Deuxième partie

Espaces vectoriels et tensoriels

On insistera sur l'utilité des ces notions en mécanique quantique et en relativité.
Références : Blyth "Linear algebra" tomes 1,2.

Chapitre 6

Espaces vectoriels

Définition 6.0.1. Un **espace vectoriel réel (ou sur $\mathbb{R}$)** est un ensemble E d'éléments $u \in E$ appelés **vecteurs,** avec (ce qui suit doit être valable pour tous $u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

— Une opération interne appelée **addition** notée +

$$(u, v) \in (E \times E) \to (u + v) \in E$$

qui est associative :

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

commutative :

$$u + v = v + u$$

possédant un élément neutre noté 0 :

$$u + 0 = u$$

tout élément u a un opposé noté $(-u)$:

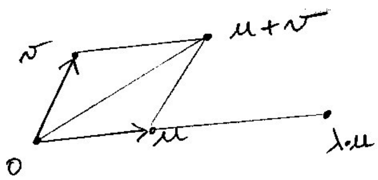
$$u + (-u) = 0$$

— Une opération externe appelée **multiplication** notée

$$(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \to (\lambda.u) \in E$$

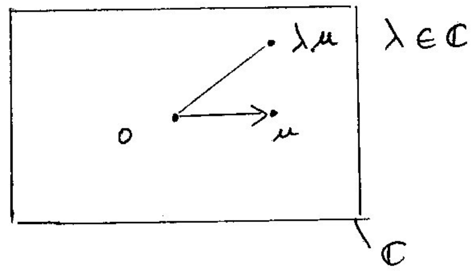
telle que

$$\begin{aligned} \lambda. (u + v) &= \lambda.u + \lambda.v \\ (\lambda + \mu) .u &= \lambda.u + \mu.u \\ (\lambda\mu) .u &= \lambda. (\mu.u) \\ 1.u &= u \end{aligned}$$



Remarques :

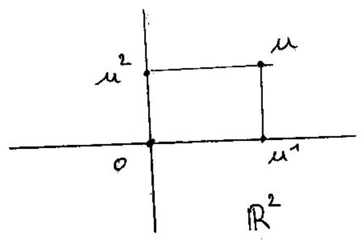
— Il y a une définition analogue pour un **espace vectoriel complexe (ou sur $\mathbb{C}$)** en remplaçant $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda \in \mathbb{C}$, etc.



— Dans la section @@ on verra que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

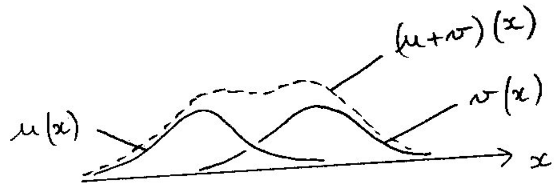
Exemples

— $E := \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ donné. Un élément est $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$. L'addition est définie termes à termes : $u + v := (u^1 + v^1, \ldots, u^n + v^n)$, et la multiplication aussi : $\lambda.u := (\lambda u^1, \ldots, \lambda u^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On verra que $dim\,(E) = n$.



— $E := \mathbb{C}^n$ (idem, espace vectoriel complexe). On verra que $dim\,(E) = n$.

— $E := C^\infty(\mathbb{R})$ qui est l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles (ou complexes) $u : x \in \mathbb{R} \to u(x) \in \mathbb{R}$ et dérivables un nombre infini de fois. L'addition est terme à termes : $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$, et aussi la multiplication : $(\lambda.u)(x) := \lambda u(x)$. Cet espace est utilisé en physique (ondes acoustiques, ondes quantiques,...). On verra que $dim\,(E) = \infty$.



