Troisième partie

Groupes de matrices et représentations

Dans ce chapitre on parle de théorie des groupes, plus particulièrement des **groupes de matrice** aussi appelés **groupes classiques**.

Cette théorie est très utilisée en physique, particulièrement en mécanique quantique.

Référence : on recommande [3, 4, 26, 27].

Définition 11.0.17. Un **groupe** G est un ensemble d'éléments $g \in G$ munit d'une loi interne

$$\begin{cases} G \times G & \to G \\ (g_1, g_2) & \to g_1.g_2 \end{cases}$$

telle que :

1. la loi est **associative**

$$(g_1.g_2).g_3 = g_1.(g_2.g_3), \qquad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

2. Il y a un élément neutre noté $e \in G$ tel que

$$g.e = e.g = g, \quad \forall g \in G$$

3. Pour chaque élément $g \in G$ il y a un élément appelé **inverse**, noté $g^{-1} \in G$:

$$g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$$

Le groupe G est appelé **abélien** ou **commutatif** si de plus

$$g_1.g_2 = g_2.g_1, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Exemples très connus :

— l'ensemble des entiers $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ avec l'addition $+$ est un groupe commutatif. L'élément neutre est 0. (De même $\mathbb{R}, +$ est un groupe).

— Les réels non nuls $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ avec la multiplication $\times$ est un groupe commutatif. L'élement neutre est 1.

Exemple : le groupe S_n des permutations : Soit

$$S_n := \{\text{permutation } \sigma \text{de } n \text{ éléments}\}$$

L'ensemble S_n a $n!$ éléments. Il possède un nombre fini d'éléments. On dit que c'est un **groupe fini**. La composition de deux permutations est une permutation $\sigma_2 \circ \sigma_1 \in S_n$, et on vérifie que avec cette loi interne S_n est un groupe. L'élément neutre est l'identité. Le groupe S_n est non commutatif si $n \geq 3$.

Exercice 11.0.18. pour le groupe S_3, dessiner les 6 permutations, calculer leur inverse, et montrer que le groupe est non commutatif. Calculer la table de la loi du groupe.

Solution : voir figure. On a

$$D = t_{12}t_{23}, \qquad L = t_{23}t_{12}$$

donc $t_{12}t_{23} \neq t_{23}t_{12}$. Le groupe est non commutatif. L'identité est $e = I$. On a $t_{23}.t_{23} = I$ donc $(t_{23})^{-1} = t_{23}$.

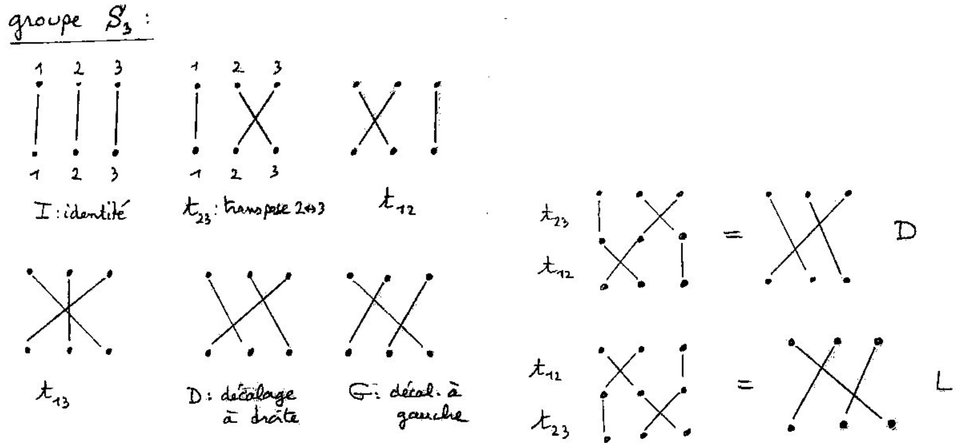


Table du groupe qui représente le résultat de $B.A$:

	I	t_{12}	t_{23}	t_{13}	D	L
I	I	t_{12}	t_{23}	t_{13}	D	L
t_{12}	t_{12}	I	D	L	t_{23}	t_{13}
t_{23}	t_{23}	L	I	D	t_{13}	t_{12}
t_{13}	t_{13}	D	L	I	t_{12}	t_{23}
D	D	t_{13}	t_{12}	t_{23}	L	I
L	L	t_{23}	t_{13}	t_{12}	I	D

Exercice 11.0.19. Trouver 6 matrices 3×3 qui forment un groupe noté $\mathcal{P}_3$ qui a les même relations que le groupe S_3. Montrant que les groupes $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{S}_3$ sont isomorphes (définition ci-dessous).

Solution : en associant les 3 indices $1, 2, 3$ aux trois entrées de la matrice, on devine aisément que :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

par exemple $\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23} = \mathbf{D}$, etc. Précisément, à chaque élement de $p \in S_3$ on associe une matrice $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_3$:

$$\phi : p \in S_3 \to \mathbf{P} \in \mathcal{P}_3$$

de la façon suivante : $\mathbf{P}_i^j = 1$ si et seulement si $j = p(i)$, cad $\mathbf{P}_i^j = \delta_{j,p(i)}$. La fonction ϕ est bijective et préserve la loi de groupe :

$$\phi(p_2 p_1) = \phi(p_2)\,\phi(p_1)$$

(en effet si $\mathbf{P}_1 = \phi(p_1)$, $\mathbf{P}_2 = \phi(p_2)$, $\mathbf{P}_3 = \phi(p_2 p_1)$ alors $(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)_i^k = \sum_l (\mathbf{P}_2)_l^k (\mathbf{P}_1)_i^l = \sum_l \delta_{k,p_2(l)}\delta_{l,p_1(i)} = \delta_{k,p_2(p_1(i))} = (\mathbf{P}_3)_i^k$).

Définition 11.0.20. Deux groupes G et G' sont **isomorphes** si il existe une bijection $\phi : G \to G'$ préservant la loi du groupe :

$$\phi(g_2 g_1) = \phi(g_2)\,\phi(g_1)\,, \qquad \forall g_1, g_2 \in G$$

On dit que $\phi : G \to G'$ est un **isomorphisme de groupe**. On écrit : $G' \cong G'$.

Exemple simple, les nombres complexes de module 1. Soit

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\} \tag{11.0.4}$$

(appelé groupe unitaire sur $\mathbb{C}$). Un nombre $z \in U(1)$ s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le produit est $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ et l'inverse est $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{i(-\theta)}$, donc $U(1)$ est un groupe pour le produit. Il y a un nombre infini d'éléments dans $U(1)$, mais les éléments sont paramétrés par une coordonnée réelle $\theta \in \mathbb{R}$. En tant qu'espace topologique, $U(1)$ est le cercle unité, c'est un espace de dimension 1 (une variété différentiable de dimension 1, d'après la définition page **??**).

Dans la suite on va s'intéresser aux groupes qui sont des variétés différentiables de dimension N, c'est à dire des espaces qui localement ressemblent à $\mathbb{R}^N$ où un élément est repéré par N coordonnées (voir définition précise page **??**).

Définition 11.0.21. Un **groupe de Lie** G de dimension N est une variété différentiable avec une loi de groupe telle que la loi produit $G \times G \to G$ et la loi inverse $g \in G \to g^{-1} \in G$ sont différentiables.

Par exemple le groupe $U(1)$ est une variété de dimension 1. Avec la coordonnée $\theta \in \mathbb{R}$ la loi produit est $\theta_1, \theta_2 \to (\theta_1 + \theta_2)$ qui est C^∞ par rapport à chaque variable, et de même l'inverse $\theta \to (-\theta)$ est C^∞. Donc $U(1)$ est un groupe de Lie de dimension 1.

Chapitre 12

Les groupes classiques de matrices

Dans cette section nous présentons les groupes de matrices en toute généralité. Nous étudierons plus en détails certains de ces groupes dans la section suivante (SO(2), SO(3), $SL_2(\mathbb{R})$ etc..)

12.0.1 Le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$

Si E est un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension n, les **applications linéaires inversible** (cad bijectives) :

$$GL(E) := \{A : E \to E, \quad \text{bijective}\}$$

forment un groupe pour la composition. L'élément neutre est l'identité $e = I_E$.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, une application $A \in GL(E)$ est représentée par une matrice $\mathbf{A}$ inversible ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$). Voir page 62.

La composition de $A \circ B$ est représenté par le produit des matrices $\mathbf{AB}$.

Par rapport à cette base, le groupe $GL(E)$ est identifié à l'ensemble :

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{\text{matrice } \mathbf{A},\ n \times n \text{ inversible } (det(\mathbf{A}) \neq 0)\}$$

qui est un groupe pour le produit de matrice. Avec l'application $\phi_e : A \in GL(E) \to \mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R})$ (qui dépend de la base choisie) les groupes $GL(E)$ et $GL(n, \mathbb{R})$ sont isomorphes.

Exercice 12.0.1. Avec une autre base f on aurait un autre isomorphisme ϕ_f, la même application A serait décrite par une autre matrice $\mathbf{A}' = \phi_f(A)$. Montrer qu'il existe $\mathbf{P} \in GL(n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}' = \phi_f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

et interpréter $\mathbf{P}$.

Solution : d'après (10.0.3) page 89, $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ où $\mathbf{P} = \left(P_i^j\right)$ est la matrice de passage entre les bases définie par $f_i = \sum_j P_i^j e_j$.

De même pour un espace vectoriel complexe on définit :

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{\text{matrice complexe } \mathbf{A},\ n \times n \text{ inversible } (det(\mathbf{A}) \neq 0)\}$$

Remarques

— GL signifie “General Linear”.

— Les groupes $GL(E)$ et $GL(n,\mathbb{R})$ sont des espaces de dimension réelle n^2 (au sens variété) :
$$dim\left(GL(n,\mathbb{R})\right)=n^2 \tag{12.0.1}$$
En effet les n^2 éléments de matrice sont un système de coordonnées sur $GL(n,\mathbb{R})$. Ce ne sont pas des espaces vectoriels, car par exemple $0\notin GL(n,\mathbb{R})$.

— Une matrice $\mathbf{A}\in GL(n,\mathbb{R})$ peut s’écrire[1] $\mathbf{A}=e^{\mathbf{G}}$ avec $\mathbf{G}\in M_n$ matrice $n\times n$.

— Si $n\geq 2$, le groupe $GL(E)$ n’est pas commutatif. En effet par exemple :
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}\\ \neq\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

12.0.2 Le groupe spécial linéaire $SL(n,\mathbb{R})$

Se rappeller de la définition du déterminant $Det(A)$ d’un endomorphisme donnée en Eq.(7.0.5) page 62.

On définit :
$$SL(E):=\{A\in GL(E)\,,\qquad Det(A)=1\}$$
Si $A,B\in SL(E)$ alors $Det(AB)=Det(A)\,Det(B)=1$ donc $AB\in SL(E)$, donc $SL(E)$ est un groupe (sous groupe de $GL(E)$) appelé **groupe spécial linéaire**.

