choix des coordonnées $(x^i)_i$ sur M .

Démonstration. Il est clair que le résultat ne dépend pas du paramétrage car si $t \rightarrow t' = \varphi(t)$ est un autre paramètre alors on aura la même expression d'après

$$\left(\frac{dx^i}{dt} \right) dt = \left(\frac{dx^i}{dt'} \right) \left(\frac{dt'}{dt} \right) dt = \left(\frac{dx^i}{dt'} \right) dt'.$$

Pour vérifier l'indépendance du choix des coordonnées, supposons que (y^1, \dots, y^n) soit un autre système de coordonnées.

La 1-forme α s'exprime de la façon suivante selon le système de coordonnées :

$$\alpha = \sum_i (\alpha')_i dy^i = \sum_i (\alpha')_i \sum_j \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^j = \sum_j \alpha_j dx^j$$

avec $\alpha_j = \sum_i (\alpha')_i \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$. Alors sur la courbe on intègre :

$$\sum_i \alpha_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right) dt = \sum_i \sum_j \alpha'_j \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{dx^i}{dt} \right) dt = \sum_j \alpha'_j \left(\frac{dy^j}{dt} \right) dt$$

Le résultat aurait donc été le même avec un autre système de coordonnées □

Retenons donc que les objets que l'on peut intégrer sur un espace de dimension 1 (ou courbe) sont les 1-formes. Nous observerons plus loin que les intégrales curvilignes en physique font effectivement intervenir des 1-formes. Par exemple dans le théorème d'ampère en magnétostatique :

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I$$

ou dans le théorème de Bernoulli en mécanique des fluides, ou dans le théorème de Carnot en thermodynamique.

Le vecteur impulsion en mécanique analytique. Le vecteur champ électrique en électrostatique.

@@ détailler @@

20.2 Formes différentielles

L'intérêt des formes différentielles ou (p-formes) présentées dans cette section est de généraliser la définition Eq.(20.1.1) pour $p \geq 1$ quelconque, c'est à dire de trouver quels sont les objets que l'on peut intégrer sur une surface ($p = 2$) ou sur un espace de dimension p , et que le résultat soit indépendant du système de coordonnées choisi.

Définition 20.2.1. En un point $x \in M$ donné, un **tenseur T de degré p** est une application

$$T : (V_1, \dots, V_p) \in (T_x M \times \dots \times T_x M) \rightarrow T(V_1, \dots, V_p) \in \mathbb{R}$$

linéaire par rapport à chaque V_i . On note

$$T \in (T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M)$$

l'espace des tenseurs de degré p .

Le tenseur T est **antisymétrique** ou aussi appelé **p-forme** si de plus $T(V_1, \dots, V_p)$ change de signe en permuttant deux quelconques des vecteurs $V_i \leftrightarrow V_j$. On note Λ_x^p l'espace des tenseurs antisymétriques de degré p , ou **p-formes**.

Exemple : si $\alpha, \beta \in T_x^*M$ sont des 1-formes (donc des tenseurs de degré 1), on note $\alpha \otimes \beta$ le tenseur de degré 2, défini par

$$(\alpha \otimes \beta)(V_1, V_2) = \alpha(V_1) \beta(V_2)$$

et on note

$$\alpha \wedge \beta := \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \in \Lambda_x^2 \tag{20.2.1}$$

qui est une 2-forme, car $(\alpha \wedge \beta)(V_2, V_1) = \alpha(V_2) \beta(V_1) - \beta(V_2) \alpha(V_1) = -(\alpha \wedge \beta)(V_1, V_2)$.
Remarquons que

$$\alpha \wedge \alpha = 0$$

$$\beta \wedge \alpha = -\alpha \wedge \beta$$

On appelle \otimes le **produit tensoriel** et \wedge le **produit extérieur**.

Cet exemple se généralise de la façon suivante.

Rappel : S_p est le **groupe symétrique** des permutations de p éléments. Il y a $p!$ façons de permuer p états. La **signature d'une permutation** notée $\varepsilon(\sigma)$, vaut $(+1)$ ou (-1) selon que le nombre de croisements est pair ou impair dans le diagramme de correspondance (figure 20.2.1).

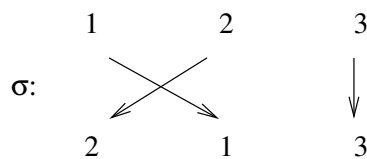


FIGURE 20.2.1 – Une permutation $\sigma \in S_3$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$, de signature $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Théorème 20.2.2. Si (x^1, \dots, x^n) est un système de coordonnées, rappelons que (dx^1, \dots, dx^n) forme une base de T_x^*M . On pose

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p} := \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) dx^{\mu_{\sigma(1)}} \otimes dx^{\mu_{\sigma(2)}} \dots \otimes dx^{\mu_{\sigma(p)}} \in \Lambda^p$$

qui est une p -forme.

Exemples

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$$

ou

$$dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu + \dots$$

(il y a 6 termes en tout).

On observe que l'échange de deux termes dans $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}$ change son signe. Par conséquent une base de l'espace des p-formes Λ_x^p en $x \in M$ est formé par :

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad \text{avec } \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p \quad (20.2.2)$$

Et donc

$$\dim \Lambda_x^p = C_n^p$$

Par convention, on pose que l'espace des **0-formes** est :

$$\Lambda_x^0 = \mathbb{R} \quad (20.2.3)$$

(en un point donné x , une 0-forme est un nombre).

Définition 20.2.3. La collection

$$\Lambda^p := \bigcup_{x \in M} \Lambda_x^p$$

est un espace fibré vectoriel de rang C_n^p sur M , l'espace fibré des p-formes.

- Une section $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ de ce fibré est une **p-forme** sur M ou **champ de tenseur antisymétrique de degré p** , et s'écrit dans la base Eq.(20.2.2) :

$$\omega(x) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_p} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

et les fonctions $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(x)$ sont les composantes de ω dans cette base.

Remarquons que l'on obtient ces coordonnées en appliquant la p-forme aux vecteurs de bases (et d'après Eq.(18.4.4)) :

$$\omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \right) = \omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(x)$$

- D'après la convention Eq.(20.2.3), une 0-forme est une section

$$f \in C^\infty(\Lambda^0) = C^\infty(M) \quad (20.2.4)$$

donc f est **une fonction à valeurs réelles** sur M .

20.2.1 Exemple de l'espace $M = \mathbb{R}^3$

Naturellement, les p-formes sur l'espace $M = \mathbb{R}^3$ sont très utilisées en physique.

On note (x^1, x^2, x^3) les coordonnées sur \mathbb{R}^3 , et soit $x \in \mathbb{R}^3$ un point fixé. On va expliciter les p-formes au point x . On va aussi observer comment leur composante est modifiée par le changement de coordonnée

$$P : (x^1, x^2, x^3) \rightarrow (y^1, y^2, y^3) = (-x^1, x^2, x^3)$$

appelé **parité**, (de déterminant -1, créant un changement d'orientation de l'espace, comme dans un miroir placé en $x_1 = 0$), et pour $\lambda > 0$,

$$D_\lambda : (x^1, x^2, x^3) \rightarrow (y^1, y^2, y^3) = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$$

appelé **dilatation**.

- Les 0-formes sont les éléments de $\Lambda_x^0 = \mathbb{R}$, espace de dimension 1. Une base est le nombre 1. Une 0-forme est une fonctions et est aussi appelée un **scalaire** en physique. Elle s'écrit

$$f = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

Le changement de coordonnée par P ou D_λ ne change pas la composante $f(x) \in \mathbb{R}$.

- Les 1-formes sont les éléments de $\Lambda_x^1 = T^*M$ (vecteurs cotangents), espace de dimension 3, dont une base est

$$dx^1, dx^2, dx^3$$

Une 1-forme est aussi appelée un **vecteur contravariant** en physique¹ et s'écrit :

$$\alpha = \alpha_1(x) dx^1 + \alpha_2(x) dx^2 + \alpha_3(x) dx^3$$

Le changement de coordonnée P change les composantes par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Le changement de coordonnée D_λ change les composantes par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\frac{1}{\lambda}\alpha_1, \frac{1}{\lambda}\alpha_2, \frac{1}{\lambda}\alpha_3)$.

- Les 2-formes sont les éléments de Λ_x^2 , espace de dimension $C_3^2 = 3$, dont une base est

$$dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2 \tag{20.2.5}$$

Une 2-forme est aussi appelée un **pseudo-vecteur** en physique et s'écrit :

$$\beta = \beta_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3(x) dx^1 \wedge dx^2$$

Le changement de coordonnée P change les composantes par

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rightarrow (\beta_1, -\beta_2, -\beta_3). \tag{20.2.6}$$

Le changement de coordonnée D_λ change les composantes par

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda^2} \beta_1, \frac{1}{\lambda^2} \beta_2, \frac{1}{\lambda^2} \beta_3 \right). \tag{20.2.7}$$

1. Et un vecteur tangent $V \in T_x M$ est appelé un **vecteur covariant**

- Les 3-formes sont les éléments de Λ_x^3 , espace de dimension $C_3^3 = 1$, dont une base est

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Une 3-forme est aussi appelée un **pseudo-scalaire** en physique, et s'écrit :

$$\gamma = \gamma_{123}(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Le changement de coordonnée P change la composante $\gamma_{123} \rightarrow -\gamma_{123}$. Le changement de coordonnée D_λ change la composante $\gamma_{123} \rightarrow \frac{1}{\lambda^3} \gamma_{123}$.

Exercice 20.2.4. Exemple : dans \mathbb{R}^3 la coordonnées de $\gamma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ en coordonnées cartésiennes est $\gamma_{123}(x) = 1$. En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , montrer que

$$\gamma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = r^2 \sin \theta (dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) \tag{20.2.8}$$

et donc sa coordonnée est $\gamma_{r\theta\varphi}(x) = r^2 \sin \theta$.

Exercice 20.2.5. Montrer qu'en électromagnétisme dans \mathbb{R}^3 , le champ électrique $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ sont les composantes d'une 1-forme et que le champ magnétique $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ sont les composantes d'une 2 forme. Aide : Exprimer le champ \vec{E} entre deux plaques d'un condensateur, exprimer le champ \vec{B} créé par une boucle de courant I , effectuer les changements de coordonnées P et D_λ et observer comment ces composantes sont modifiées.