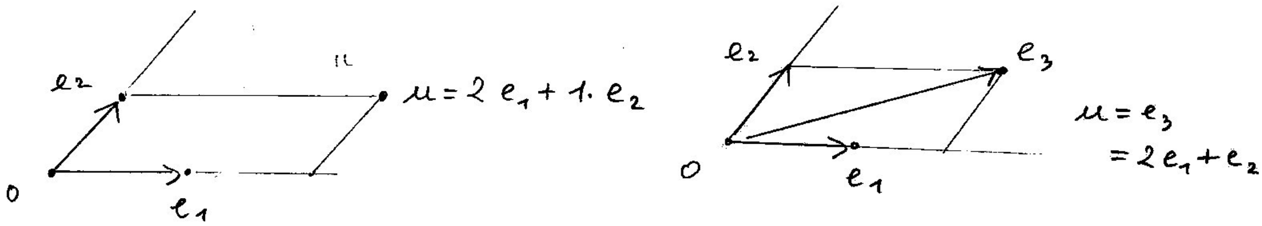
— De même $E := C^\infty(\mathbb{R}^3)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u(x, y, z)$ à trois variables.

— On verra au chapitre @@ un exemple important d'espace vectoriel : les vecteurs tangents en un point d'une surface (ou d'une variété), qui physiquement correspondent aux différents vecteurs vitesse d'une trajectoire passant en ce point.

Définition 6.0.2. n vecteurs $e_1, \ldots, e_n \in E$ forment une **base** de l'espace vectoriel réel E si **tout** vecteur $u \in E$ se décompose de façon **unique** :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i e_i, \qquad u^i \in \mathbb{R} \tag{6.0.1}$$

Voici un exemple de 2 vecteurs de bases, et de 3 vecteurs qui ne forment pas une base :



Remarques

— On appelle les nombres $(u^1, \ldots u^n)$ les **composantes du vecteurs** u par rapport à la base. Pour exprimer que les composantes caractérisent le vecteur, on note :

$$u \equiv_{base\, e} \left(u^i\right)_{i=1,\ldots,n}$$

— Une base canonique de l'espace $\mathbb{R}^n$ est constituée des n vecteurs :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots 1) \end{aligned}$$

L'espace $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel complexe, avec la même base mais des coefficients complexes.

— En mécanique quantique, avec la **notation de Dirac**, on note un vecteur par $|u\rangle \in E$ (appelé **ket**) et donc (6.0.1) s'écrit :

$$|u\rangle = \sum_i u^i |e_i\rangle$$

— Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de vecteurs (par exemple $\mathcal{E} = \{u, v\}$) on note $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ l'ensemble des vecteurs obtenus par combinaisons linéaires (exemple $\lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Alors **Vect** $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel appelé **espace vectoriel engendré par** $\mathcal{E}$.

Proposition 6.0.3. *La base n'est pas unique mais si elle existe le nombre n est unique, appelé **dimension de l'espace vectoriel** E, noté $n = dim(E)$. (Sinon $dim(E) = \infty$).*

Démonstration. (ref : Blyth T2, p.83)

Supposons $(e_1 \dots e_n)$ base de E et $(f_1, \dots f_m)$ une autre base avec $m \geq n$. On va montrer que $m = n$. On peut décomposer

$$f_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

et comme f_1 est non nul, alors un coef au moins est non nul, donc on peux supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Donc

$$e_1 = \lambda_1^{-1} (f_1 - \lambda_2 e_2 - \dots - \lambda_n e_n)$$

donc

$$E = Vect(f_1, e_2, \dots, e_n)$$

donc on peut décomposer

$$f_2 = \mu_1 f_2 + \mu_2 e_2 \dots + \mu_n e_n$$

avec $\mu_2 \dots \mu_n$ qui ne peuvent pas être nuls simultanéments car sinon f_1 et f_2 seraient colinéaires. On peut donc supposer $\mu_2 \neq 0$. Alors de même

$$E = Vect(f_1, f_2, e_3, \dots, e_n)$$

et ainsi de suite, on déduit que

$$E = Vect(f_1, \dots f_n)$$

Si $m > n$ on aurait donc $f_{n+1} \in Vect(f_1, \dots f_n)$ ce qui est impossible car $(f_j)_j$ est une base. Donc $m = n$. □