Par rapport à une base, un endomorphisme est représenté par une matrice, et on définit
$$SL(n,\mathbb{R}):=\{\mathbf{A}\in GL(n,\mathbb{R})\,,\qquad Det(\mathbf{A})=1\}$$
Comme $Det(A)=1$ rajoute une condition, on a d’après (12.0.1)
$$dim\left(SL(E)\right)=n^2-1$$
Avec une métrique sur l’espace vectoriel E on peut considérer des sous groupes de $GL(E)$ et $SL(E)$:

12.0.3 Les groupe orthogonal $O(n)\,,SO(n)$

Si (E,g) est un espace Euclidien (déf page 67), soit
$$O(E):=\{A\in GL(E)\,,\qquad A\text{ orthogonale}\}$$
On rappelle que A orthogonale signifie que $g(Au,Av)=g(u,v)$. Alors si $A,B\in O(E)$ on a $g(ABu,ABv)=g(Bu,Bv)=g(u,v)$ donc $AB\in O(E)$. On a aussi $A^{-1}\in O(E)$. Donc

1. On définit $e^{\mathbf{G}}=1+\mathbf{G}+\frac{1}{2}\mathbf{G}^2+\ldots=\sum_{n\geq0}\frac{1}{n!}\mathbf{G}^n$ qui est une série convergente car $\left\|\frac{1}{n!}\mathbf{G}^n\right\|\leq\frac{1}{n!}\left\|\mathbf{G}\right\|^n$.

$O(E)$ est un groupe appelé **groupe orthogonal**. Par rapport à une base orthonormée, A est représenté par une matrice vérifiant $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$ (voir page 67). On définit

$$O(n) := \left\{ \mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \right\}$$

Propriété : si $A \in O(E)$ alors $Det(A) = \pm 1$.
En effet, $Det\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = Det(\mathbf{A})$ donc

$$1 = Det(I) = Det\left(AA^{-1}\right) = Det\left(AA^{\mathrm{T}}\right) = Det(A)^2$$

Ainsi il y a un sous groupe appelé **groupe spécial orthogonal :**

$$SO(E) := \{A \in GL(E), \qquad A \text{ orthogonale et } Det(A) = 1\}$$

$$SO(n) := \left\{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \qquad \mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1} \text{ et } Det(\mathbf{A}) = 1\right\}$$

On a

$$dim(O(E)) = dim(SO(E)) = \frac{n(n-1)}{2} \tag{12.0.2}$$

(preuve : montrer que $A = e^G$ et $A^+ = A^{-1} \Leftrightarrow G^+ = -G$. Donc G est antisymétrique. Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments de matrices indépendants sur le triangle supérieur de la matrice $\mathbf{G}$)

12.0.4 Les groupe unitaire $U(n), SU(n)$

Si (E, h) est un espace vectoriel complexe Hermitien,

$$U(E) := \{A \in GL(E), \qquad A \text{ unitaire}\}$$

$$U(n) := \left\{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{C}), \quad \mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1}\right\}$$

Cela implique que $Det(\mathbf{A}) = e^{i\theta} \in U(1)$. En effet,

$$1 = Det(I) = Det\left(AA^{-1}\right) = Det\left(AA^{+}\right) = |Det(A)|^2$$

Il y a un sous groupe appelé **groupe spécial unitaire** :

$$SU(E) := \{A \in GL(E), \qquad A \text{ unitaire et } Det(A) = 1\}$$

$$SU(n) := \left\{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{C}), \quad \mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1}, \quad Det(\mathbf{A}) = 1\right\}$$

On a

$$dim(U(n)) = n^2$$
$$dim(SU(n)) = n^2 - 1 \tag{12.0.3}$$

preuve : $A = e^G$, on a $A^+ = A^{-1} \Leftrightarrow G^+ = -G$. Donc G est anti-Hermitienne. Il y a n éléments imaginaires purs sur la diagonale et $\frac{n(n-1)}{2}$ complexes sur le triangle supérieur. Au total $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$ paramètres réels indépendants. La condition $Det(A) = 1$ rajoute une contrainte.

12.0.5 Le groupe symplectique $Sp(2n, \mathbb{R})$

Si (E, ω) est un espace linéaire symplectique (voir déf. page 79) on pose :

$$Sp(E) := \{A \in GL(E), \quad A \text{ symplectique linéaire}\}$$

(qui forme un groupe car si $A, B \in Sp(E)$, $\omega(ABu, ABv) = \omega(Bu, Bv) = \omega(u, v)$ donc $(AB) \in Sp(E)$). Ce groupe est isomorphe au groupe de matrice suivant, d'après proposition 9.4.6 page 83,

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \quad -\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\right\}$$

Chapitre 13

Le groupe $SO(2)$

Par définition,

$$O(2) := \{matrices\, R,\ 2\times 2 \text{ orthogonale }\}$$

appelé **groupe orthogonal** sur $\mathbb{R}^2$.

$$SO(2) := \{matrices\, R,\ 2\times 2 \text{ orthogonale et } Det(R) = 1\}$$

appelé **groupe spécial orthogonal** sur $\mathbb{R}^2$.

Rappels :

- D'après la définition 9.1.5, une matrice orthogonale R est la représentation dans une base orthonormée, d'une application linéaire $A : E \to E$ dans un espace euclidien (E, g) de dimension 2, préservant le produit scalaire : $g(Au, Av) = g(u, v)$.
- D'après (9.1.8) une matrice orthogonale vérifie

  $$R^+ = R^{-1}$$

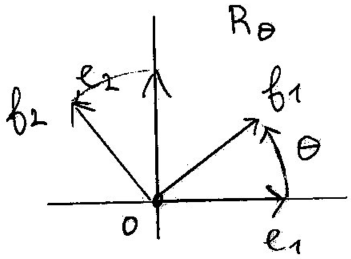
  (où R^+ est la transposée).

Remarques

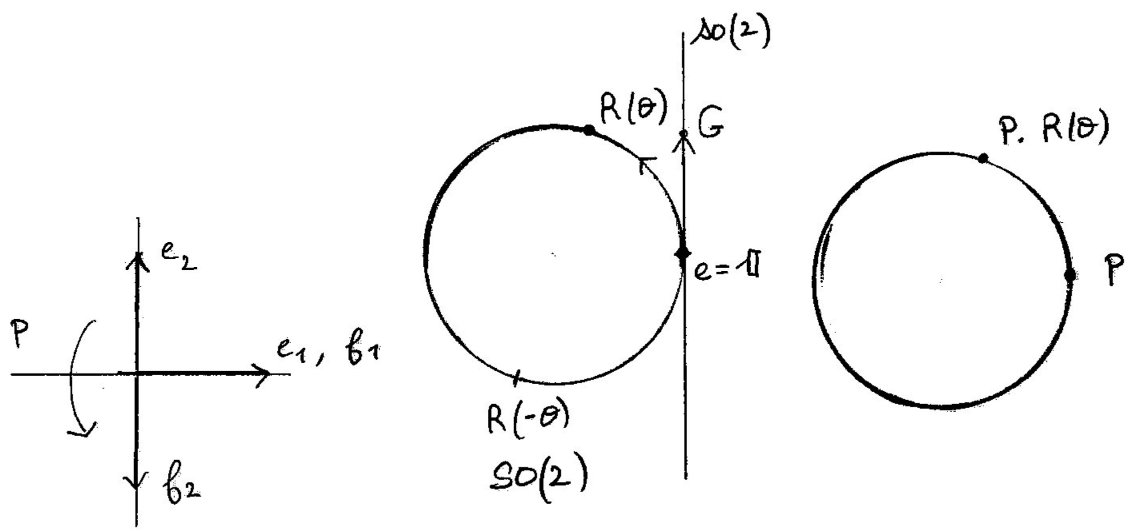
- Comme un changement de base orthonormé dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui préserve l'orientation est une rotation, une matrice $R \in SO(2)$ s'écrit

  $$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[\tag{13.0.1}$$

  son inverse est $R(-\theta)$. On a $R(\theta_1) R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. Le groupe $SO(2)$ est donc un groupe de Lie commutatif de dimension 1. Il est homeomorphe au cercle (coordonnée $\theta \in [0, 2\pi[$).



— Considérons l'application $\phi : R\,(\theta) \in SO\,(2) \to e^{i\theta} \in U\,(1)$ entre le groupe $SO\,(2)$ et le groupe $U\,(1)$ défini page 99. ϕ est un isomorphisme de groupe. Les groupes $SO\,(2)$ et U(1) sont isomorphes.
— La matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$Det\,(P) = -1$ donc P change l'orientation, $P \in O\,(2)$ mais $P \notin SO\,(2)$. Les matrices de $O\,(2)$ sont de la forme $R\,(\theta) \in SO\,(2)$ ou $P.R\,(\theta)$. Le groupe $O\,(2)$ est donc l'union de 2 cercles.



Proposition 13.0.1. *Un élément $R(\theta) \in SO(2)$ s'écrit*

$$R(\theta) = e^{G_\theta} = \sum_{n \geq 0} \frac{G_\theta^n}{n!}$$

avec

$$G_\theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{13.0.2}$$

*On dit que G_θ est un **générateur**. On note*

$$so(2) := \{\textit{matrices } G_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

*c'est un espace vectoriel de dimension 1, appelé **algèbre de Lie** du groupe $SO(2)$.*

On verra la définition d'une algèbre de Lie page 114.

Démonstration. Remarquer que $R^+ = R^{-1} \Leftrightarrow e^{G^+} = e^{-G} \Leftrightarrow G^+ = -G$, cad G doit être antisymétrique, donc de la forme (13.0.2). Il reste à montrer que c'est précisément la matrice (13.0.1). Soit $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $G^2 = -I$, $G^3 = -G$, $G^4 = I$, etc. On déduit que

$$\begin{aligned} e^{G_\theta} &= e^{\theta G} = \sum_{n \geq 0} \frac{\theta^n}{n!} G^n = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots\right) I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) G \qquad (13.0.3) \\ &= \cos\theta\, I + \sin\theta\, G \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \end{aligned}$$

□

Remarque

- en physique quantique, le générateur L appelé **moment angulaire** est plutôt défini par la relation
$$R(\theta) = e^{-i\theta L}$$
(ou même $R(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta L}$ dans les unités physiques). C'est à dire $G = -iL$. L'intérêt du facteur i est que $L^+ = -iG^+ = iG = L$, c'est à dire L est symétrique.
- D'après $R(\theta) = e^{\theta G}$ on déduit que
$$G = \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=0}$$
l'interprétation est que G est un vecteur tangent au groupe $SO(2)$ dans l'espace tangent à l'identité ($\theta = 0$). Voir page 147 la définition de l'espace tangent.