Remarques :

- Pour $p = n$ (avec $n = \dim M$, la dimension de l'espace), l'espace des n-formes Λ_x^n est de dimension $C_n^n = 1$, et une base est $dx^1 \wedge dx^2 \dots \wedge dx^n$. Une n-forme est aussi appelée une **forme volume**. Elles jouent un rôle important pour l'intégration.
- Pour $p > n$, il n'y a pas de p-formes. $\dim \Lambda_x^p = 0$.
- Alors que la valeur $f(x)$ d'une 0-forme (=fonction) est indépendante du système de coordonnées, la composante $\gamma(x)$ d'une n-forme (forme volume) dépend du système de coordonnées.
- Si E est un espace vectoriel et $A : E \rightarrow E$ une application linéaire ou endomorphisme (on note aussi $A \in \text{End}(E)$) alors on peut associer à A un tenseur $\tilde{A} \in E^* \otimes E$ défini par $\tilde{A}(X, \alpha) = \alpha(A(X)) \in \mathbb{R}$. Inversement si $\tilde{A} \in E^* \otimes E$ défini un unique endomorphisme $A \in \text{End}(E)$ par $A(X) = \tilde{A}(X, \cdot)$. Ainsi

$$\text{End}(E) \equiv E^* \otimes E \tag{20.2.9}$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser cette équivalence (et d'autres similaires).

Exercice 20.2.6. l'espace \mathbb{R}^4 avec les coordonnées (x, y, z, t) est utile en relativité. Ecrire une base pour chaque espace Λ_x^p , $p = 0 \rightarrow 4$.

Exercice 20.2.7. On peut aussi s'intéresser aux tenseurs symétriques T de degré p , où $T(V_1, V_2, \dots, V_p)$ est invariant par permutation de $V_i \longleftrightarrow V_j, \forall i, j$. On note $S_x^p = S(T^*M \otimes \dots \otimes T^*M)$ cet espace. Quelle est sa dimension? Expliciter une base de S_x^2 . (L'espace a une utilité pour les métriques, voir définition 18.5.1 page 164)

Exercice 20.2.8. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit la 1-forme $\alpha = d\theta$ (en coordonnées polaires). Exprimer α en coordonnées cartésiennes (x, y) . Montrer que

$$\alpha = d\theta = \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx) \quad (20.2.10)$$

Exercice 20.2.9. Sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, soit la 2-forme appelée “angle solide”, en coordonnées sphériques,

$$\beta = \sin \theta (d\theta \wedge d\varphi)$$

Exprimer β en coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) . Montrer que

$$\beta = \frac{1}{r^3} (x^1 (dx^2 \wedge dx^3) + x^2 (dx^3 \wedge dx^1) + x^3 (dx^1 \wedge dx^2))$$

Exercice 20.2.10. Sur le plan \mathbb{R}^2 en coordonnées cartésiennes (q, p) on considère la 2-forme $\omega = dq \wedge dp$. Montrer que en coordonnées polaires (r, θ) puis en coordonnées (A, θ) avec $A := \pi r^2$ on a

$$\omega = dq \wedge dp = r dr \wedge d\theta = \frac{1}{2\pi} dA \wedge d\theta \quad (20.2.11)$$

20.2.2 Formule de changement de coordonnées pour les formes différentielles

Considérons un changement de coordonnées sur \mathbb{R}^2 :

$$x = (x^1, x^2) \rightarrow x' = (x'^1, x'^2)$$

On calcule

$$dx'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} dx^2$$

$$\begin{aligned}
 dx'^1 \wedge dx'^2 &= (dx'^1 \otimes dx'^2 - dx'^2 \otimes dx'^1) \\
 &= \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right) dx^1 \otimes dx^2 + \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right) dx^2 \otimes dx^1 \\
 &\quad - \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \otimes dx^2 - \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \right) dx^2 \otimes dx^1 \\
 &= \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) (dx^1 \wedge dx^2)
 \end{aligned}$$

Par conséquent une 2-forme $\omega \in C^\infty(\Lambda^2)$ s'écrit dans l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées :

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_{x'}(x') (dx'^1 \wedge dx'^2) = \omega_{x'}(x'(x)) \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) (dx^1 \wedge dx^2) \\
 &= \omega_x(x) (dx^1 \wedge dx^2)
 \end{aligned}$$

avec

$$\omega_x(x) = \omega_{x'}(x'(x)) \text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)$$

Cela signifie que $\omega_{x'}(x')$ et $\omega_x(x)$ sont la composante de ω relativement à la base $(dx'^1 \wedge dx'^2)$ ou $(dx^1 \wedge dx^2)$ respectivement.

Plus généralement, si on a un changement de coordonnées sur \mathbb{R}^n :

$$x = (x^1, \dots, x^n) \rightarrow x' = (x'^1, \dots, x'^n)$$

alors une forme volume (i.e. forme de degré n) s'exprime comme

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_x(x) (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\
 &= \omega_{x'}(x') (dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n)
 \end{aligned}$$

avec la formule

$$\omega_x(x) = \omega_{x'}(x'(x)) \cdot \left(\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right) (x) \tag{20.2.12}$$

et avec

$$\left(\text{Det} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right) (x) := \sum_{\sigma \in S^n} \epsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x'^{\sigma(1)}}{\partial x^1} \right) \dots \left(\frac{\partial x'^{\sigma(n)}}{\partial x^n} \right)$$

Démonstration. @@

□

Remarque : la formule (20.2.12) est la définition même du déterminant comme mesurant la variation de volume. Voir ex. @@.

20.3 Orientation d'une variété

On rappelle que $\Lambda^n \rightarrow M$ est un fibré de rang 1.

Définition 20.3.1. Une variété M de dimension n est **orientable** si $\Lambda^n \rightarrow M$ est le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$. De façon équivalente, chaque fonction de transition (entre cartes) $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation : $\text{Det}(\tau_{\alpha\beta}) > 0$. Une **orientation** de M est donnée par le choix d'une orientation des fibres (orientation de \mathbb{R}).

Remarques :

- Par exemple sur \mathbb{R}^3 , une orientation est le choix du sens $\pm dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.
- Le ruban de Moebius, la bouteille de Klein sont des surfaces non orientables.
- Un changement de coordonnées $x \rightarrow x'$ préserve l'orientation si et seulement si $\text{Det}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) > 0$ en tous points.

20.4 Changement de coordonnées et intégrales

Exemple en dimension 2 : Supposons que M est une variété orientée de dimension 2 et que l'on ait un changement de coordonnées qui préserve l'orientation :

$$x = (x^1, x^2) \rightarrow x' = (x'^1, x'^2)$$

Rappel : on introduit le **Jacobien**, qui est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$:

$$\text{Det}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

si $\omega_{x'}(x')$ est une fonction numérique de x' , alors en théorie de l'intégration, on a la loi de changement de variable :

$$\int \omega_{x'}(x') dx'^1 dx'^2 = \int \omega_{x'}(x'(x)) \left| \text{Det}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \right| dx^1 dx^2 = \int \omega_x(x) dx^1 dx^2 \quad (20.4.1)$$

avec

$$\omega_x(x) = \omega_{x'}(x'(x)) \left| \text{Det}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \right| \quad (20.4.2)$$

Nous allons voir que la formule Eq.(20.4.2) arrive naturellement avec les 2-formes.

On définit donc

$$\int_M \omega := \int \omega_{x'}(x') dx'^1 dx'^2$$

où le deuxième terme est la notation habituelle d'une intégrale pour la fonction numérique $\omega(x')$. Si l'orientation est préservée, cette définition ne dépend pas du système de coordonnées d'après Eq.(20.4.1).

Remarque : A posteriori il n'est pas étonnant que ce soit une 2-forme qui est l'intégrand naturel pour une intégrale en dimension deux. En effet, on intègre des "éléments de surface", et un "élément de surface" (imaginer un petit parallélogramme) est défini par deux vecteurs tangents V_1, V_2 , et son aire infinitésimale $S(V_1, V_2)$ est linéaire par rapport à V_1, V_2 et anti-symétrique. C'est donc bien une 2-forme.

Plus généralement :

Théorème 20.4.1. Si (x^1, \dots, x^p) un système de coordonnées sur M orientée de dimension p , et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ est une p -forme qui s'écrit $\omega(x) = \omega_x(x)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)$ alors on définit :

$$\int_M \omega := \int \omega_x(x)(dx^1 \dots dx^p)$$

qui est indépendant du système de coordonnées choisies.

Remarque : M peut être une sous variété plongée d'une variété N de dimension n plus grande.

20.5 Dérivée extérieure et formule de Stokes

Définition 20.5.1. Sur une variété M de dimension n , pour tout $p \in [0, n]$ on définit un opérateur différentiel d'ordre 1 qui généralise la différentielle d'une fonction, et appelé **dérivée extérieure**, notée $d : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1})$, définit par

$$d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$$

$$f(x) \mapsto (df)(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$$

$$\alpha = \alpha_j(x) dx^j \mapsto (d\alpha)(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \quad (20.5.1)$$

$$d : C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^3)$$

$$\beta = \beta_{jk}(x) dx^j \wedge dx^k \mapsto (d\beta)(x) = \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

etc...