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ en considérant $\mathbb{C}^n$ comme un espace vectoriel complexe.
- L'espace $\mathbb{C}^n$ peut être considéré comme un espace vectoriel *réel* (i.e. avec des coefs réel). Dans ce cas une base est $e_1 = (1, 0, \dots 0)$, $f_1 = (i, 0, \dots 0)$, $\dots e_n = (0, \dots 0, 1), f_n == (0, \dots 0, i)$. Par exemple si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on décompose le vecteur : $(z, 0, \dots 0) = ae_1 + bf_1$. On déduit que $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.
- Soit $d \in \mathbb{N}$ et E_d l'ensemble des polynomes réels $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$, de degré $\leq d$. Une base de E_d est formé par les monomes $e_j(x) = x^j$, avec $j = 0 \dots d$, car $p(x)$ s'écrit de façon unique $p(x) = \sum_i p^i x^i = \sum_i p^i e_i(x)$. On déduit que $\dim(E_d) = d + 1$.
- $\dim(C^\infty(\mathbb{R})) = \infty$. (car il contient en particulier tous les espaces E_d).

Exercice 6.0.4. Soit E l'espace des matrices A carrées $N \times N$, à coefficients a_{ij} complexes et hermitiennes, c'est à dire $A^\dagger = A$, ce qui signifie que $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, $\forall i, j$. Montrer que E est un espace vectoriel réel (et non pas complexe). Trouver une base et déduire le dimension de E.

Solution : Espace vectoriel réel. $\dim(E) = N^2$.

Exercice 6.0.5. Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit l'espace vectoriel :

$$E_d := \{\text{polynomes } p(x_1, \ldots, x_m) \text{ à } m \text{ variables et de degré } \leq d\}$$

Un tel polynome s'écrit

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\alpha p_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} \tag{6.0.2}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_m)$, des coefficients $p_\alpha \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1 + \ldots \alpha_m \leq d$. Trouver une base de l'espace vectoriel E_d, déduire sa dimension.

Exercice 6.0.6. Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit l'espace vectoriel :

$$E_d := \{\text{polynomes } p(x_1, \ldots, x_m) \text{ à } m \text{ variables homogènes degré } d\}$$

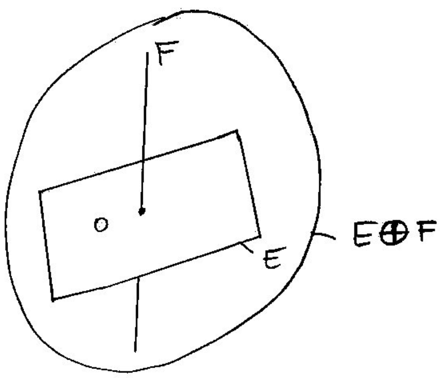
Un tel polynome vérifie : $p(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^d p(x_1, \ldots, x_m)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'écrit donc comme (6.0.2) avec $\alpha_1 + \ldots \alpha_m = d$. Trouver une base de l'espace vectoriel E_d, déduire sa dimension.

6.0.1 Somme directe d'espaces vectoriels

Définition 6.0.7. Soit E, F des espaces vectoriels. On définit l'espace **somme directe** $E \oplus F$ comme étant l'espace $E \times F$ des couples $(u, v) \in E \times F$ avec les opérations