Chapitre 14

Le groupe $SO\,(3)$

rappelons la définition :

Définition 14.0.1. Le groupe $SO\,(3)$ est l'ensemble des matrices de rotation R dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (transformations orthogonales de déterminant 1), $R^+ = R^{-1}$ et $Det\,(R) = 1$.

14.0.1 Système de coordonnées sur $SO\,(3)$

Soit $R \in SO\,(3)$ qui est une rotation dans $\mathbb{R}^3$. On note $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{u}| = 1$, la direction de l'axe de rotation, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ l'angle de rotation autour de cet axe. Notons

$$\vec{U} = \theta\vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

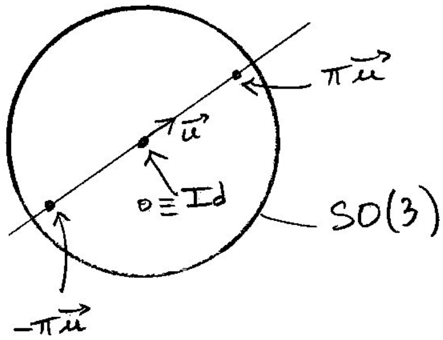
qui est un vecteur de norme $\left|\vec{U}\right| = |\theta| \leq \pi$, appartenant donc à la boule $B \subset \mathbb{R}^3$ de centre 0 et rayon π. On notera

$$R_{\vec{U}} = R_{\theta,\vec{u}}$$

la rotation correspondante. Clairement, $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$ caractérise une rotation de façon unique, tant que $|\theta| < \pi$. C'est un système de coordonnées sur $SO\,(3)$. Par contre si $|\theta| = \pi$, on a

$$R_{-\pi,\vec{u}} = R_{\pi,\vec{u}}$$

donc les points opposés sur la surface de la boule $\mathcal{B}$ correspondent à la même rotation.

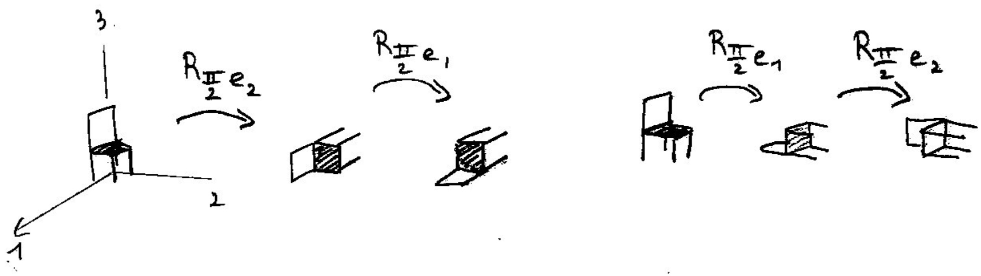


Remarques

— L'inverse de $R_{\vec{U}}$ est $R_{\vec{U}}^{-1} = R_{-\vec{U}}$.

— $SO(3)$ est un groupe non commutatif car par exemple (si les vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$ sont notés e_1, e_2, e_3) :

$$R_{\frac{\pi}{2}e_1} R_{\frac{\pi}{2}e_2} \neq R_{\frac{\pi}{2}e_2} R_{\frac{\pi}{2}e_1}$$



14.0.1.1 Topologie de $SO(3)$

$SO(3)$ est un groupe de Lie de dimension 3 non commutatif (voir p. 102). Plus précisement c'est un espace **compact connexe sans bord**. (**connexe** signifie que deux points peuvent être rejoints par une courbe).

Un espace est dit **simplement connexe**[1] si toute courbe fermée peut être déformée continuement en un point (on dit qu'elle est **contractible**).

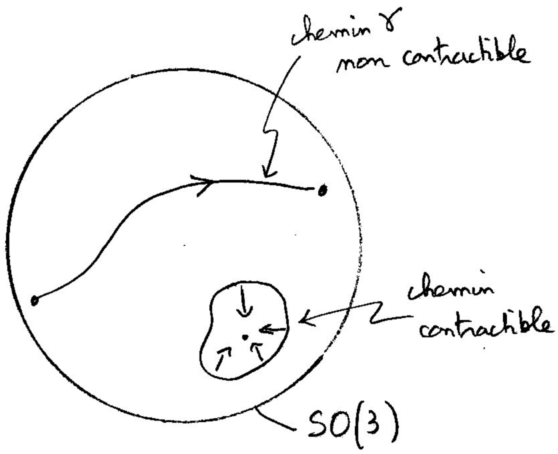
1. Par exemple le plan $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe. La sphère S^2 est simplement connexe. Le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ n'est pas simplement connexe car une courbe fermée faisant $n \in \mathbb{Z}$ tours ne peut être contractée en un point. Le nombre n de tours est un invariant topologique. Si on concatène une courbe fermée faisant n_1 tours avec une courbe faisant n_2 tours, le résultat fait $n_1 + n_2$ tours. L'ensemble des courbes fermées forme un groupe appelé **groupe de Poincaré** qui dans le cas du cylindre est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

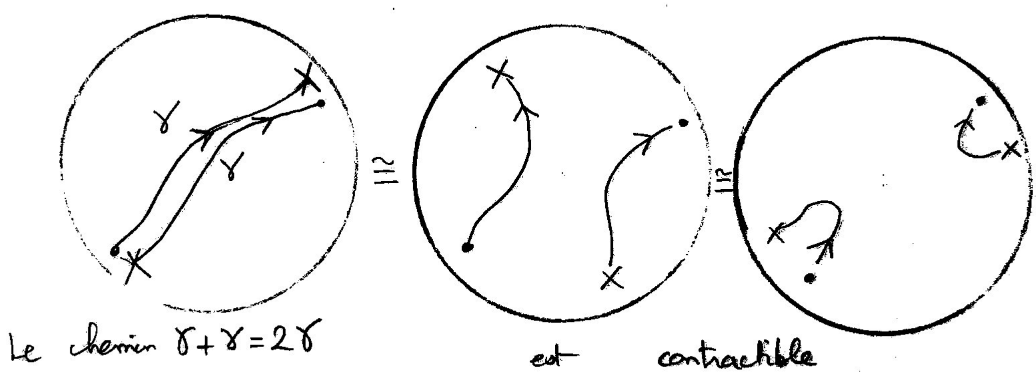
Proposition 14.0.2. *L'espace $SO\,(3)$ n'est pas simplement connexe. Son* ***groupe de Poincaré*** *est*

$$\pi_1\,(SO\,(3)) = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$

Avec la loi d'addition $1+1=0$. Autrement dit à déformation près il y a deux type de courbes fermées dans $SO\,(3)$.

Démonstration. Considérons une courbe fermée γ non contractible. Par exemple celle de la figure. Soit $\gamma' = \gamma + \gamma$. Par déformation on remarque que γ' est contractible. □





Remarque 14.0.3. Une expérience simple met en évidence le fait que $\pi_1\,(SO\,(3)) = \{0,1\}$. Voir figure.

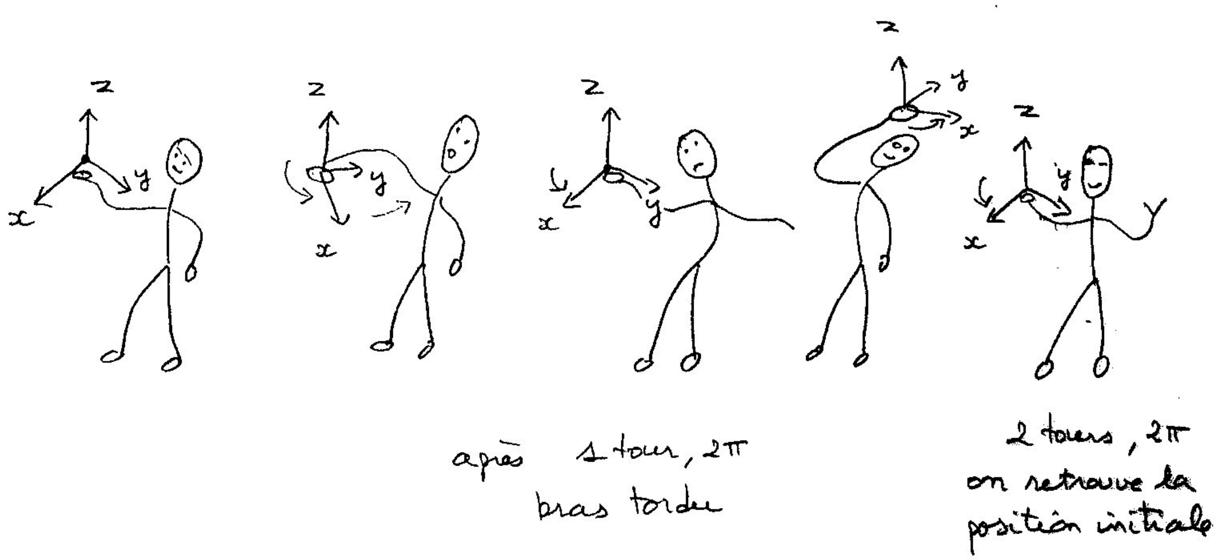


FIGURE 14.0.1 – L'orientation de l'objet au bout du bras représente une rotation $R \in SO(3)$. On part de $R = I$, et on parcourt un chemin γ dans $SO(3)$. Le bras (attaché à l'épaule) représente ce chemin. Après une rotation, le bras est tordu, ce qui traduit que le chemin est non contractible dans $SO(3)$. Après deux tours, le bras se détord, car le chemin est contractible dans $SO(3)$.

14.0.2 Algèbre de Lie de $SO(3)$

Proposition 14.0.4. *Un élément $R_{\vec{U}} \in SO(3)$ s'écrit*

$$R_{\vec{U}} = e^{G_{\vec{U}}} \tag{14.0.1}$$

*avec $G_{\vec{U}}^T = -G_{\vec{U}}$ donc le **générateur** est de la forme :*

$$G_{\vec{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \in \mathbb{R}^3 \tag{14.0.2}$$

Cette matrice représente le produit vectoriel :

$$G_{\vec{U}}\left(\vec{V}\right) = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \in \mathbb{R}^3 \tag{14.0.3}$$

On note l'espace des générateurs :

$$so(3) := \left\{G_{\vec{U}}, \vec{U} \in \mathbb{R}^3\right\} = \{G^+ = -G : \textit{matrice antisym.}\} \tag{14.0.4}$$

*qui est un espace vectoriel réel de dimension 3, appelé **algèbre de Lie** du groupe $SO(3)$.*

Démonstration. Posons $R_{\vec{U}} = e^{G_{\vec{U}}}$. Alors la relation $R_{\vec{U}}^{\mathrm{T}} = R_{\vec{U}}^{-1} \Leftrightarrow e^{G_{\vec{U}}^T} = e^{-G_{\vec{U}}} \Leftrightarrow G_{\vec{U}}^T = -G_{\vec{U}}$. $G_{\vec{U}}$ est donc une matrice antisymétrique de la forme (14.0.2). On a

$$G_{\vec{U}}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{pmatrix} = \vec{U} \wedge \vec{V}$$

Il reste à montrer que $e^{G_{\vec{U}}}$ est précisément la rotation de θ autour de l'axe $\vec{u}$. Prenons le cas $\vec{u} = (0, 0,1)$ c'est à dire une rotation autour de l'axe z. Alors

$$G_{\vec{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'après le calcul (13.0.3), on obtient

$$e^{G_{\vec{U}}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{\vec{U}}$$

(@@ reste à justifier le cas général). □

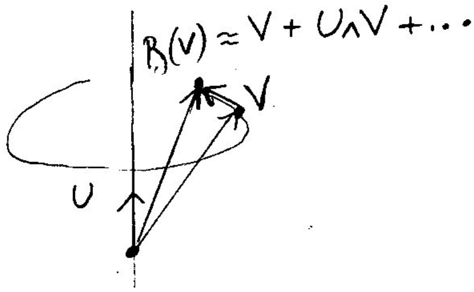
Remarques

— On a $e^{G_{\vec{U}}} = I$ ssi $\theta = 0$ modulo 2π.