Théorème 20.5.2. *La définition ci-dessus ne dépend pas du système de coordonnées choisies.*

Démonstration. Il existe une formule géométrique intrinsèque qui exprime l'opérateur d . Par exemple pour $p = 1$, si $\alpha \in C^\infty(\Lambda^1)$, et $V_1, V_2 \in C^\infty(TM)$ alors

$$(d\alpha)(V_1, V_2) = V_1(\alpha(V_2)) - V_2(\alpha(V_1)) - \alpha([V_1, V_2])$$

vérifions tout d'abord que $d\alpha$ ainsi défini est un tenseur : il faut que en un point fixé, $d\alpha$ soit linéaire par rapport à V_1 et V_2 . Pour le vérifier, soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction (en chaque point $f(x)$ est un nombre), on calcule :

$$\begin{aligned} (d\alpha)(fV_1, V_2) &= fV_1(\alpha(V_2)) - V_2(\alpha(fV_1)) - \alpha([fV_1, V_2]) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - V_2(f\alpha(V_1)) - \alpha(fV_1V_2 - V_2fV_1) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - (V_2(f))\alpha(V_1) - \alpha(fV_1V_2 - V_2(f)V_1 - fV_2V_1) \\ &= fV_1(\alpha(V_2)) - (V_2(f))\alpha(V_1) - f\alpha(V_1V_2 - V_2V_1) + (V_2(f))\alpha(V_1) \\ &= f(d\alpha)(V_1, V_2) \end{aligned}$$

on utilise : $\alpha(fV_2) = f\alpha(V_2)$ comme α est un tenseur, et $V_2fV_1 = V_2(f)V_1 + fV_2V_1$, comme V_2 est un opérateur différentiel d'ordre 1, etc...

On vérifie facilement que $d\alpha$ est antisymétrique : $(d\alpha)(V_1, V_2) = -(d\alpha)(V_2, V_1)$.

Finalement on vérifie que cette expression coïncide avec la définition Eq.(20.5.1). Pour cela, on prend des vecteurs de base $V_1 = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $V_2 = \frac{\partial}{\partial x^j}$, et $\alpha = \alpha_j(x) dx^j$. On calcule $[V_1, V_2] = 0$, et donc $(d\alpha)(V_1, V_2) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha_j(x)) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha_i(x))$.

Par ailleurs, $\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j\right)(V_1, V_2)$ donne le même résultat d'après la relation de dualité Eq.(18.4.4). On a vérifié Eq.(20.5.1).

Plus généralement, si ω est une p-forme alors

$$\begin{aligned} (d\omega)(V_0, V_1, \dots, V_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i V_i \left(\omega(V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) \right) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([V_i, V_j], V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_p) \end{aligned}$$

où \hat{V}_i signifie que ce terme est absent. □

Exemples sur \mathbb{R}^2 : Avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2) sur \mathbb{R}^2 , expliciter les formules de la dérivée extérieure, et montrer que

- $d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$ correspond au **gradient**.
- $d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$ correspond au **rotationnel**

Exprimer ces opérateurs en coordonnées polaires.

Exemples sur \mathbb{R}^3 : Avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) sur \mathbb{R}^3 , expliciter les formules de la dérivée extérieure, et montrer que

- $d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$ correspond au **gradient**.
- $d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$ correspond au **rotationnel**
- $d : C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^3)$ correspond à la **divergence**

Exprimer ces opérateurs en coordonnées sphériques.

Solution : @@

Proposition 20.5.3. Pour $f \in C^\infty(\Lambda^p)$ et $g \in C^\infty(\Lambda^q)$, on a

$$d(f \wedge g) = df \wedge g + (-1)^p f \wedge dg \tag{20.5.2}$$

Appelée *formule de Leibnitz*

Exercice 20.5.4. Ecrire la preuve.

Remarque : la formule de Leibnitz généralise le cas connu de deux fonctions $d(fg) = df.g + f.dg$.

Exercice 20.5.5. Expliciter dans une base, la formule de Leibnitz Eq.(20.5.2), dans le cas de $M = \mathbb{R}^3$, $p, q = 0, 1, 2, 3$ en faisant intervenir les opérateurs gradient $d : C^\infty(\Lambda^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$, rotationnel $d : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^2)$, divergence $d : C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^3)$.

Théorème 20.5.6. L'opérateur d vérifie : pour tout $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$,

$$d(d\omega) = 0 \tag{20.5.3}$$

Démonstration. On le vérifie dans le cas $p = 0$. Si $f \in C^\infty(\Lambda^0)$, alors $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ et

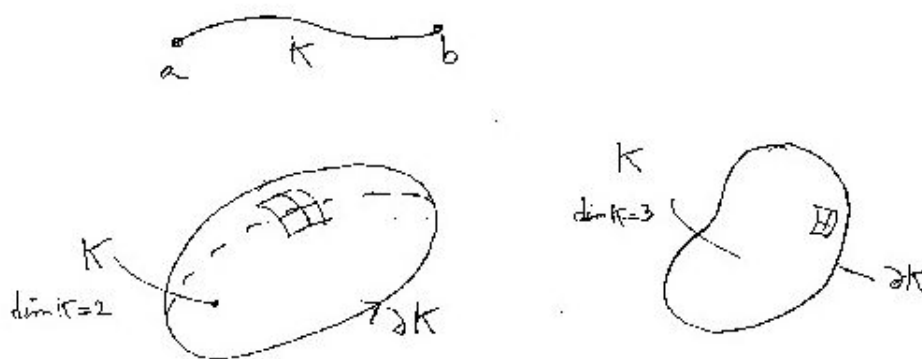
$$\begin{aligned} d(df) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) (dx^i \wedge dx^j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right) (dx^1 \wedge dx^2) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right) (dx^2 \wedge dx^1) + \dots \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right) (dx^1 \wedge dx^2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \right) (dx^1 \wedge dx^2) + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

utilisant le fait que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$ est symétrique, et $(dx^i \wedge dx^j)$ antisymétrique en $(i \leftrightarrow j)$.

□

Théorème 20.5.7. Théorème de Stokes. Si $K \subset M$ est un domaine orienté de dimension p , on note ∂K son bord orienté, et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p-1})$ est à support compact (cad nulle en dehors d'un ensemble compact) alors

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega \tag{20.5.4}$$



Exemples en petite dimension :

- sur \mathbb{R}^2 , $x = (x^1, x^2)$, si $\omega = a(x) dx^1 + b(x) dx^2$ est une 1-forme et $\dim K = 2$, $\dim \partial K = 1$ alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x^1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x^2} \right) (dx^1 \wedge dx^2)$$

la formule de Stokes donne la **formule de Green-Riemann :**

$$\iint_K \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x^1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \oint_{\partial K} (a(x) dx^1 + b(x) dx^2)$$

- Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $f(x)$ est une fonction (0-forme), K est une courbe d'extrémités a, b alors la formule de Stokes donne (en notation classique)

$$\int_K \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

- Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\alpha(x)$ est une 1-forme, K est une surface alors la formule de Stokes donne (en notation classique)

$$\iint_K \vec{\text{rot}} \alpha \cdot d^2 \vec{s} = \oint_{\partial K} \alpha \cdot d\vec{l}$$

- Sur \mathbb{R}^3 , $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\beta(x)$ est une 2-forme, K est un volume alors la formule de Stokes donne (en notation classique) la **formule d’Ostrogradski**

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{\beta} \cdot d^3x = \iint_{\partial K} \vec{\beta} \cdot d^2\vec{s}$$

Démonstration. (ref : Taylor tome 1. p.70 [28]).

Preuve en dimension $p = 2$ pour simplifier : comme l’intégrale est invariante par changement de coordonnées, on considère localement des coordonnées (x^1, x^2) , et on suppose que K correspond au demi-espace $x^1 \leq 0$, et donc le bord ∂K correspond à $x^1 = 0$, avec la forme volume dx^2 . $\omega \in C^\infty(\Lambda^1)$ est une 1-forme. On écrit :

$$\omega = \omega_1(x) dx^1 + \omega_2(x) dx^2$$

Alors

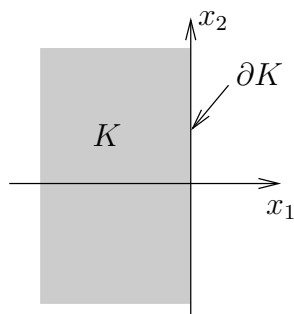
$$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2$$

Donc

$$\int_K d\omega = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 dx^2 + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^1 dx^2$$

Or $\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 = \omega_2(0, x_2) - \omega_2(-\infty, x_2) = \omega_2(0, x_2)$ car ω_2 est à support compact, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 = \omega_1(x_1, +\infty) - \omega_1(x_1, -\infty) = 0$. Donc

$$\int_K d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2(0, x_2) dx^2 = \int_{\partial K} \omega$$



Preuve identique en dimension quelconque : Comme l’intégrale est invariante par changement de coordonnées, on considère localement des coordonnées $(x^1, x^2, \dots, x^p) = (x^1, x')$, et on suppose que K correspond au demi-espace $x^1 \leq 0$, et donc le bord ∂K correspond à $x^1 = 0$, avec la forme volume $dx' := dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$. On écrit :

$$\omega = \sum_i \omega_i(x) dx^1 \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$

où $\widehat{dx^i}$ signifie que ce terme n’y est pas. Alors

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$

Alors

$$\int_K d\omega = \sum_i \int_K \left(\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^1 \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$

pour $i > 1$, alors $x_i \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^i} dx^i = 0$, mais pour $i = 1$, $\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x^1} dx^1 = \omega_1(0, x')$. Donc

$$\int_K d\omega = \int_K \omega_1(0, x') dx' = \int_{\partial K} \omega$$

□

Définition 20.5.8. Une p-forme $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ est **fermée** si $d\omega = 0$. On note :

$$\mathcal{Z}^p = \{ \omega \mid d\omega = 0 \}$$

Pour $p \geq 1$, une p-forme est **exacte** si il existe $\alpha \in C^\infty(\Lambda^{p-1})$ telle que $\omega = d\alpha$. On note

$$\mathcal{B}^p = \{ \omega \mid \omega = d\alpha, \alpha \in C^\infty(\Lambda^{p-1}) \}$$

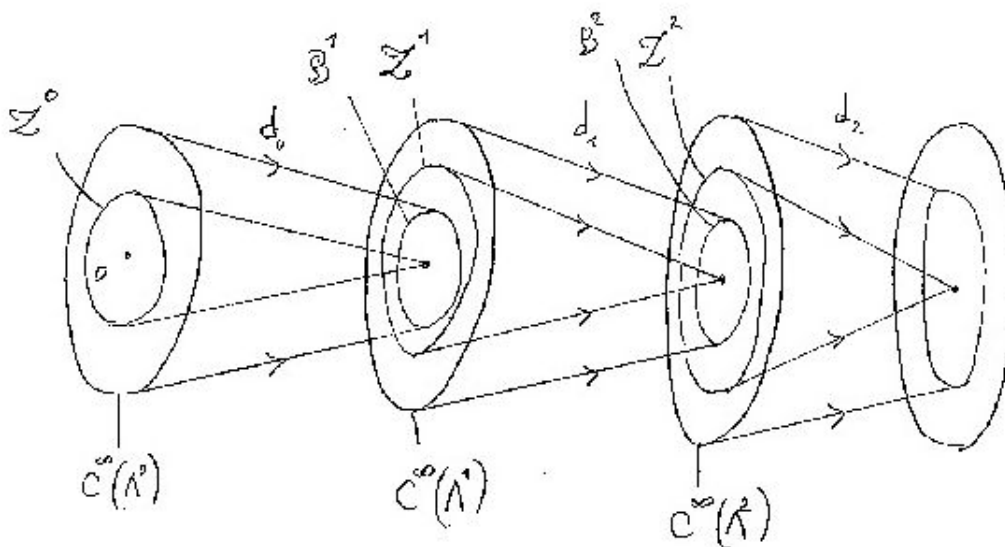
Par convention, une 0-forme $f(x)$ est exacte si $f(x) = cste$. C'est à dire

$$\mathcal{B}^0 \equiv \mathbb{R}$$

Remarque D'après Eq.(20.5.3) si $\omega = d\alpha$, alors $d\omega = dd\alpha = 0$, donc :

$$\mathcal{B}^p \subset \mathcal{Z}^p$$

(sous espace vectoriel). Voir figure.