— Pour $U \ll 1$ (petits angles, rotation proche de l'identité), on a

$$R_{\vec{U}}\left(\vec{V}\right) = e^{\vec{U}\wedge\cdot}\left(\vec{V}\right) = \vec{U} + \vec{U}\wedge\vec{V} + \vec{U}\wedge\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right) + \dots$$

les premiers termes sont l'expression attendu, voir figure.



— L'expression (14.0.3) est analogue à l'expression $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$ du moment angulaire, générateur des rotations. @@ détailler @@

Proposition 14.0.5. ***Formules très générales pour les groupes de Lie :*** *Pour tous $G_{\vec{U}}, G_{\vec{V}} \in so(3)$ on a*

$$[G_{\vec{U}}, G_{\vec{V}}] \in so(3)$$

Pour $\vec{U}, \vec{V} \ll 1$ (très petits angles) on a

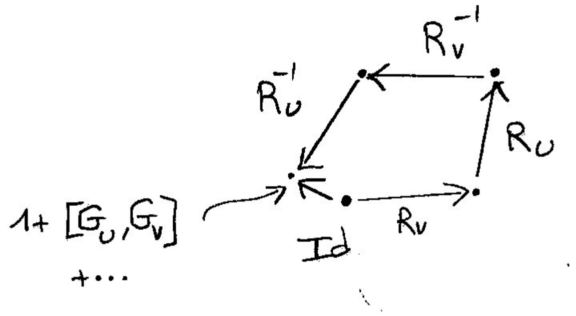
$$R_{\vec{U}}^{-1} R_{\vec{V}}^{-1} R_{\vec{U}} R_{\vec{V}} = 1 + [G_{\vec{U}}, G_{\vec{V}}] + \mathcal{O}\left((U,V)^3\right) \tag{14.0.5}$$

qui montre que la non commutativité du groupe est reliée à la non commutativité des générateurs.
Particulièrement pour le groupe *$SO(3)$ on a :*

$$[G_{\vec{U}}, G_{\vec{V}}] = G_{\vec{U}\wedge\vec{V}} \tag{14.0.6}$$

et en prenant les vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$ cela donne :

$$[G_x, G_y] = G_z, \quad etc$$



Démonstration. Supposons $G_U, G_V \in so(3)$, donc $G_U^+ = -G_U$, et $G_V^+ = -G_V$. Soit $G_3 = [G_U, G_V] = G_U G_V - G_V G_U$. On a

$$\begin{aligned} G_3^+ &= (G_U G_V - G_V G_U)^+ = G_V^+ G_U^+ - G_U^+ G_V^+ \\ &= G_V G_U - G_U G_V = -G_3 \end{aligned}$$

donc $G_3 \in so(3)$.

Pour les petits angles, au deuxième ordre $e^{G_U} \simeq 1 + G_U + \frac{1}{2}G_U^2$ donc

$$\begin{aligned} R_{\vec{U}}^{-1} R_{\vec{V}}^{-1} R_{\vec{U}} R_{\vec{V}} &\simeq \left(1 - G_U + \frac{1}{2}G_U^2\right)\left(1 - G_V + \frac{1}{2}G_V^2\right)\left(1 + G_U + \frac{1}{2}G_U^2\right)\left(1 + G_V + \frac{1}{2}G_V^2\right) \\ &\simeq 1 + G_U G_V - G_V G_U = 1 + [G_U, G_V] \end{aligned}$$

Pour montrer (14.0.6), on utilise (14.0.3) et la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} [G_{\vec{U}}, G_{\vec{V}}]\left(\vec{W}\right) &= \vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) - \vec{V} \wedge \left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) \\ &= \left(\vec{U}.\vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{U}.\vec{V}\right)\vec{W} - \left(\vec{V}.\vec{W}\right)\vec{U} + \left(\vec{V}.\vec{U}\right)\vec{W} \\ &= \left(\vec{U}.\vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{V}.\vec{W}\right)\vec{U} \\ &= \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = G_{\vec{U}\wedge\vec{V}}\left(\vec{W}\right) \end{aligned}$$

□

Remarques

— Avec les **conventions de la mécanique quantique,** on écrit $R = e^{-iL}$, soit

$$G = -iL \tag{14.0.7}$$

En particulier pour la rotation autour de l'axe x d'un angle θ, $\vec{U} = \theta\vec{u}$ avec $\vec{u} = (1, 0, 0)$, on note $G_{\vec{U}} = -i\theta L_x$, etc, et on a

$$[L_x, L_y] = iL_z, \quad etc$$

Voici la définition générale d'une Algèbre de Lie :

Définition 14.0.6. Une **algèbre de Lie** de dimension n est une algèbre (cad espace vectoriel de dim n avec un produit interne $\times$ distributif, etc...) telle que

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \qquad \text{: relation de Jacobi} \tag{14.0.8}$$

et

$$a \times b = -b \times a \qquad \text{: antisymétrique} \tag{14.0.9}$$

Proposition 14.0.7. *L'espace des générateurs $so(3)$, (14.0.4) est une algèbre de Lie de dimension 3 pour le produit interne :*

$$A \times B := [A, B]$$

Démonstration. Il faut vérifier d'abord que $A, B \to [A, B]$ est bien un produti interne (distributivité $[A + B, C] = [A, C]+[B, C]$,etc) et ensuite les relations particulières (14.0.8) et (14.0.9).

On a facilement $[B, A] = BA - AB = -[A, B]$ et avec plus de calculs la relation de Jacobi :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \ldots = 0$$

□

Remarques

- la proposition 14.0.7 est vraie en général : les générateurs d'un groupe de Lie de dimension n forme une algèbre de Lie de dimension n avec la loi de commutation (et inversement).
- Mais attention des groupes différents peuvent avoir la même algèbre de Lie (ex : $SO(3)$ et $SU(2)$, voir plus loin).
- Cette relation entre groupe et algèbre permet de travailler sur l'algèbre de Lie (les générateurs) plutot que sur les éléments du groupe. En particulier cela a permit une classification des groupes de Lie (théorie de Cartan) et cela est aussi utile en théorie des représentations, voir page 124.

Chapitre 15

Le groupe $SU(2)$

Rappel :

Définition 15.0.1. Le groupe $SU(2)$ est le groupe des matrices complexes 2×2 unitaires $M^{+} = M^{-1}$, et de déterminant $Det(M) = 1$ cad qui préservent la métrique hermitienne de $\mathbb{C}^2$:

$$h(Mu, Mv) = h(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^2$$

$$Det(M) = 1$$

On pense à $M \in SU(2)$ comme un changement de base o.n. dans $\mathbb{C}^2$.

15.0.1 Système de coordonnées sur $SU(2)$ et topologie

Proposition 15.0.2. *Une matrice $M \in SU(2)$ s'écrit*

$$M = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{15.0.1}$$

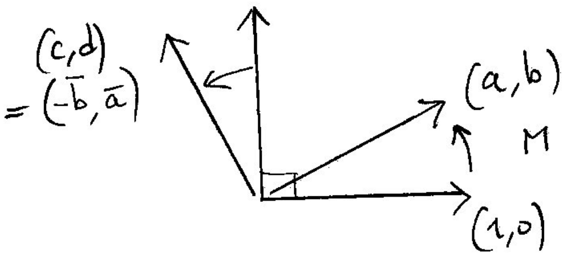
Posant $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$ cela donne :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

qui est l'équation de la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Donc

$$SU(2) \equiv S^3$$

est homéomorphe à S^3.



Démonstration. Soit $M=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Pour que $M\in SU(2)$, il faut que les vecteurs $M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ forment une base o.n. donc

$$|a|^2+|b|^2=1,\qquad |c|^2+|d|^2=1,\qquad \overline{a}c+\overline{b}d=0$$

De plus on demande

$$Det(M)=ad-bc=1$$

Donc $c=-\frac{\overline{b}d}{\overline{a}}$ et

$$d=\frac{1+bc}{a}=\frac{1-|b|^2\frac{d}{\overline{a}}}{a}=\frac{1}{a}-\frac{|b|^2}{|a|^2}d$$

donc

$$d\left(1+\frac{|b|^2}{|a|^2}\right)=\frac{1}{a}\Leftrightarrow d=\overline{a},\quad c=-\overline{b}$$

□

Remarques :

— Contrairement aux groupes $SO(2)$ et $SO(3)$ (pour lesquels $\pi_1(SO(2))=\mathbb{Z}$, $\pi_1(SO(3))=\mathbb{Z}_2$) le groupe $SU(2)$ est simplement connexe. $\pi_1(SU(2))=\{0\}$.

— On verra un autre système de coordonnées $\vec{u},\theta$ en Eq.(15.0.3) semblable aux coordonnées sur $SO(3)$, avec $|\vec{u}|=1$ mais avec

$$\theta\in[-2\pi,2\pi]$$

et tel que $M_{\pm2\pi,\vec{u}}=-I$

Proposition 15.0.3. *Un élément $M \in SU(2)$ s'écrit*

$$M = e^{\tilde{G}}$$

*avec $\tilde{G}^+ = -\tilde{G}$ (car $M^+ = M^{-1}$) et $Tr\left(\tilde{G}\right) = 0$ (car $Det(M) = 1$). Le **générateur** $\tilde{G}$ est donc de la forme*

$$\tilde{G}_U = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} U_z & U_x - iU_y \\ U_x + iU_y & U_z \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}(U_x\sigma_x + U_y\sigma_y + U_z\sigma_z) = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\vec{U} \qquad (15.0.2)$$

avec

$$\vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \in \mathbb{R}^3$$

et

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{:matrices de Pauli}$$

Posant

$$\vec{U} = \theta\vec{u}, \quad |\vec{u}| = 1,$$

On a

$$M_{\vec{u},\theta} = e^{\tilde{G}_{\vec{u},\theta}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (\vec{\sigma}.\vec{u})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (15.0.3)$$

donc dans (15.0.1) :

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + iu_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad b = (iu_x - u_y)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

L'espace des générateurs

$$su(2) := \left\{\tilde{G}, \quad \tilde{G}^+ = -\tilde{G}, \quad Tr\left(\tilde{G}\right) = 0\right\}$$

*est l'**algèbre de Lie du groupe** $SU(2)$, de dimension 3 ($su(2) \equiv \mathbb{R}^3$). On a les relations*

$$\left[\tilde{G}_{\vec{U}}, \tilde{G}_{\vec{V}}\right] = \tilde{G}_{\vec{U}\wedge\vec{V}} \qquad (15.0.4)$$

donc

$$su(2) \equiv so(3) \qquad (15.0.5)$$

(algèbres isomorphes).