Lemme 20.5.9. Lemme de Poincaré. Si $M = \mathbb{R}^n$, (ou la boule \mathbb{B}^n ou espace est contractile ou étoilé de \mathbb{R}^n), et $p \geq 1$, alors si une p -forme ω est fermée ($d\omega = 0$) alors ω est exacte ($\omega = d\alpha$).

En d'autres termes, si M est contractile alors pour $p \geq 1$, $\mathcal{Z}^p = \mathcal{B}^p$.

Preuve : cf [28, p.69]. ou Nakahara p.235. @@

Exercice 20.5.10. Montrer que les formes suivantes sont fermées mais non exactes.

1. Sur l'espace $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, soit la fonction $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Montrer que cette fonction est fermée mais pas exacte.
2. Sur l'espace $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, en coordonnées polaires, on considère la 1-forme $\alpha = d\theta$ (qui est bien définie sur \mathcal{D} , voir (218)). Montrer que α est fermée mais pas exacte.
3. Sur l'espace $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, en coordonnées sphériques, soit la 2-forme $\beta = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ qui est la 2-forme d'angle solide, bien définie sur \mathcal{D} . Montrer que β est fermée mais pas exacte. (En particulier il est incorrect de l'écrire $\beta = d\Omega$ comme on le fait parfois en physique).

Définition 20.5.11. Si $\omega, \omega' \in \mathcal{Z}^p$, on dit que $\omega \sim \omega'$ (**équivalentes**) si $\omega' = \omega + d\alpha$, cad si $(\omega' - \omega) \in \mathcal{B}^p$. On note $[\omega]$ la classe d'équivalence. Et

$$\mathcal{H}^p(M) := \frac{\mathcal{Z}^p}{\mathcal{B}^p}$$

l'espace quotient, qui est l'espace des classes d'équivalences, appelé **groupe de Cohomologie de DeRham de degré p** .

- Les groupes de Cohomologie de DeRham $\mathcal{H}^p(M)$ ont une grande importance pour l'étude des caractéristiques topologiques de la variété M . Par exemple comme $\mathcal{B}^0 \equiv \mathbb{R}$ et $\mathcal{Z} \equiv \mathbb{R}^{b_0}$ où b_0 est le nombre de composantes connexes de M . $\mathcal{H}^0(M) \equiv \mathbb{R}^{b_0}$. Plus généralement, on appelle $b_p := \dim \mathcal{H}^p(M)$ les **nombre de Betti**.
- D'après le Lemme de Poincaré, si M est contractile alors pour $p \geq 1$, $\mathcal{Z}^p = \mathcal{B}^p$, donc $\mathcal{H}^p(M) = \{0\}$.

Exercice 20.5.12. Calculer b_r pour $M = \mathbb{T}^n$. Aide : les générateurs de $H^r(\mathbb{T}^n)$ sont $d\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta^{i_r}$ donc $b_r = C_n^r$.

20.6 Difféomorphisme entre variétés et transport de champ de tenseurs

@@ Tiré avant, tiré arrière des tenseurs. Dérivée de Lie de champ de tenseur. @@

Chapitre 21

Géométrie Riemannienne et électromagnétisme

21.0.1 Métrique induite sur l'algèbre extérieure et l'opérateur adjoint d^*

Considérons une variété Riemannienne (ou Lorentzienne) (M, g) de dimension n .

Notons $(e_1, \dots, e_n) \in T_x M$ une base orthonormée de l'espace tangent, pour la métrique g . Et notons $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in T_x^* M$ la base duale qui est une base orthonormée de l'espace dual $T_x^* M = \Lambda_x^1$. Rappelons aussi, Eq.(20.2.2), que $(\alpha^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{\mu_p})_{\mu_1 < \dots < \mu_p}$ forme une base des p -formes Λ_x^p .

Définition 21.0.1. La métrique g induit un **produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda_x^p}$ **sur chaque espace de p -formes** Λ_x^p , $x \in M$, $p \in \mathbb{N}$: on décide que la base $(\alpha^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{\mu_p})_{\mu_1 < \dots < \mu_p}$ est une base orthonormée de Λ_x^p . En particulier, comme $\dim \Lambda_x^n = 1$, on dit que

$$\mu_{vol} := \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$$

est la **forme volume associée à la métrique g** .

(Cette définition ne dépend pas de la base choisie, voir Taylor p.161[28]).

Remarquer que μ_{vol} est unique à un signe près, et que le choix de μ_{vol} pour tout $x \in M$ correspond au choix d'une orientation de M (possible seulement si M est orientable).

Proposition 21.0.2. Dans un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) , la forme volume s'écrit :

$$\mu_{vol} = \sqrt{G(x)} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \quad (21.0.1)$$

avec $G(x) := \det(g_{ij}(x))_{i,j}$ est le déterminant de la matrice des composantes de g , Eq.(18.5.1).

Démonstration. (Taylor T1, p.126, [28]). Au point $x \in M$, on effectue un changement linéaire de coordonnées $y^j = \sum_i A_i^j x^i$ de façon que $(dy^j)_j$ forme une base o.n. de T_x^*M (attention cela n'est valable que au point x et pas dans un voisinage, sinon cela signifierait que g est euclidienne). On a donc

$$g(x) = \sum_j dy^j \otimes dy^j = \sum_{i,k} \sum_j A_i^j A_k^j dx^i \otimes dx^k = \sum_{i,k} g_{ik}(x) dx^i \otimes dx^k$$

on déduit que $g_{ik} = \sum_j A_i^j A_k^j$, soit un produit de matrice, donc $\det g = (\det A)^2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mu_{vol} &= dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = (\det A) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

□

Exemple 21.0.3. sur \mathbb{R}^3 , la forme volume $\mu_{vol} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ associée à la métrique euclidienne s'écrit en coordonnées sphériques, d'après (18.5.9) et (21.0.1) :

$$\mu_{vol} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = r^2 \sin \theta (dr \wedge d\theta \wedge d\varphi)$$

a déjà obtenu ce résultat en (20.2.8) page 217.

Définition 21.0.4. Si $\alpha, \beta \in C_0^\infty(\Lambda^p)$ sont deux p -formes à support compact, on pose :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{C^\infty(\Lambda^p)} := \int_M \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle_{\Lambda_x^p} \mu_{vol}$$

qui définit un **produit scalaire sur l'espace des sections** $C^\infty(\Lambda^p)$

Remarques :

- on complète l'espace $C^\infty(\Lambda^p)$ pour obtenir un espace complet par rapport à la norme $\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_{C^\infty(\Lambda^p)}}$, appelé **espace de Hilbert de sections** $L^2(\Lambda^p)$.
- Rappelsur l'opérateur adjoint : On rappelle que si $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est un opérateur linéaire entre deux espace de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ avec des produits scalaires respectifs $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2}$, alors son **adjoint** est l'opérateur $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ défini par :

$$\langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle u, A^*v \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_1, v \in \mathcal{H}_2$$

Définition 21.0.5. L'opérateur adjoint de $d : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1})$, noté

$$d^* : C^\infty(\Lambda^{p+1}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^p), \quad p \in \mathbb{N}$$

est défini par :

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{C^\infty(\Lambda^{p+1})} = \langle \alpha, d^*\beta \rangle_{C^\infty(\Lambda^p)}$$

et la convention $d^* = 0$ sur $C^\infty(\Lambda^0) = C^\infty(M)$ (les fonctions).

Exercice 21.0.6. Montrer ces expressions explicites de l'opérateur d^* dans des exemples simples :

1. Sur l'espace euclidien $(\mathbb{R}, g = dx \otimes dx)$ si $\beta = b(x) dx \in C^\infty(\Lambda^1)$ est une 1-forme alors $d^*\beta$ est la fonction donnée par :

$$d^*\beta = - \left(\frac{db}{dx} \right) \in C^\infty(\Lambda^0) \quad (21.0.2)$$

2. Sur l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^2, g = dx \otimes dx + dy \otimes dy)$, si $\beta = \beta_{xy}(x, y) (dx \wedge dy) \in C^\infty(\Lambda^2)$ est une 2-forme alors $d^*\beta$ est la 1-forme donnée par :

$$d^*\beta = \left(\frac{\partial \beta_{xy}}{\partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial \beta_{xy}}{\partial x} \right) dy \in C^\infty(\Lambda^1) \quad (21.0.3)$$

Proposition 21.0.7. On a

$$d^*d^* = 0 \quad (21.0.4)$$

Démonstration. Découle de $dd = 0$, qui implique que $0 = (dd)^* = d^*d^*$. □

21.0.2 L'opérateur Laplacien de Hodge

Définition 21.0.8. Le **Laplacien de Hodge** (ou **opérateur de Laplace-Beltrami**) est

$$\Delta : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^p), \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\Delta := (d + d^*)^2 = (dd^* + d^*d)$$

Remarques

— Sur les fonctions $C^\infty(\Lambda^0)$, alors $d^* = 0$ donc

$$\Delta = d^*d$$

— $\Delta^* = (dd^* + d^*d)^* = \Delta$ donc Δ est un opérateur auto-adjoint (son spectre est alors sur l'axe réel).

— Si $\alpha \in C^\infty(\Lambda^p)$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \Delta \alpha \rangle &= \langle \alpha, (dd^* + d^*d) \alpha \rangle = \langle \alpha, dd^* \alpha \rangle + \langle \alpha, d^*d \alpha \rangle \\ &= \langle d^* \alpha, d^* \alpha \rangle + \langle d \alpha, d \alpha \rangle = \|d^* \alpha\|^2 + \|d \alpha\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On dit que Δ est un **opérateur positif** (son spectre est alors sur l'axe réel positif).

— On note $\Lambda^\bullet(x) := \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(x)$ l'algèbre extérieure au point x qui est un espace vectoriel de dimension n^2 . L'opérateur

$$D := i(d + d^*) : C(\Lambda^\bullet) \rightarrow C(\Lambda^\bullet)$$

est un opérateur différentiel d'ordre 1 qui vérifie (par définition de Δ) :

$$D^*D = \Delta$$

On dit que D est un **opérateur de Dirac**. D est une sorte de “racine carrée du Laplacien”. (Remarque que D mélange les degrés des formes et par conséquent il faut considérer l'algèbre extérieure Λ^\bullet dans sa globalité).

— Plus généralement si $m > 0$ est un paramètre qui correspond à la masse du particule en physique, en posant

$$D := i(d + d^*) + m \text{Id} : C(\Lambda^\bullet) \rightarrow C(\Lambda^\bullet)$$

on a

$$D^*D = \Delta + m^2 \text{Id}$$

qui est l'opérateur de **Klein-Gordon**. Cet **opérateur de Dirac** D est utilisé pour décrire les particules de spin 1/2 et de masse m (comme le neutron, l'électron etc..) en mécanique quantique relativiste. Pour les aspects mathématique voir [29, chap.10].

Proposition 21.0.9. Expression de Δ dans un système de coordonnées :

Si $f \in C^\infty(\Lambda^0)$ est une fonction (Eq.(20.2.4)), alors dans un système de coordonnées $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$, alors

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{G(x)}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^j} \left((g^{-1}(x))^{jk} \sqrt{G(x)} \frac{\partial}{\partial x^k} f \right) \quad (21.0.5)$$

avec $G(x) := \left| \det(g_{ij}(x))_{ij} \right|$.

Démonstration. (Taylor p.137 [28]). On utilise eq.(??), eq.(21.0.1) (notant $dx := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$). D'une part

$$\int_M \langle \Delta f, v \rangle \mu_{vol} = \int_M v(\Delta f) \sqrt{G} dx$$

et d'autre part $d^*f = 0$, donc avec une intégration par parties (p.p.) :

$$\begin{aligned} \int_M \langle \Delta f, v \rangle \mu_{vol} &= \int_M \langle d^*df, v \rangle \mu_{vol} = \int_M \langle df, dv \rangle \mu_{vol} \\ &= \int_M (g^{-1})^{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^k} \right) \sqrt{G} dx \\ &\stackrel{p.p.}{=} - \int v \frac{\partial}{\partial x^k} \left((g^{-1})^{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \sqrt{G} \right) dx \\ &= - \int v \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left((g^{-1})^{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \sqrt{G} \right) \right) \sqrt{G} dx \end{aligned}$$

L'identification des deux expressions vraies pour tout $f, v \in C^\infty(M)$, donne le résultat. \square

Exercices : (Taylor [28] p.139)

1. Montrer que en coordonnées cartésiennes sur \mathbb{R}^n , $\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$ est l'opposé du Laplacien habituel.
2. Montrer que en coordonnées polaires sur \mathbb{R}^2 ,

$$-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

3. Montrer que le Laplacien agissant que les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ en coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^3 est

$$-\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

4. Montrer que en coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^n , avec $x = r\omega$, $\omega \in S^{n-1}$,

$$-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S$$

où Δ_S est le Laplacien sur la sphère unité S^{n-1} .

5. Sur $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ avec la métrique de Lorentz, montrer que

$$-\Delta f = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ainsi $\Delta f = 0$ est l'équation d'onde. Remarque : en physique on note $\square = \Delta$ appelé **d'Alembertien**. Ce n'est pas un opérateur positif car \mathbb{R}^4 n'est pas euclidien ici.

21.0.3 Equations de Maxwell sur une variété Lorentzienne

(ref : [28] p.165).

Soit (M, g) une variété Lorentzienne de dimension 4, qui modélise l'espace-temps (l'univers).

On va montrer que les équations de Maxwell s'écrivent de façon géométrique (indépendamment du système de coordonnées) et faisant intervenir seulement deux champs de 1-formes (des sections du fibré Λ^1) : A, \mathcal{J} qui représentent respectivement **le champ électromagnétique** et **la densité des charges électriques** dans l'univers.

Proposition 21.0.10. "Equations de Maxwell". *Les formes différentielles du champ et des charges :*

$$A, \mathcal{J} \in C^\infty(\Lambda^1) : \quad 1\text{-formes}$$

sont reliées par la relation :

$$\mathcal{J} = d^* dA \tag{21.0.6}$$

Des relations se déduisent immédiatement de cette simple relation, utilisant (20.5.3) et (21.0.4). Posons :

$$F := dA \in C^\infty(\Lambda^2) : \quad 2\text{-forme} \tag{21.0.7}$$

alors :

$$dF = 0, \quad d^* \mathcal{J} = 0 \tag{21.0.8}$$

Afin de vérifier que (21.0.6) est bien équivalent aux 4 équations célèbres de Maxwell, écrivons cette relation en coordonnées dans un espace-temps plat. Supposons donc que dans un système de coordonnées, la métrique sur l'espace-temps est

$$g = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$$

cad on dit que l'espace-temps est de **Minkowski**. On verra que sa courbure est nulle. C'est un espace-temps plat. On verra aussi que ce système de coordonnées s'identifie à un "référentiel inertiel". Notons et nommons les composantes des tenseurs de la façon suivante (ce sont toutes des fonctions de (t, x^1, x^2, x^3)) :

$$A = Vdt + \sum_i A_i dx^i, \quad V : \text{potentiel scalaire}, \quad \vec{A} = (A^1, A^2, A^3) : \text{potentiel vecteur}$$

$$F = \sum_i E_i dx^i \wedge dt + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (21.0.9)$$

$\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$: champ électrique, $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$: champ magnétique, (cf (20.2.5)), et

$$\mathcal{J} = \rho dt + \sum_i J_i dx^i, \quad \rho : \text{densité de charges}, \quad \vec{J} = (J^1, J^2, J^3) : \text{densité de courant}$$

(Il est aussi habituel de noter $x^0 = t$ ainsi $F = \sum_{\mu, \nu=0}^3 F_{\mu, \nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, $\mathcal{J} = \sum_\mu \mathcal{J}_\mu dx^\mu$, etc.)

Proposition 21.0.11. *Dans l'espace temps plat, avec ce système de coordonnées de Minkowski, l'eq.(21.0.7) $F = dA$ s'écrit :*

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \quad (21.0.10)$$

l'équation (21.0.6) $\mathcal{J} = d^*F$ s'écrit :

$$\vec{J} = \vec{\text{rot}}(\vec{B}) - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \rho = \text{div}(\vec{E}) \quad (21.0.11)$$

l'équation (21.0.8) $dF = 0$ s'écrit :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = 0 \quad (21.0.12)$$

On reconnaît les équations de Maxwell [9].

L'équation $d^*\mathcal{J} = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0 : \quad \text{conservation de la charge} \quad (21.0.13)$$

Démonstration. — Commençons par écrire l'équation $F = dA$ en coordonnées :

$$dA = \sum_{i=1}^3 (\partial_{x^i} V) dx^i \wedge dt + \sum_{i,j} (\partial_{x^i} A_j) dx^i \wedge dx^j + \sum_i (\partial_t A_i) dt \wedge dx^i$$

En identifiant avec l'expression de F , Eq.(21.0.9) on déduit (21.0.10).

- Pour écrire l'équation $\mathcal{J} = d^*F$ en coordonnées, il faut connaître l'expression de d^* : $C^\infty(\Lambda^2) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)$. On procède comme dans l'exemples (21.0.3) : soit $\alpha = \alpha_t dt + \sum_i \alpha_i dx^i \in C^\infty(\Lambda^1)$ une 1-forme. Alors

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_i (\partial_{x^i} \alpha_t) dx^i \wedge dt + \sum_i (\partial_t \alpha_i) dt \wedge dx^i + \sum_{i,j} (\partial_{x^i} \alpha_j) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_i (\partial_t \alpha_i - \partial_{x^i} \alpha_t) dt \wedge dx^i + \sum_{i,j} (\partial_{x^i} \alpha_j) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$F = - \sum_i E_i dt \wedge dx^i + \sum_{i<j} B_{(ij)} dx^i \wedge dx^j \quad (21.0.14)$$

où $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = (B_{(23)}, B_{(31)}, B_{(12)})$. La forme volume est $\mu_{vol} = dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha | d^*F \rangle &= \langle d\alpha | F \rangle \\ &= \int \left(\sum_i (\partial_t \alpha_i - \partial_{x^i} \alpha_t) E_i + \sum_{i<j} (\partial_{x^i} \alpha_j - \partial_{x^j} \alpha_i) B_{(ij)} \right) \mu_{vol} \\ &\stackrel{p.p.}{=} \int \left(\sum_i (-\alpha_i \partial_t E_i + \alpha_t \partial_{x^i} E_i) + \sum_{i<j} (-\alpha_j \partial_{x^i} B_{(ij)} + \alpha_i \partial_{x^j} B_{(ij)}) \right) \mu_{vol} \\ &= \int \left(\alpha_t \left(\sum_i \partial_{x^i} E_i \right) + \sum_i \alpha_i \left(-\partial_t E_i + \sum_j (-\partial_{x^j} B_{(ji)} + \partial_{x^j} B_{(ij)}) \right) \right) \mu_{vol} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d^*F &= \left(\sum_i \partial_{x^i} E_i \right) dt + \sum_i \left(-\partial_t E_i + \sum_j (-\partial_{x^j} B_{(ji)} + \partial_{x^j} B_{(ij)}) \right) dx^i \\ &= \operatorname{div}(\vec{E}) dt + \sum_i \left(-\partial_t \vec{E}_i + \left(\operatorname{rot}(\vec{B}) \right)_i \right) dx^i \end{aligned}$$

donc par identification des composantes avec $\mathcal{J} = \rho dt + \sum_i \vec{J}_i dx^i$, on déduit (21.0.11).