Remarques

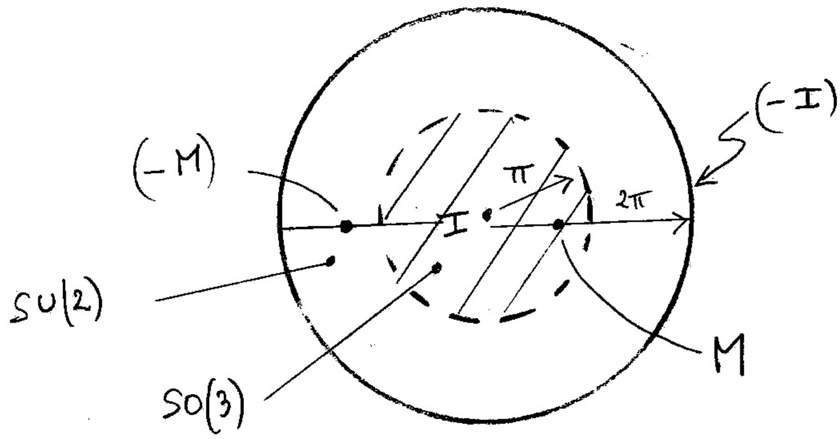
— Avec la paramétrisation $\vec{U} = \theta\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ de Eq.(15.0.3) on a

$$M_{\theta+2\pi,\vec{u}} = -M_{\theta,\vec{u}}, \quad \forall\vec{u},\theta \tag{15.0.6}$$

et en particulier pour $\theta = 2\pi$ on a

$$M_{2\pi,\vec{u}} = -I$$

donc le groupe $SU(2)$ est identifié à la boule B de rayon 2π, cad $|\theta| \leq 2\pi$, et tous les points de la surface de cette boule ($\theta = \pm 2\pi$) correspondent au seul élément $(-I) \in SU(2)$. Cela confirme [1] que $SU(2) \equiv S^3$.



— En mécanique quantique on note plûtot $M = e^{-iS}$ cad le générateur $\tilde{G} = -iS$ avec S, "**moment angulaire de spin**". Ainsi $\tilde{G}^+ = -\tilde{G} \Leftrightarrow S = S^+$ est hermitien. Plus précisément, $S_{\vec{u}} = i\tilde{G}_{\vec{u}} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}$ est "l'observable de spin selon l'axe $\vec{u}$".

Démonstration. Les matrices de Pauli sont Hermitiennes et forment une base des matrices Hermitiennes 2×2 de Trace nulle. Pour $k = x, y, z$ on a $\sigma_k^2 = I$ et $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_x\sigma_y$ etc, donc si $|\vec{u}| = 1$ alors

$$(\vec{\sigma}.\vec{u})^2 = I$$

Alors

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}.\vec{u})^n &= I \text{ si } n \text{ pair} \\ &= \vec{\sigma}.\vec{u} \text{ si } n \text{ impair}\end{aligned}$$

1. En effet plus généralement la sphère S^n de dimension n est une boule de dimension n où tous les points de la surface sont identifiés. Prendre l'exemple du cercle S^1 qui est le segment $[-1, 1]$ avec $-1 \equiv 1$, ou de la sphère S^2 qui est le disque D^2 avec le cercle périphérique identifié en un point.

Donc

$$
\begin{aligned}
e^{\tilde{G}_U} &= e^{-\frac{i}{2}\theta\vec{u}.\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I + i\left(\vec{\sigma}.\vec{u}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + iu_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \left(iu_x + u_y\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \left(iu_x - u_y\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - iu_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalement, on vérifie que

$$
[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \Leftrightarrow \left[-\frac{i}{2}\sigma_x, -\frac{i}{2}\sigma_y\right] = -\frac{i}{2}\sigma_z
$$

donnant (15.0.4). Notons $j = 1,2,3 = x,y,z$ et $3 = 1 \wedge 2$ etc. Alors

$$
\begin{aligned}
\left[\tilde{G}_U, \tilde{G}_V\right] &= \sum_{i,j}\left[U_i\left(-\frac{1}{2}\sigma_i\right), V_j\left(-\frac{1}{2}\sigma_j\right)\right] = \sum_{i,j} U_i V_j \left(\left(-\frac{i}{2}\sigma_{i\wedge j}\right)\right) \\
&= \sum_k (U \wedge V)_k \left(-\frac{i}{2}\right)\sigma_k = \tilde{G}_{U\wedge V}
\end{aligned}
$$

□

Exercice. Les quaternions (Hamilton 1834, généralisation des nombres complexes).
Par définition un quaternion est

$$
q = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k
$$

avec $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ et des “objets” i, j, k tels que

$$
i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1
$$

Montrer que cela implique

$$
ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k \neq ij
$$

(algèbre non commutative). On définit la norme

$$
\|q\| := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2
$$

et le conjugué

$$
\overline{q} := x_1 1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k
$$

Montrer que les quaternions unitaires ($\|q\| = 1$) forment un groupe isomorphe au groupe $SU(2)$.

Chapitre 16

Relation entre les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

Ce sont tous les deux des groupes de Lie de dimension 3. On a déjà vu en (15.0.5) que leur algèbre de Lie sont isomorphes.

Cela implique que près de l'identité la structure des groupes sont équivalentes, car comme suggéré par (14.0.5), la structure du groupe près de l'identité est déterminée par l'algèbre de Lie des générateurs.

Par contre on a vu que la topologie des espaces $SO(3)$ et $SU(2)$ sont différentes. On a obtenu explicitement une paramétrisation d'une rotation par

$$R_{\theta,\vec{u}} \in SO(3), \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^3, |\vec{u}| = 1, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ modulo } 2\pi$$

et d'une matrice de $SU(2)$

$$M_{\theta,\vec{u}} \in SU(2), \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^3, |\vec{u}| = 1, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ modulo } 4\pi$$

Cela suggère une application notée Ad (appelée **représentation adjointe**) :

$$Ad: \quad M_{\theta,\vec{u}} \in SU(2) \to R_{\theta,\vec{u}} \in SO(3) \tag{16.0.1}$$

On a clairement

$$Ad(M_{\theta+2\pi,\vec{u}}) = R_{\theta+2\pi,\vec{u}} = R_{\theta,\vec{u}} = Ad(M_{\theta,\vec{u}})$$

alors que on a vu en (15.0.6)

$$M_{\theta+2\pi,\vec{u}} = -M_{\theta,\vec{u}} \neq M_{\theta,\vec{u}}$$

.

Dans cette section on va montrer que cette application $Ad : SU(2) \to SO(3)$ est un homomorphisme de groupe (non bijectif), c'est à dire qu'il vérifie

$$Ad(M_2.M_1) = Ad(M_2)\, Ad(M_1)$$

(@@ trouver preuve directe @@).

Proposition 16.0.1. *Pour $M \in SU(2)$, on définit l'application*

$$Ad(M) : \begin{cases} su(2) & \rightarrow su(2) \\ \tilde{G} & \rightarrow M\tilde{G}M^{-1} \end{cases} \quad (16.0.2)$$

appelée ***représentation Adjointe*** *(de $SU(2)$ sur son algèbre de Lie). Or $su(2) \equiv \mathbb{R}^3$ sont identifiés d'après le paramétrage (15.0.2) :*

$$\tilde{G}_V \in su(2) \Leftrightarrow V \in \mathbb{R}^3$$

$su(2)$ possède de plus un produit scalaire Euclidien (ou une norme) appelée ***métrique de Killing***

$$\left\|\tilde{G}_V\right\|^2 := 4Tr\left(\tilde{G}_V^+\tilde{G}_V\right) = \|V\|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (16.0.3)$$

qui est préservée par $Ad(M)$. Par conséquent $Ad(M) \in SO(3)$ est une rotation. L'application

$$Ad : \quad M \in SU(2) \rightarrow R_M := Ad(M) \in SO(3)$$

est un homomorphisme de groupe, c'est à dire que

$$Ad(M_2.M_1) = Ad(M_2)\,Ad(M_1), \qquad \forall M_1, M_2 \in SU(2) \quad (16.0.4)$$

surjective mais de degré $2:1$, c'est à dire que $R_M \in SO(3)$ a deux antécédents :

$$Ad(M) = Ad(-M)$$

Démonstration. Vérifions que si $M \in SU(2)$ et $\tilde{G} \in su(2)$ alors $\tilde{G}' = M\tilde{G}M^{-1} \in su(2)$. Pour cela

$$\tilde{G}^+ = \left(M^{-1}\right)^+ \tilde{G}^+ M^+ = -M\tilde{G}M^{-1} = -\tilde{G}'$$

et $Tr\left(\tilde{G}'\right) = Tr\left(\tilde{G}\right) = 0$. Donc $\tilde{G}' \in su(2)$ d'après la Proposition 15.0.3.

Vérifions (16.0.3). Si $\tilde{G}_V = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\vec{V}$ d'après (15.0.2), on a

$$\begin{aligned} 4Tr\left(\tilde{G}_V^+\tilde{G}_V\right) &= Tr\left(\sum_{i,j} V_iV_j\sigma_i\sigma_j\right) = \sum_{i,j} V_iV_j \underbrace{Tr\left(\sigma_i\sigma_j\right)}_{\delta_{i,j}} \\ &= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \end{aligned}$$

Alors si $\tilde{G}_{V'} = Ad(M)\,\tilde{G}_V$

$$\left\|\tilde{G}_{V'}\right\|^2 = 4Tr\left(\tilde{G}_{V'}^+\tilde{G}_{V'}\right) = 4Tr\left(M\tilde{G}_V^+M^{-1}M\tilde{G}_VM^{-1}\right) = 4Tr\left(\tilde{G}_V^+\tilde{G}_V\right) = \left\|\tilde{G}_V\right\|$$

donc $Ad(M)$ est bien une transformation orthogonale sur $su(2) \equiv \mathbb{R}^3$. C'est une rotation comme $Ad(M)$ est connexe à I. Vérifions (16.0.4) :

$$\begin{aligned} Ad(M_2M_1)\tilde{G} &= (M_2M_1)\tilde{G}(M_2M_1)^{-1} = M_2M_1\tilde{G}M_1^{-1}M_2^{-1} \\ &= Ad(M_2)\left(Ad(M_1)\tilde{G}\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$Ad(-M)\tilde{G} = (-M)\tilde{G}\left(-M^{-1}\right) = Ad(M)\tilde{G}$$

□

Exercice : Afin de vérifier que l'application Ad définit par (16.0.2) est aussi celle définit par (16.0.1). Il suffit de le vérifier dans le cas simple de l'axe z, $\vec{u} = (0,0,1)$:

$$M_\theta := \exp\left(-\frac{i}{2}\theta\sigma_z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 4\pi]$$

(θ est défini modulo 4π). Vérifier explicitement que la rotation associée est

$$R_\theta = Ad(M_\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$M_{\theta+2\pi} = -M_\theta$$

alors que

$$R_{\theta+2\pi} = R_\theta$$

Autrement dit dans R_θ, θ est défini modulo 2π.

Solution : Si $\tilde{G}_U = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} U_z & U_x - iU_y \\ U_x + iU_y & U_z \end{pmatrix}$ alors on calcule le produit

$$\begin{aligned} Ad(M_\theta)\left(\tilde{G}_U\right) &= M_\theta\tilde{G}M_\theta^{-1} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} U_z & \overline{C} \\ C & U_z \end{pmatrix} \\ &\quad \text{avec} \quad C = (U_x + iU_y)e^{i\theta} = (U_x\cos\theta - U_y\sin\theta) + i(U_x\sin\theta + U_y\cos\theta) \\ &= \tilde{G}_{U'} \end{aligned}$$

avec

$$U' = R_\theta(U)$$

donc $R_\theta \equiv Ad(M_\theta)$.

Exercice : Relation entre spineur et vecteur spatial. Une matrice $M \in SU(2)$ agit sur l'espace Hermitien $\mathbb{C}^2$. Soit un vecteur $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ appelé **spineur** (ou **état quantique de spin**).

Une matrice de rotation $R \in SO(3)$ agit sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit $V = (V_x, V_y, V_z) \in \mathbb{R}^3$ appelé un "vecteur spatial".

De même que on a trouvé une relation (homomorphisme $Ad : M_{\vec{u},\theta} \to R_{\vec{u},\theta}$), on cherche à expliciter une application $s \in \mathbb{C}^2 \to V \in \mathbb{R}^3$ qui permettrait d'attribuer une direction spatiale à un spin.

1. Dans le cas d'une rotation autour de l'axe z,$\vec{u}_z = (0, 0, 1)$, montrer que le vecteur normalisé $s_0 = (1, 0)$ ("spin up") est invariant par $M_{\vec{u}_z,\theta}$, vecteur propre du générateur $\tilde{G}_{\vec{u}_z,\theta} \in su(2)$ et que le vecteur normalisé $V_0 = (0, 0, 1)$ est invariant par la rotation $R_{\vec{u}_z,\theta}$ et vecteur propre du générateur $G_{\vec{u}_z,\theta} \in so(3)$.
2. On applique une transformation quelconque. Soient

$$s_{\vec{u},\theta} := M_{\vec{u},\theta} s_0 \in \mathbb{C}^2, \qquad V_{\vec{u},\theta} = R_{\vec{u},\theta} V_0 \in \mathbb{R}^3$$

Montrer que $V_{\vec{u},\theta}$ et $s_{\vec{u},\theta}$ sont normalisés. Le vecteur $V_{\vec{u},\theta}$ correspond à la direction spatiale du spin $s_{\vec{u},\theta}$. Voir [13] chapitre sur le Spin 1/2, pour montrer que $V_{\vec{u},\theta}$ s'obtient à partir de $s_{\vec{u},\theta}$ par la projection stéréographique (ce qui revient à identifier $\mathbb{P}^1$ à S^2). On montre aussi que $s_{\vec{u},\theta} \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$, que $V_{\vec{u},\theta} \in S^2$ et que la correspondance $s_{\vec{u},\theta} \in S^3 \to V_{\vec{u},\theta} \in S^2$ est la fibration de Hopf ($S^3 \equiv SU(2)$ et $S^2 \equiv SU(2)/U(1)$).

Remarque :

— Comme le suggère la preuve ci-dessus. La construction ci-dessus est très générale aux groupes de Lie. Un groupe de Lie admet une représentation adjointe sur son algèbre de Lie. Son algèbre de Lie possède une métrique de Killing qui est préservée par la représentation adjointe. On montre que cette métrique est définie positive ssi le groupe est compact.

— On a montré que le groupe $SU(2)$ est un double recouvrement du groupe $SO(3)$. Plus généralement le double recouvrement du groupe de rotation $SO(n)$ s'appelle le groupe $Spin(n)$ (utilisé en géométrie et en physique). On a donc montré que $Spin(2) \equiv SU(2)$ (équivalence "accidentelle"). En relativité on utilise le groupe $Spin(3, 1)$ qui est un double recouvrement du groupe $SO(3, 1)$ de Lorentz. Dans ce cas on montre l'équivalence "accidentelle" : $Spin(3, 1) = SL(2, \mathbb{C})$. Attention en général $Spin(n)$ n'est pas simplement connexe, ce n'est donc pas cela qui fait sa spécificité, mais plutot la construction via "l'algèbre de clifford".

Chapitre 17

Représentation de groupe

17.0.1 Introduction

Commençons par un exemple qui illustre l'intérêt de la notion de représentation en physique.

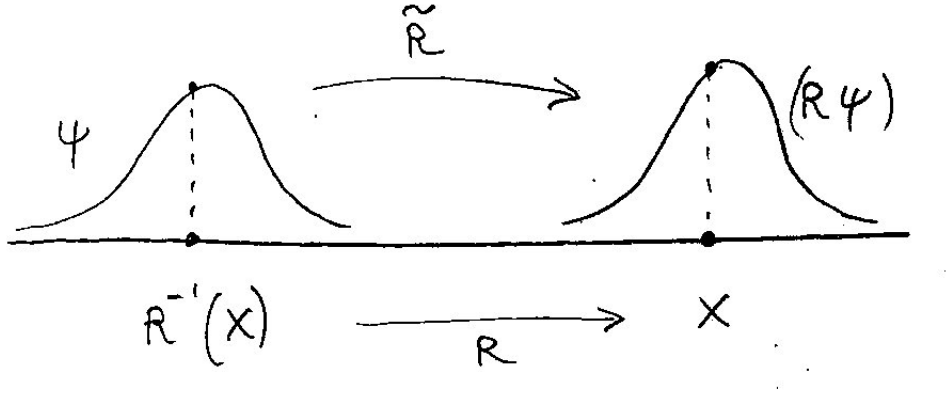
Une rotation $R \in SO(3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ a pour effet de tranformer les points de $\mathbb{R}^3$. Si un système physique est représenté par un point $X \in \mathbb{R}^3$ (par exemple une particule ponctuelle), il est transformé tout simplement par la formule

$$X' = R(X) \in \mathbb{R}^3 \tag{17.0.1}$$

Mais le système peut être d'une autre nature. Par exemple en mécanique ondulatoire (acoustique, mécanique quantique,...) on considère des fonctions $\psi(X)$ sur l'espace $X \in \mathbb{R}^3$. Une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ appartient à un espace vectoriel de dimension infini. Soit $\psi' = \tilde{R}\psi$ la fonction transformée par la rotation. On se convainc rapidement que ψ' est donné par la formule explicite :

$$\psi'(X) = \left(\tilde{R}\psi\right)(X) = \psi\left(R^{-1}X\right) \Leftrightarrow \tilde{R}\psi = \psi \circ R^{-1} \tag{17.0.2}$$

voir figure.



Dans cet exemple, on peut exprimer les générateurs. En coordonnées sphériques $\psi(r,\theta,\varphi)$, pour une rotation d'un angle φ_0 autour de l'axe z, on a

$$\left(\tilde{R}_{\varphi_0,\vec{u}_z}\psi\right)(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\varphi-\varphi_0) = \left(\exp\left(-\varphi_0\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi\right)(r,\theta,\varphi)$$

donc $\tilde{G}_z = -\frac{\partial}{\partial\varphi}$. En mécanique quantique on note $\tilde{G}_z = -iL_z$ soit $L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Pour une rotation plus générale, $\tilde{R}_{\vec{u},\alpha} = \exp\left(\tilde{G}_{\vec{u},\alpha}\right)$ on a $\tilde{G}_{\vec{u},\alpha} = -i\alpha\vec{L}.\vec{u}$ avec

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}, \qquad \vec{p} = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y}, -i\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\vec{\nabla}$$

Ainsi on a besoin d'étudier l'action des rotations dans l'espace des fonctions qui est un espace de dimension infinie. On dit que c'est une **représentation** du groupe des rotations.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ un vecteur V_0 peut être transformé en n'importe quel autre vecteur de même longueur par une rotation (on obtient une sphère S^2). Une question importante est de savoir si il y a une propriété analogue dans l'espace des fonctions (on dit que c'est espace est irréductible), ou si au contraire l'espace des fonctions est réductible en sous espaces qui sont irréductibles. La notion d'espaces irreductibles et la décomposition en espaces irréductibles est fondamentales en physique, en particulier en mécanique quantique [1].

Rappelons aussi que en mécanique quantique, si un système (une particule ou un degré de liberté) est décrit par un vecteur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et un autre dans $\mathcal{H}_2$ alors le système total est décrit par un vecteur dans $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. Il sera donc important de chercher à décomposer des produit tensoriels de représentations. (Voir Theorème de Clebsh-Gordan).

Dans le cadre de ce cours on va établir des résultats pour des espaces vectoriels de dimension finie.

17.0.2 Représentation

Définition 17.0.1. Une **représentation** d'un groupe G sur un espace vectoriel E de dimension n est une application

$$\pi : G \to End(E)$$

telle que

$$\pi(e) = I$$
$$\pi(g_1.g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \forall g_1, g_2 \in G \tag{17.0.3}$$

1. Le groupe de Poincaré des transformations de l'espace temps est considéré comme reflétant les symétries fondamentales de la physique. Wigner a montré que les représentations irréductibles de ce groupe sont paramétrées par des indices s'identifiant à la masse m et au spin j. Dans un énoncé "moderne" de la physique, on définit une "particule élémentaire" comme étant une représentation irréductible du groupe de Poincaré. L'interprétation est que aucune expérience ne peut permettre de décomposer plus cette "particule" car la représentation est irréductible donc semble former un seul objet.