— L'équation $dF = 0$ donne d'après (21.0.14)

$$\begin{aligned}
 0 = dF &= - \sum_{i,j} \partial_{x^j} (E_i) dx^j \wedge dt \wedge dx^i + \sum_{i < j} \partial_t (B_{(ij)}) dt \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &\quad + \sum_k \sum_{i < j} \partial_{x^k} (B_{(ij)}) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &= \sum_{i < j} (\partial_{x^j} (E_i) - \partial_{x^i} (E_j) + \partial_t (B_{(ij)})) dt \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &\quad + \left(\sum_k \sum_{i < j} \partial_{x^k} (B_{(ij)}) \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
 &= \sum_{i < j} \left(\left(\text{rot}(\vec{E}) \right)_{(ij)} + \partial_t (\vec{B}_{(ij)}) \right) dt \wedge dx^i \wedge dx^j \\
 &\quad + \left(\text{div}(\vec{B}) \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{aligned}$$

L'annulation des composantes donne (21.0.12).

— Pour écrire l'équation $d^* \mathcal{J} = 0$ en coordonnées, il faut connaître l'expression de $d^* : C^\infty(\Lambda^1) \rightarrow C^\infty(\Lambda^0)$. On procède comme dans l'exemples (21.0.2). Soit $\alpha \in C^\infty(\Lambda^0)$ une fonction. On a $d\alpha = (\partial_t \alpha) dt + \sum_i (\partial_{x^i} \alpha) dx^i$ donc

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha | d^* \mathcal{J} \rangle &= \langle d\alpha | \mathcal{J} \rangle \\
 &= \int \left((\partial_t \alpha) \rho + \sum_i (\partial_{x^i} \alpha) J_i \right) \mu_{vol} \\
 &\stackrel{p.p.}{=} \int \left(\alpha (-\partial_t \rho) + \sum_i \alpha (-\partial_{x^i} J_i) \right) \mu_{vol} \\
 &= - \int \alpha \left(\partial_t \rho + \text{div}(\vec{J}) \right) \mu_{vol}
 \end{aligned}$$

donc $d^* \mathcal{J} = - \left(\partial_t \rho + \text{div}(\vec{J}) \right)$. L'annulation donne (21.0.13). □

Remarques :

— les équations de Maxwell couplées aux charges électriques se résument en l'équation géométrique (21.0.6) que l'on appellera **équation de Maxwell**. Comme on l'a vu, les autres équations en découlent. Il apparait clairement, que l'électromagnétisme (Maxwell 1865) est une théorie qui s'exprime simplement dans le cadre de la relativité (Einstein 1905). Cet indice a fortement guidé Einstein pour découvrir la relativité. Les quantités $(\vec{A}, V, \vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{J})$ introduites par Maxwell sont les composantes de tenseurs et changent si l'on considère un autre système de coordonnées, et donc si l'on change de référentiel. Par contre A, \mathcal{J}, F sont des quantités géométriques indépendantes du système de coordonnées.

- Nous verrons dans un chapitre ultérieur une interprétation géométrique supplémentaire de A comme une 1-forme de connexion sur un fibré sur l'espace-temps et de F comme une **2-forme de courbure** (dans le cadre des “théories de Jauge”).
- Si $f \in C^\infty(\Lambda^0)$ est une fonction et $A' = A + df$ appelé **changement de Jauge**, alors $dA' = d(A + df) = dA = F$. Donc les “potentiels” A et A' correspondent aux mêmes champs électriques et magnétiques F . Si on choisit f de sorte que $d^*A' = 0$, on dit que l'on fait le choix de **Jauge de Lorentz** (qui est un choix géométrique car indépendant du système de coordonnées, contrairement à la Jauge de Coulomb). Alors eq.(21.0.6) donne

$$\Delta A = -\mathcal{J}$$

qui est une équation de type “équation d'onde”.

- Dans la même base, la quantité $\langle F, F \rangle_{\Lambda_x^2}$ s'écrit :

$$\langle F, F \rangle_{\Lambda_x^2} = \left| \vec{B} \right|^2 - \left| \vec{E} \right|^2$$

cette quantité est indépendante du système de coordonnées. (Cela découle directement de (21.0.14) et du fait que la base (dt, dx^1, dx^2, dx^3) est orthonormée dans $T_x^*\mathbb{R}^4$: $\langle dt, dt \rangle = -1$, $\langle dx^1, dx^1 \rangle = 1$, etc).

Proposition 21.0.12. Formulation variationnelle des équations de Maxwell :

On considère la fonctionnelle au point $x \in M$, appelée **Lagrangien électromagnétique** :

$$\mathcal{L}_{em}(A)(x) := -\frac{1}{2}\langle F, F \rangle_{\Lambda_x^2} + \langle A, \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1} \quad (21.0.15)$$

que l'on considère comme fonction de la section $A \in C^\infty(\Lambda^1)$. On définit l'**action électromagnétique** :

$$I_{em}(A) := \int_M \mathcal{L}_{em} \mu_{vol}$$

Alors $I_{em}(A)$ est extrémale pour des variations à support compact de A si et seulement si l'équation de Maxwell est vérifiée :

$$d^*dA = \mathcal{J}$$

Démonstration. Soit $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^1)$ une 1-forme à support compact. On note $A_\tau = A + \tau\beta$ une variation de A avec $\tau \in \mathbb{R}$. Alors $I_{em}(A)$ est extrémale si la variation suivante est nulle pour tout

β :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial I(A + \tau\beta)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \left(-\frac{1}{2} \langle d(A + \tau\beta), d(A + \tau\beta) \rangle_{\Lambda_x^2} + \langle A + \tau\beta, \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1} \right) \mu_{vol} \Big|_{\tau=0} \\
 &= \int (-\langle d\beta, dA \rangle_{\Lambda_x^2} + \langle \beta, \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1}) \mu_{vol} \\
 &= \int (-\langle \beta, d^*dA \rangle_{\Lambda_x^1} + \langle \beta, \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1}) \mu_{vol} \\
 &= \int \langle \beta, -d^*dA + \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1} \mu_{vol}
 \end{aligned}$$

La dernière expression est nulle pour tout β , par conséquent $-d^*dA + \mathcal{J} = 0$. □

Le Lagrangien du champ électromagnétique \mathcal{A} utilise l'intensité de la courbure : $\langle F, F \rangle$. Il est troublant que cela soit aussi fondamental en physique : par exemple le Lagrangien pour la relativité générale est la courbure scalaire S du champ métrique g sur l'espace temps.

21.0.3.1 Remarques sur les champs électrique \vec{E} et magnétiques \vec{B}

Ces champs apparaissent comme des composantes du tenseur F dans (21.0.14). Par conséquent dans un autre système de coordonnées, ces composantes sont différentes. Cependant **si on fixe la coordonnée temps t** (c'est pour un observateur donné), on peut écrire (21.0.14) comme

$$F = -dt \wedge E + B \quad (21.0.16)$$

avec sur l'espace (x^1, x^2, x^3) , une **1-forme champ électrique** :

$$E = \sum_i E_i dx^i$$

et une **2-forme champ magnétique** :

$$B = \sum_{i < j} B_{(ij)} dx^i \wedge dx^j$$

Le fait que le champ électrique E soit une 1 forme et que le champ magnétique B soit une 2-forme est bien connu en physique d'après les expériences suivantes (du XIXeme siècle) :

- Considérons un condensateur plan : deux plaques chargées distantes de l avec un champ un champ E entre elles. Considérons un changement d'échelle : les distance sont divisées par 2. Alors $\|E\|$ est multiplié par 2. Cela montre que E se comporte non pas comme une vecteur tangent à l'espace mais comme un vecteur cotangent : une 1-forme.

- Considérons un fil conducteur en boucle dans le plan ($x^3 = 0$) avec un courant I qui circule dans un sens. Cela crée un champ magnétique B selon l'axe x^3 qui sort de la boucle. Si on considère le dispositif dans un miroir (qui serait dans le plan $x_1 = 0$), le courant circule dans l'autre sens et le champ B est inversé. Cela montre que par le changement de coordonnées $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x_1, x_2, x_3)$ alors B change de signe comme une 2-forme dans \mathbb{R}^3 (appelé pseudo-vecteur en physique), voir (20.2.6).

21.0.4 Divergence, gradient et loi de conservation

Dans cette section nous voyons une opération naturelle de plus qu'apporte une métrique g sur une variété M . Il s'agit de la divergence d'un champ de vecteur (et plus généralement la divergence d'un champ de tenseurs). Nous verrons aussi l'utilisation de la divergence en physique pour exprimer les "lois de conservations".

21.0.4.1 Divergence d'un champ de vecteur

Pour la définition qui suit M est une variété différentiable (pas forcément une variété Riemannienne, c'est à dire munit d'une métrique g). Rappelons que la **dérivée de Lie** $\mathcal{L}_V \omega$ d'un champ de tenseur ω par rapport à un champ de vecteur V mesure la variation infinitésimale de ω transportée par le champ de vecteur V . On a la **formule de Cartan** $\mathcal{L}_V \omega = d(\iota_V \omega) + \iota_V (d\omega)$.