Exemples :

— Vérifions que $R \in SO(3) \to \pi(R) \in End(E)$ avec $E = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $\pi(R)\psi := \psi \circ R^{-1}$, $\psi \in E$ défini par (17.0.2) est une représentation du groupe $SO(3)$. On a $\pi(Id_{SO3})\psi = \psi$ donc
$$\pi(I_{SO3}) = I_E$$
et
$$(\pi(R_1)\pi(R_2)\psi)(X) = \psi\left(R_2^{-1}R_1^{-1}(X)\right) = \psi\left((R_1R_2)^{-1}(X)\right) = (\pi(R_1R_2)\psi)(X)$$
donc en effet
$$\pi(R_1)\pi(R_2) = \pi(R_1R_2)$$

— La transformation $R \in SO(3) \to R \in End(\mathbb{R}^3)$ qui sert de définition du groupe $SO(3)$ est une représentation, appelée **représentation fondamentale.**

— La représentation adjointe d'un groupe de Lie sur son algèbre de Lie est une représentation, d'après (16.0.4).

Définition 17.0.2. Une représentation $\pi : G \to End(E)$ est **irréductible** si il n'y pas pas de sous espace $F \subset E$ invariant par $\pi(g), \forall g$ (autres que $F = \{0\}$ et $F = E$).

— Par exemple la représentation fondamentale de $SO(3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$ est irréductible.

— Par contre si on considère les rotation autour de l'axe z seulement, formant une représentation du groupe $SO(2)$ dans $E = \mathbb{R}^3$ on observe que E est réductible en la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2_{x,y} \oplus \mathbb{R}_z$ (le plan x, y et l'axe z).

En mécanique quantique l'espace des fonctions est un espace de Hilbert avec une métrique Hermitienne. On s'intéresse aux représentation unitaires :

Définition 17.0.3. Une représentation $\pi : G \to End(E)$ sur un espace (E, h) Hermitien est **unitaire** si $\pi(g)$ est un opérateur unitaire pour tout $g \in G$ (i.e. $\pi(g)^+ = \pi(g)^{-1}$).

Le Lemme suivant est très utile.

Proposition 17.0.4. ***Lemme de Schur.*** *Une représentation unitaire $\pi : G \to End(E)$ est irréductible si et seulement si pour tout $A \in End(E)$*
$$\pi(g)A = A\pi(g), \ \forall g \in G \Rightarrow A = \lambda I, \ \lambda \in \mathbb{C}$$
c'est à dire que la seule application linéaire qui commute avec toutes les transformations $\pi(g)$ est une transformation multiple de l'identité.

Démonstration. (voir Preuve dans Segal [26]). (Sens $\Rightarrow$). Supposons π irréductible, $A \in End(E)$ et $\pi(g)A = A\pi(g)$, $\forall g \in G$. Alors en multipliant par $\pi(g)^{-1}$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} \pi(g)^{-1}A & = & A\pi(g)^{-1}, \ \forall g \in G \\ \Leftrightarrow \quad \pi(g)^{+}A & = & A\pi(g)^{+}, \ \forall g \in G \\ \Leftrightarrow \quad [\pi(g), A^{+}] & = & 0 \end{array}$$

Donc

$$\left[\pi(g), A + A^{+}\right] = 0 \text{ et } \left[\pi(g), i\left(A - A^{+}\right)\right] = 0$$

Comme $A + A^{+}$ et $i(A - A^{+})$sont Hermitiens on peut supposer $A^{+} = A$ dans la suite. On déduit que pour tout polynome P on a

$$[P(A), \pi(g)] = 0$$

et donc cela est vrai pour toute fonction $f(A)$. Si P_λ désigne le projecteur spectral sur un espace propre de A de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut exprimer P_λ comme une fonction de A en effet on a

$$P_\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{i(A-\lambda)t}$$

donc

$$[P_\lambda, \pi(g)] = 0, \forall g$$

On déduit que $F = Im(P_\lambda)$ est un espace invariant. D'après l'hypothèse $F = E$ ou $F = \{0\}$ (pas possible) ce qui signifie que $P_\lambda = I$ donc $A = \lambda I$.

(Sens $\Leftarrow$) : Si $F \subset V$ est invariant et $P : E \to F$ désigne le projecteur orthogonal associé alors $[P, \pi(g)] = 0, \forall g$ donc $P = \lambda I = I$ (ou 0) donc $F = E$ ou $\{0\}$. □

Proposition 17.0.5. *Une représentation d'un groupe de Lie $\pi : G \to End(E)$ induit une représentation de son algèbre de Lie :*

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{G} & \to End(E) \\ G & \to \pi(G) \end{cases}$$

cad vérifiant

$$\pi([G_1, G_2]) = [\pi(G_1), \pi(G_2)]$$

Démonstration. @@ simplifier ?@@ Soit $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Et $g_1 = e^{xG_1} \in G$ $g_2 = e^{xG_2}$. Pour $x \ll 1$ on a d'après (14.0.5)

$$g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \simeq 1 + x^2[G_1, G_2] + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

On peut faire de même pour $\pi(g_1) = e^{x\pi(G_1)}$ et $\pi(g_2) = e^{x\pi(G_2)}$, donnant

$$\pi\left(g_1^{-1}\right)\pi\left(g_2^{-1}\right)\pi(g_1)\pi(g_2) \simeq 1 + x^2\left[\pi(G_1), \pi(G_2)\right] + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

D'après (17.0.3) $\pi\left(g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2\right) = \pi\left(g_1^{-1}\right)\pi\left(g_2^{-1}\right)\pi(g_1)\pi(g_2)$ et en particulier les termes en x^2 du développement sont égaux donc $\pi([G_1, G_2]) = [\pi(G_1), \pi(G_2)]$. □

17.0.3 Représentation de groupes de Lie compact

Proposition 17.0.6. *(*) Si G est un groupe compact et $\pi : G \to End(E)$ une représentation sur E e.v. complexe de dimension n (finie) alors il existe une métrique $\langle .|. \rangle$ Hermitienne sur E telle que π est une représentation unitaire.*

Démonstration. On prend au départ une métrique $(.|.)$ quelconque et l'on construit une nouvelle métrique $\langle .|. \rangle$ par moyennisation sur le groupe :

$$\langle u|v \rangle = \int_G (\pi(g)u|\pi(g)v)\,dg$$

où dg est la mesure invariante (de Haar). On vérifie alors que π est unitaire pour cette métrique. □

Proposition 17.0.7. *Si $\pi : G \to End(E)$ est une représentation unitaire sur E alors π (et E) se décomposent en somme orthogonale de représentations unitaires irréductibles :*

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$$

$$\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_k$$

avec $\pi_j : G \to End(E_j)$ unitaire et irréductible.

Démonstration. Soit E_1 un sous espace de E invariant et de dimension minimale (et $E_1 \neq \{0\}$). Forcément E_1 est un espace de repres. irréductible. Considérons l'espace orthogonal $E_1^{\perp}$ (pour la métrique Hermitienne). Montrons que $E_1^{\perp}$ est un espace invariant par la représentation. Soit $u \in E_1^{\perp}$ et $g \in G$ et soit $u' = \pi(g)\,u$. Pour montrer que $u' \in E_1^{\perp}$, soit $v \in E_1$. On a

$$\begin{aligned}(v|u') &= (v|\pi(g)\,u) = \left(\pi(g)^{+}\,v|u\right) \\ &= \Big(\underbrace{\pi\left(g^{-1}\right)v}_{\in E_1}|u\Big) \quad \text{car repres. unitaire} \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $u' \in E_1^{\perp}$. On a obtenu

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$$

avec $E_1^{\perp}$ est de dimension strictement plus petite que celle de E. On peut itérer l'opération, trouver un sous espace $E_2 \subset E_1^{\perp}$, etc... et obtenir à la fin

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$$

une somme orthogonale de repres. irréductibles. □

Définition 17.0.8. Deux représentations

$$\pi : G \to End(E), \qquad \lambda : G \to End(F)$$

sont **(unitairement) équivalentes** si il existe $A \in \mathcal{L}(E, F)$ inversible (unitaire) telle que

$$\pi(g) = A^{-1}\lambda(g)\,A, \qquad \forall g \in G$$

Proposition 17.0.9. *Les représentations unitaires irréductibles d'un groupe commutatif sont de dimension 1.*

Démonstration. Les générateurs commuttent. On peut les diagonaliser simultanément. L'espace propre engendré par chaque vecteur propre est invariant et irréductible (car de dim1). □

Considérons donc le cas de groupe de Lie non commutatif compact, le plus simple (dimension 3). Ce sont les groupes SO(3) et SU(2).

Proposition 17.0.10. *Les* ***représentations irréductibles unitaires*** *du groupe* $SU(2)$ *sont notées* D_j *indicées par* $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ *et d'espace de représentation* E_j *de dimension* $(2j+1)$.
Les représentations irréductibles du groupe $SO(3)$ *sont* D_j *indicées par les entiers* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *seulement.*
On note $G_x = -iJ_x$ *le générateur (14.0.1) des rotations autour de l'axe* x*, etc, cf (14.0.7), et* $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$*. On a alors*

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad \text{etc...}$$

Les deux opérateurs suivant commutent :

$$\left[J^2, J_z\right] = 0$$

le spectre commun des opérateurs J_z *et* J^2 *est*

$$J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \tag{17.0.4}$$
$$J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle \tag{17.0.5}$$

ou j *est entier ou demi-entier* ($j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$) *et*

$$m = -j, -j+1, \ldots, +j \quad : \text{ prend } (2j+1) \text{ valeurs}$$

A j *fixé, les vecteurs* $|j,m\rangle$ *forment donc une base orthonormée de l'espace* E_j*, de dimension* $(2j+1)$.

On a les opérateurs d'échelle

$$J_+ = J_x + iJ_y$$
$$J_- = J_x - iJ_y$$

(noter que $(J_-)^+ = J_+$*), vérifiant :*

$$[J_+, J_-] = 2J_z$$
$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$$
$$\left[J^2, J_\pm\right] = 0$$

et :

$$J_+|j,m\rangle = [(j-m)(j+m+1)]^{1/2}|j,m+1\rangle$$
$$J_-|j,m\rangle = [(j+m)(j-m+1)]^{1/2}|j,m-1\rangle$$

Voir figure 17.0.1.

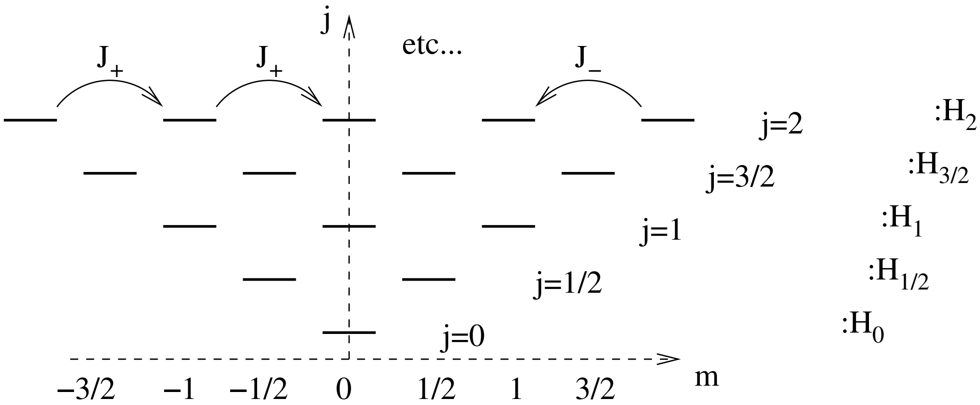


FIGURE 17.0.1 – Schéma des vecteurs propres communs de J_z et J^2, notés $|j,m\rangle$, et action des opérateurs d'échelle $J_\pm$. Les vecteurs $|j,m\rangle$ de la ligne j, avec $m = -j \to +j$, forment une base de l'espace E_j.