Définition 21.0.13. Si $V \in C^\infty(TM)$ est un champ de vecteur sur une variété M munit d'une forme volume μ_{vol} , sa divergence est la fonction $\text{div}V \in C^\infty(M)$ définie par

$$\mathcal{L}_V \mu_{vol} = (\text{div}V) \cdot \mu_{vol}$$

L'interprétation de $\text{div}V$ est donc que si $(\text{div}V)(x) > 0$ (respect < 0) an un point $x \in M$ alors les éléments de volume transportés par le champ de vecteur augmentent (respect. diminuent) en ce point. Si $\text{div}V = 0$ en tous points alors le flot généré par le champ de vecteur V préserve le volume : le flot est **incompressible**.

Remarque 21.0.14. Comme $d\mu_{vol} = 0$ (car μ_{vol} est une forme de degré maximal) alors d'après la formule de Cartan,

$$\mathcal{L}_V \mu_{vol} = (\text{div}V) \cdot \mu_{vol} = d(\iota_V \mu_{vol}) \tag{21.0.17}$$

Exemple : Sur \mathbb{R}^n avec la forme volume $\mu_{vol} = dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n$ si $V = \sum_j V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, montrer que

$$\text{div}V = \sum_j \frac{\partial V^j}{\partial x^j}$$

Proposition 21.0.15. *Si $f \in C^\infty(M)$ alors*

$$\operatorname{div}(fV) = f \operatorname{div}V + V(f) \tag{21.0.18}$$

Démonstration. (Taylor T1 ex.3,4 p.130) On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fV) \mu_{vol} &\stackrel{\text{Cartan}}{=} d(\iota_{fV} \mu_{vol}) = d(f \iota_V \mu_{vol}) \stackrel{\text{Stokes}}{=} df \wedge \iota_V \mu_{vol} + f d(\iota_V \mu_{vol}) \\ &= df \wedge \iota_V \mu_{vol} + f (\operatorname{div}V) \mu_{vol} \end{aligned}$$

Or si α est une k -forme

$$\iota_V(df \wedge \alpha) = (Vf) \alpha - df \wedge \iota_V \alpha$$

donc

$$df \wedge \iota_V \mu_{vol} = (Vf) \mu_{vol}$$

On déduit que $\operatorname{div}(fV) \mu_{vol} = (Vf) \mu_{vol} + f (\operatorname{div}V) \mu_{vol}$ donnant le résultat. □

21.0.4.2 Loi de conservation

On a tout d'abord :

Proposition 21.0.16. *Si $S \subset M$ est une hypersurface, c'est à dire une sous variété de $\dim S = n - 1$ qui est un bord, c'est à dire $S = \partial \mathcal{M}$ avec $\mathcal{M} \subset M$, la **formule de la divergence** sur \mathcal{M} s'écrit :*

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}V) \mu_{vol} \stackrel{(21.0.17)}{=} \int_{\mathcal{M}} d(\iota_V \mu_{vol}) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial \mathcal{M}} \iota_V \mu_{vol} = \int_S \iota_V \mu_{vol} \tag{21.0.19}$$

Qui signifie que l'intégrale de la divergence de V sur l'espace \mathcal{M} est égal au "flux" de V sur le bord $S = \partial \mathcal{M}$.

Proposition 21.0.17. *Supposons que V soit un champ de vecteur de **divergence nulle** :*

$$\operatorname{div}V = 0$$

*Soient $S_0 \subset M$ une hypersurface ($\dim S_0 = n - 1$). On définit la **charge totale** Q_0 sur S_0 par*

$$Q_0 := \int_{S_0} \iota_V \mu_{vol}$$

*Si S_1 est une autre sous variété telles qu'elles forment le bord d'un ensemble : $S_1 - S_0 = \partial M$ alors la **charge est conservée** :*

$$Q_1 = Q_0$$

*On appelle **densité de charge**, la $(n - 1)$ forme sur M :*

$$\rho := \iota_V \mu_{vol} \tag{21.0.20}$$

Ainsi la charge sur une hypersurface s'écrit $Q_S := \int_S \rho$

Remarque 21.0.18. Le résultat est valable si S_0, S_1 partent à l'infini où V s'annule. Par exemple dans l'espace temps, S_t peut être la sous variété de "type espace" à t fixée.

Démonstration. On a

$$Q_1 - Q_0 = \int_{S_1 - S_0} \iota_V \mu_{vol} = \int_{\partial M} \iota_V \mu_{vol} = \int_M d\iota_V \mu_{vol} = \int_M (\operatorname{div}V) \cdot \mu_{vol} = 0$$

□

21.0.4.3 Sur une variété Riemannienne

On suppose maintenant que (M, g) est une variété Riemannienne ou Lorentzienne. Rappelons qu'il y a alors une forme volume μ_{vol} bien défini (au signe près, et globalement défini que si la variété est orientable), voir @@, qui peut servir à définir la divergence d'un champ de vecteur d'après ci-dessus.

Exercice 21.0.19. Montrer que si (x^1, \dots, x^n) est un système de coordonnées sur (M, g) alors

$$\operatorname{div}V = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\sqrt{G} V^j)}{\partial x^j}$$

avec $G(x) := \det (g_{ij}(x))_{ij}$.

Rappelons que on note $\tilde{g} : T_x M \rightarrow T_x^* M$ l'isomorphisme au point $x \in M$ induit par la métrique g .

Définition 21.0.20. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction on définit son **gradient** comme étant le champ de vecteur :

$$\text{grad} f := \tilde{g}^{-1}(df) \in C^\infty(TM)$$

Proposition 21.0.21. Si $V \in C^\infty(TM)$ est un champ de vecteur et $J = \tilde{g}(V)$ la 1-forme associée alors

$$\text{div} V = -d^* J \quad (21.0.21)$$

et si M est compacte sans bord ($\partial M = \emptyset$) alors pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$,

$$\langle V, \text{grad} f \rangle_{L^2(TM)} = \langle -\text{div} V, f \rangle_{L^2(M)} = \int V(f) \mu_{vol} \quad (21.0.22)$$

autrement dit l'opérateur $\text{grad} : C_0^\infty(M) \rightarrow C_0^\infty(TM)$ est "l'adjoint formel" de $(-\text{div}) : C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(M)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \langle V, \text{grad} f \rangle_{L^2(TM)} &= \int \langle V, \text{grad} f \rangle_{T_x M} \mu_{vol} = \int \langle V, \tilde{g}^{-1}(df) \rangle_{T_x M} \mu_{vol} \quad (21.0.23) \\ &= \int \langle \tilde{g}(V), df \rangle_{T_x^* M} \mu_{vol} = \langle J, df \rangle_{L^2(\Lambda^1)} = \langle d^* J, f \rangle_{L^2(M)} \\ &= \int V(f) \mu_{vol} \end{aligned}$$

Par ailleurs avec (21.0.18)

$$\langle \text{div} V, f \rangle_{L^2(M)} = \int \text{div} V \cdot f \mu_{vol} = \int (\text{div}(fV) - V(f)) \mu_{vol}$$

Or si $\partial M = \emptyset$ le premier terme est nul car

$$\int_M \text{div}(fV) \mu_{vol} = \int_M d\iota_V \mu_{vol} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} \iota_V \mu_{vol} = 0$$

donc $\langle \text{div} V, f \rangle_{L^2(M)} = - \int V(f) \mu_{vol}$ et utilisant (21.0.23) :

$$\langle \text{div} V, f \rangle_{L^2(M)} = - \int V(f) \mu_{vol} = - \langle V, \text{grad} f \rangle_{L^2(TM)} = - \langle d^* J, f \rangle_{L^2(M)}$$

□

Remarque 21.0.22. Par exemple en électromagnétisme, on a $d^*J = 0$ avec $J \in C^\infty(\Lambda^1)$ qui est la densité de courant. Cela signifie d'après (21.0.21) que $V = \tilde{g}^{-1}(J)$ vérifie $\operatorname{div}V = 0$. Cela donne donc une loi de conservation pour la densité de charges associée.

Remarque 21.0.23. Si $S \subset M$ est une hypersurface, c'est à dire une sous variété de $\dim S = n - 1$. Alors (S, g_S) est Riemannienne pour la métrique de M restreinte à S . Il y a une forme volume associée sur S notée μ_S . On note $\nu \in C^\infty(S, TM)$ le champ de vecteur sur S , normal et unitaire.

On vérifie (dans une base orthonormée) que si $V \in C^\infty(TM)$ est un champ de vecteur sur M alors sur S la densité de charge (21.0.20) s'écrit :

$$\rho = \iota_V \mu_{vol} = \langle V, \nu \rangle \cdot \mu_S$$

Cela est utile pour exprimer la formule de la divergence (21.0.19) :

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}V) \mu_{vol} = \int_S \iota_V \mu_{vol} = \int_S \langle V, \nu \rangle \cdot \mu_{\partial M}$$

Qui signifie que l'intégrale de la divergence de V sur l'espace \mathcal{M} est égal au "flux" de V normal au bord $S = \partial\mathcal{M}$.

Chapitre 22

Géométrie symplectique et Mécanique Hamiltonienne

Références : [1][18] (dynamical systems vol 4).

Nous avons vu au chapitre 21 qu'une métrique Riemannienne g sur une variété M permet de définir la notion de distance, de volume, etc et que c'est une structure qui intervient pour formuler la théorie de l'électromagnétisme, les théories de Jauge, ou la relativité générale sur un espace temps M , mais aussi la théorie de l'élasticité [20].

Nous allons voir que la mécanique Hamiltonienne dans un espace de phase admet aussi une formulation géométrique (dont l'origine est probablement la mécanique quantique) et que cela a de nombreuses applications.

22.0.1 Introduction

22.0.1.1 Mécanique Hamiltonienne sur le plan \mathbb{R}^2

Equations de Hamilton : Considérons une particule qui évolue à une dimension avec une variable de **position** notée $q(t)$ et une variable d'**impulsion** $p(t)$ qui satisfont les **équations de mouvement de Hamilton :**

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\tag{22.0.1}$$

où

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

est la fonction Hamiltonien ¹.

1. semblerait il que la lettre H vienne de Huygens en fait

Passage de Newton à Hamilton : Rappelons que l'origine de ces équations de Hamilton (1833) du premier ordre est l'équation de mouvement de Newton (1687) du deuxième ordre :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = F(q)$$

avec une force $F(q)$ qui dérive d'un potentiel : $F(q) = -\frac{dV}{dq}$. Dans la théorie de Newton, on définit l'impulsion par $p = mv = m \frac{dq}{dt}$, ce qui donne bien la première équation de Hamilton $\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}$. L'équation de Newton s'écrit alors $\frac{dp}{dt} = F(q) = -\frac{dV}{dq} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ ce qui donne la deuxième équation de Hamilton.

Formulation géométrique des équation de Hamilton : Si on note \mathbb{R}^2 le plan des variables (q, p) appelé **espace de phase**, les équations de Hamilton ci-dessus s'interprètent comme l'expression d'un champ de vecteur :

$$V = \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p}$$

(voir Eq.(18.3.5) page 152).

Considérons la 2-forme suivante sur l'espace \mathbb{R}^2 :

$$\omega := dq \wedge dp$$

appelée **forme symplectique**.

Proposition 22.0.1. *Les équations de Hamilton (22.0.1) sont équivalentes à l'équation suivante :*

$$\omega(V, \cdot) = dH \tag{22.0.2}$$

*appelée **équation de mouvement de Hamilton**.*

Remarquer que cette équation est géométrique dans le sens où il n'intervient que des objets bien définis indépendants du système de coordonnées choisies sur l'espace de phase.

Démonstration. On calcule la différentielle

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq$$

par ailleurs comme $\omega = dq \otimes dp - dp \otimes dq$ on calcule

$$\omega(V, \cdot) = \dot{q} dp - \dot{p} dq$$

ainsi on observe que (22.0.1) est juste l'expression de l'équation $\omega(V, \cdot) = dH$ dans la base (dq, dp) (par égalité des composantes). \square

Exercice 22.0.2. Montrer que en coordonnées polaires (r, θ) , puis en coordonnées (A, θ) avec $A := \pi r^2$, la forme symplectique s'écrit :

$$\omega = dq \wedge dp = r dr \wedge d\theta = \frac{1}{2\pi} dA \wedge d\theta \quad (22.0.3)$$

et que l'équation de Hamilton (22.0.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{A} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial A} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

Démonstration. Pour la première question, voir (20.2.11). Ensuite on écrit

$$V = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

alors $\omega(V, \cdot) = r\dot{r}d\theta - r\dot{\theta}dr$ et $dH = \frac{\partial H}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial H}{\partial r}dr$. En identifiant les coordonnées, on obtient la solution. De même en coordonnées (A, θ) . \square

Définition 22.0.3. Sur l'espace de phase \mathbb{R}^2 avec la forme symplectique ω , un système de coordonnées (x^1, x^2) est dit de **variables canoniques** si la forme symplectique ω s'écrit :

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2$$

et alors l'équation de Hamilton s'écrit dans ces coordonnées

$$\dot{x}^1 = \frac{\partial H}{\partial x^2}, \quad \dot{x}^2 = -\frac{\partial H}{\partial x^1}$$

Par exemple d'après (22.0.3), les coordonnées (q, p) et $(\frac{1}{2\pi}A, \theta)$ sont canoniques. Les coordonnées (r, θ) ne le sont pas.

Remarque : Les coordonnées canoniques en géométrie symplectique sont un peu l'équivalent des coordonnées Euclidiennes en géométrie Riemannienne dans lesquels la métrique s'écrit simplement $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \dots$. Voir Remarque 18.5.1 page 167. La grosse différence est que nous avons vu que des coordonnées Euclidiennes n'existent que si l'espace (M, g) est plat (courbure nulle) alors que nous verrons que des coordonnées canoniques existent toujours (c'est le théorème de Darboux).

22.0.1.2 Mécanique Hamiltonienne sur la sphère S^2

On considère un moment angulaire $\vec{J}(t) \in \mathbb{R}^3$ et $H(\vec{J})$ son énergie appelées fonction de Hamilton ou Hamiltonien.

L'équation de mouvement de $\vec{J}(t)$ appelée **équation de Bloch** s'écrit :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{J}} \wedge \vec{J}$$

où $\frac{\partial H}{\partial \vec{J}} = \left(\frac{\partial H}{\partial J_x}, \frac{\partial H}{\partial J_y}, \frac{\partial H}{\partial J_z} \right)$ est le gradient de H et \wedge signifie ici le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

Remarquons tout de suite² que la norme $\|\vec{J}(t)\|$ est conservée au cours du temps. Par conséquent $\vec{J} \in S^2$ évolue sur une sphère de dimension 2.

Exemples physiques :

1. Le cas d'un spin dans un champ magnétique externe $\vec{B}(t)$ (qui peut être variable). Dans ce cas $H(\vec{J}) = C\vec{J} \cdot \vec{B}(t)$. Si le champ \vec{B} est constant, on déduit immédiatement des équations de Bloch que le mouvement de \vec{J} est un cercle qui précesse autour de l'axe de \vec{B} .
2. Cas d'un corps rigide (libre dans l'espace ou en chute libre) de tenseur d'inertie (I_x, I_y, I_z) supposé diagonal dans une base (x, y, z) attachée à l'objet. Alors la fonction de Hamilton qui décrit le mouvement de son moment angulaire est $H(\vec{J}) = \frac{J_x^2}{I_x} + \frac{J_y^2}{I_y} + \frac{J_z^2}{I_z}$. Voir [1][18].

Sur la sphère S^2 du moment angulaire, on introduit la 2 forme d'angle solide qui en coordonnées sphériques s'écrit

$$\omega = \sin \theta d\varphi \wedge d\theta \tag{22.0.4}$$

Proposition 22.0.4. *Les équation de Bloch s'écrivent de façon géométrique sur la sphère S^2 sous forme Hamiltonienne :*

$$\omega(V, \cdot) = dH$$

Démonstration. On pourrait partir des équations de Bloch en coordonnées cartésiennes (J_x, J_y, J_z) et les convertir en coordonnées polaires. Plus rapidement, on peut observer que la 2 forme ω s'exprime dans \mathbb{R}^3 par (si $\vec{J} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, et $\vec{U}_1, \vec{U}_2 \in \mathbb{R}^3$ sont des vecteurs), au point $\vec{J} \in S^2$:

$$\omega_{\vec{J}}(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = (\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) \cdot \vec{J}$$

2. En effet $\frac{d\|\vec{J}\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{J} \cdot \vec{J})}{dt} = 2\vec{J} \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} = 2\vec{J} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{J}} \wedge \vec{J} \right) = 0$.

(qui est bien antisymétrique et donne l'aire dans le plan orthogonal au vecteur \vec{J}). Donc³

$$\begin{aligned}\omega_{\vec{J}}\left(\frac{d\vec{J}}{dt}, \vec{U}\right) &= \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \wedge \vec{U}\right) \cdot \vec{J} = (\vec{U} \wedge \vec{J}) \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} \\ &= (\vec{U} \wedge \vec{J}) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{J}} \wedge \vec{J}\right) = (dH)_{/S^2}(\vec{U})\end{aligned}$$

car $(\vec{U} \wedge \vec{J})$ est la composante tangentielle (sur la sphère S^2) du vecteur \vec{U} . □

Exercice 22.0.5. Montrer que $q := \cos \theta$, $p := \varphi$ sont des coordonnées canoniques sur la sphère (sur la carte où elles sont définies), c'est à dire que $\omega = dq \wedge dp$ et que les équation de Bloch s'écrivent :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Démonstration. $dq \wedge dp = d(\cos \theta) \wedge d\varphi = -\sin \theta d\theta \wedge d\varphi = \omega$ d'après (22.0.4), et d'après la définition 22.0.3 (q, p) sont des coordonnées canoniques. Attention ce système de coordonnées exclu les pôles $\theta = 0, \pi$ et la ligne $\varphi = 0, 2\pi$. Il faut utiliser d'autres cartes. □

22.0.2 Forme symplectique sur une variété et équations de Hamilton

Définition 22.0.6. Une forme symplectique sur une variété M de dimension $2n$ est une 2 forme $\omega \in C^\infty(\Lambda^2)$ telle que en tout point $x \in M$, ω_x est non dégénérée (ainsi $(T_x M, \omega_x)$ est un espace vectoriel symplectique) et ω est fermée ($d\omega = 0$).

Définition 22.0.7. A toute fonction $H \in C^\infty(M)$ appelée **Hamiltonien ou Energie**, on associe une **champ de vecteur Hamiltonien** $V_H \in C^\infty(TM)$ défini par

$$\omega(V_H, \cdot) = dH \quad \Leftrightarrow \quad V_H = \tilde{\omega}^{-1}(dH)$$

Le flot ϕ_t engendré par V_H est appelé **flot Hamiltonien**.

Remarque : La fonction $H(t)$ peut dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 22.0.8. Si H est indépendant du temps alors le flot Hamiltonien conserve l'énergie :

$$V_H(H) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H(\phi_t(x)) = H(x), \quad \forall x, t$$

3. On rappelle la formule du produit mixte $(a \wedge b) \cdot c = [a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$

Démonstration. $V_H(H) = dH(V_H) = \omega(V_H, V_H) = 0.$ □

Définition 22.0.9. La forme **volume symplectique** est la $(2n)$ forme $\mu_\omega \in C^\infty(\Lambda^{2n})$ définie par

$$\mu_\omega = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$$

Dans une base canonique, $\mu_\omega = dq_1 \wedge dp_1 \wedge dq_2 \wedge dp_2 \dots \wedge dq_n \wedge dp_n.$

Théorème 22.0.10. “de Liouville”. *Le flot Hamiltonien préserve la forme symplectique ω et donc préserve le volume symplectique μ_ω :*

$$\mathcal{L}_{V_H}\omega = 0, \quad \mathcal{L}_{V_H}\mu_\omega = 0$$

définir la dérivée de Lie \mathcal{L} @@

Démonstration. D’après la formule de Cartan

$$\mathcal{L}_{V_H}\omega = \underbrace{\iota_{V_H} \left(\underbrace{d\omega}_{=0} \right)}_{=0} + d(\iota_{V_H}\omega) = d(dH) = 0$$

□

Remarquer que l’hypothèse $d\omega = 0$ fermée est essentielle dans le théorème de Liouville.