On a

$$\begin{aligned}\hat{R}_z(2\pi)\,|j,m\rangle = \exp(-iJ_z 2\pi)\,|j,m>&= \exp(-i\,m\,2\pi)\,|j,m> \\ &= \begin{cases} |j,m> & \text{si } m \text{ entier} \\ -|j,m> & \text{si } m \text{ demi} - \text{entier} \end{cases}\end{aligned}$$

par conséquent :

— Pour ***le groupe de rotation SO(3)***, il faut que $\hat{R}(2\pi) = \hat{I}$, et donc il faut que j (et donc m) soit entier. Dans ce cas, on note :

$$l = j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Les espaces de représentations irréductibles du groupe SO(3) sont donc E_l caractérisées par l'entier l.
Noter que E_l est de dimension impaire $(2l + 1)$.

— Pour ***le groupe SU(2)***, il faut que $\hat{R}(4\pi) = Id$, et donc toutes les valeurs de j sont permises :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots$$

Les espaces de représentations irréductibles du groupe SU(2) sont donc E_j, caractérisées par l'entier ou demi-entier j.

Démonstration. Comme J^2et J_z commuttent, ils possèdent une base de vecteurs propres communs. Notons $|a,m>$un vecteur propre commun des opérateurs $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$:

$$\hat{J}^2|a,m>= \hbar^2 a|a,m>$$
$$\hat{J}_z|a,m>= \hbar m|a,m>$$

Noter que

$$\begin{aligned}[J_+, J_-] &= \left[\left(\hat{J}_x + i\hat{J}_y\right), \left(\hat{J}_x - i\hat{J}_y\right)\right] \\ &= -i\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] + i\left[\hat{J}_y, \hat{J}_x\right] = 2\hat{J}_z\end{aligned}$$

et

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\right] = \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right] = i\hat{J}_y \pm i\left(-i\hat{J}_x\right) = \pm\hat{J}_\pm$$

et

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm\right] = 0$$

Remarque : Les trois générateurs $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ forment une base de l'algèbre de Lie $su\,(2)$ (ou $so\,(3)$ qui est équivalent) (espace vectoriel réel de dimension trois). Les trois générateurs $\hat{J}_z, \hat{J}_+, \hat{J}_-$ forment une autre base de cette même algèbre, qui est plus intéressante, pour les relations de commutations (mais comme il y a des coefs complexes, il s'agit de "l'espace vectoriel $su\,(2)$ complexifié"). Cette base s'appelle la **décomposition de Cartan** de l'algèbre su(2). On a :

$$\begin{aligned}\hat{J}_z\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right) &= \left(\pm\hat{J}_\pm + \hat{J}_\pm\hat{J}_z\right)|a, m> \\ &= (\pm 1 + m)\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right)\end{aligned}$$

et

$$\hat{J}^2\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right) = \hat{J}_\pm\hat{J}^2|a, m>= a\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right)$$

donc on pose :

$$|a, m' = m \pm 1 >= \frac{1}{c_\pm}\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right)$$

où $c_\pm$ est une constante réelle positive, de normalisation, à déterminer. Ainsi à partir du vecteur $|a, m>$, on construit un vecteur $|a, m \pm 1>$, etc.... Cette construction s'arrête lorsque le vecteur $\left(\hat{J}_\pm|a, m>\right)$ est nul. On a

$$\begin{aligned}a - m^2 &=< a, m|\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2|j, m> \\ &= \frac{1}{2} < a, m|\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+|a, m> \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\hat{J}_-|a, m>\right\|^2 + \left\|\hat{J}_+|a, m>\right\|^2\right) \geq 0\end{aligned}$$

(on a utilisé $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_+\hat{J}_-\right) + \hat{J}_z^2$) donc

$$a \geq m^2$$

donc la construction ci-dessus s'arrête forcément à disons $m_{min} \leq m \leq m_{max}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\hat{J}_+|a, m_{max} &>= 0, \\ \hat{J}_-|a, m_{min} &>= 0.\end{aligned}$$

et m_{max} et m_{min} sont séparés par un entier :

$$m_{max} = m_{min} + n, \quad n \in \mathbb{N}$$

On a

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_+\hat{J}_-\right) \\ = \hat{J}_z^2 + \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_z \\ = \hat{J}_z^2 + \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_z\end{aligned}$$

, donc appliqué à $|a, m_{max} >$ et $|a, m_{min} >$ on obtient :

$$\begin{aligned}a = m_{max}^2 + m_{max} \\ a = m_{min}^2 + m_{min}\end{aligned}$$

donnant :

$$\begin{aligned}(m_{min} + n)^2 + (m_{min} + n) = m_{min}^2 + m_{min} \\ \Leftrightarrow n^2 + 2n\, m_{min} + m_{min} + n + m_{min} = 0 \\ \Leftrightarrow n(n+1) + 2m_{min}\,(n+1) = 0 \\ \Leftrightarrow m_{min} = -\frac{n}{2}\end{aligned}$$

Donc $m_{max} = m_{min} + n = \frac{n}{2}$, et on pose

$$j = m_{max} = \frac{n}{2} : \quad \text{entier ou demi} - \text{entier}$$

alors

$$a = j\,(j+1)$$

et

$$m = -j, \ldots, +j : \quad (2j+1) \text{ valeurs}$$

Normalisation, choix de $c_\pm$: si $|j, m >$ est normalisé, on a

$$\begin{aligned}|c_{+,jm}|^2\, \||j, m+1>\|^2 \quad &=< j, m|\hat{J}_-\hat{J}_+|j, m> \\ &=< j, m|\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z|j, m> \\ = (j(j+1) - m(m+1))\end{aligned}$$

et de même pour c_-. D'après ci-dessus, chaque espace E_j est de dimension $(2j+1)$, et les opérateurs $\hat{J}_\pm, \hat{J}_z$ agissent a l'intérieur de chaque espace E_j. Il en est de même par conséquence, pour les opérateurs $\left(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\right)$ qui s'obtiennent par combinaisons linéaires, et pour les opérateurs de rotation $\hat{R}_x(\alpha) = \exp\left(-i\hat{J}_x\alpha\right)$, $\hat{R}_y, \hat{R}_z$. Donc chaque espace E_j est invariant par le groupe de rotation : c'est un , ou espace de représentation du groupe de rotation. Chaque espace E_j ne peut se décomposer en somme de deux espaces invariants par le groupe de rotation (i.e. $E_j \neq E_1 \oplus E_2$, avec E_1 et E_2 invariants). On le devine en effet, car à partir de tout vecteur $|j, m>$, on peut obtenir $|j, m'>$ par actions répétées de $\hat{J}_\pm$. Donc E_j est un espace de représentation irréductible du groupe de rotation.

□

Proposition 17.0.11. *L'espace $L^2(S^2)$ des fonctions $\psi(\theta, \varphi)$ sur la sphère S^2 se décompose en somme de repres irréductibles du groupe $SO(3)$:*

$$L^2\left(S^2\right) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} E_l$$

Démonstration. @@ □

Construction de nouvelles représentations Si

$$\pi : G \to End(E), \qquad \lambda : G \to End(F)$$

sont deux représentations alors sur l'espace $E \oplus F$ on définit la représentation :

$$\pi_{tot}(u \oplus v) = \pi(u) \oplus \lambda(v)$$

et sur l'espace $E \otimes F$ on définit la représentation :

$$\pi_{tot}(u \otimes v) = \pi(u) \otimes \lambda(v)$$

Ce dernier cas est très utilisé en mécanique quantique. Voir chapitre 7 de [13].

Théorème 17.0.12. ***(Clebsch-Gordan).*** *La représentation $D_k \otimes D_l$ du groupe $SU(2)$ (ou $SO(3)$) avec $k \geq l$ fixés, est réductible :*

$$D_k \otimes D_l = D_{k-l} \oplus D_{k-l+1} \oplus \ldots \oplus D_{k+l}$$

Le théorème suivant a une grande importance en physique quantique.

Proposition 17.0.13. ***"Symétrie dynamique"****. Supposons que H soit un opérateur ayant un spectre discret, qui commute avec $\pi(g)$, pour tout $g \in G$, où π est une representation unitaire. Alors chaque espace propre de H est une espace de représentation de G et génériquement il est irréductible. (génériquement dans l'espace des opérateurs H vérifiant l'hypothèse).*

Démonstration. Si $a \in \mathbb{C}$ est valeur propre de H, l'espace propre associé est

$$E_a = \{\psi, \quad H\psi = a\psi\}$$

Si $\psi \in E_a$ et $\psi' = \pi(g)\psi$ alors

$$H\psi' = H\pi(g)\psi = \pi(g)H\psi = a\pi(g)\psi = a\psi'$$

donc $\psi' \in E_a$. On a montré que E_a est invariant par $\pi(g)$, c'est donc un espace de représentation. Si

$$E_a = E_1 \oplus E_2$$

est réductible en deux sous espaces invariants, on a dans cet espace

$$H \equiv \begin{pmatrix} aI_{E_1} & 0 \\ 0 & aI_{E_2} \end{pmatrix}$$

on peut perturber H pour obtenir

$$H' \equiv \begin{pmatrix} a_1 I_{E_1} & 0 \\ 0 & a_2 I_{E_2} \end{pmatrix}$$

avec $a_1 \neq a_2$ génériquement ($a_1 = a_2$ est un cas "exceptionnel"), et H' commutte encore avec $\pi(g)$. $\square$

Exercice 17.0.14. Soient A, B deux matrices. Montrer que

$$\begin{aligned} e^A B e^{-A} &= e^{\mathrm{Ad}_A} B \\ &= B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \ldots \end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{Ad}_A : B \to [A, B]$$

Solution : Pour $x \in [0, 1]$, posons

$$S_x := e^{Ad_{xA}} B = e^{x[A,.]} B, \qquad T_x = e^{xA} B e^{-xA}$$

On a

$$\frac{dS_x}{dx} = [A, S_x], \qquad S_0 = B$$

$$\frac{dT_x}{dx} = AT_x - T_x A = [A, T_x], \qquad T_0 = B$$

Donc S_x et T_x satisfont la même équation diff. du premier ordre, avec la même condition initiale. Par conséquent $T_x = S_x, \forall x$. Donc pour $x = 1$, $e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{Ad}_A} B$.