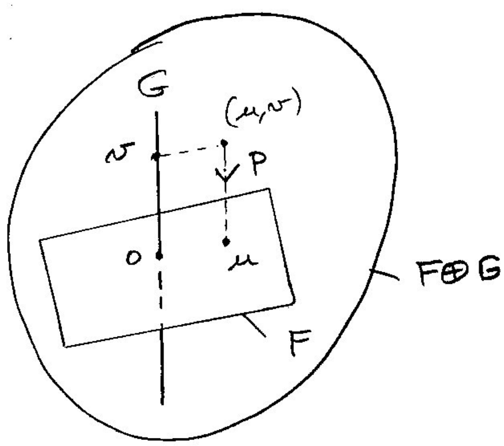
$$(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v')$$

$$\lambda.(u, v) := (\lambda.u, \lambda.v)$$



Si $(e_1, \ldots e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots f_m)$ est une base de F alors chacun de ces vecteurs est considéré comme un vecteur de $E \oplus F$, par exemple : $(e_1, 0) \in E \oplus F$ sera noté e_1, et $(0, f_1) \in E \oplus F$ sera noté f_1. Une base de $E \oplus F$ est donnée par $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots f_m)$ donc $dim\,(E \oplus F) = n + m$.

Exercice 6.0.8. Si G est un espace vectoriel et $E, F \subset G$ sont des sous espaces vectoriels tels que $E \bigcap F = \{0\}$ et $Vect\,(E \bigcup F) = G$ (c.a.d. tout vecteur de G peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs de E et F), montrer que $G \equiv E \oplus F$, c.a.d. que G et $E \oplus F$ sont canoniquement isomorphes (voir définition page 60).



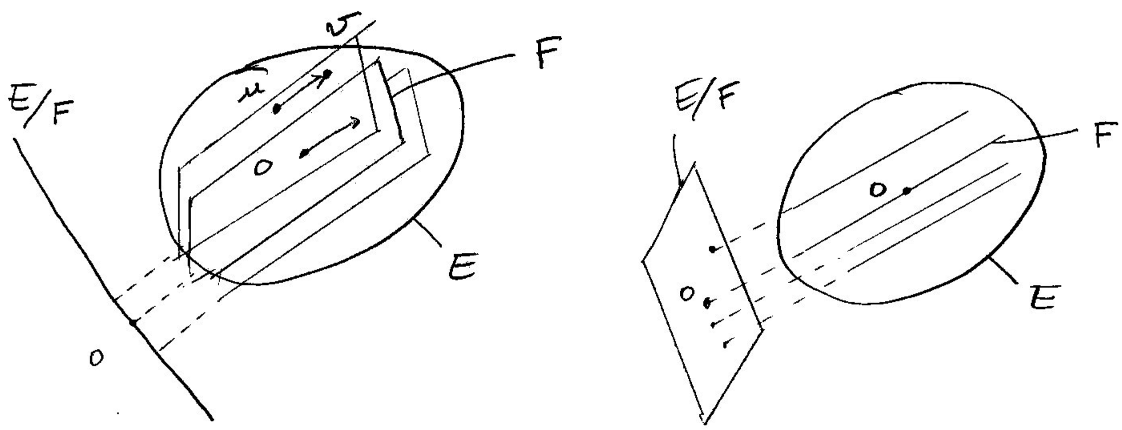
6.0.2 Espaces quotients

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous espace vectoriel. On définit une relation d'équivalence dans E :

$$u \sim v \text{ si } (u - v) \in F$$

On note $[u]$ la **classe d'équivalence** de $u \in E$ (cad $[u] = [v]$ si $u \sim v$) et inversement on dit que u est un **représentant** de la classe $[u]$.

On note E/F l'ensemble des classes d'équivalences appelé **espace quotient**.



— Montrons que E/F est une espace vectoriel (il préciser les opérations $+, .$). Si $u, v \in E$, on pose :

$$[u] + [v] := [u+v], \qquad \lambda [u] := [\lambda u]$$

(cette définition ne dépend pas du représentant car si $u \sim u'$ et $v \sim v'$ alors $u = u' + f$ et $v = v' + g$ avec $f, g \in F$, et alors $[u' + v'] = [u + v + f + g] = [u + v]$. De même $[\lambda u'] = [\lambda u + \lambda f] = [\lambda u]$).

— Montrons que

$$dim\,(E/F) = dim\,(E) - dim\,(F)$$

Pour cela on considère une base de F notée $(f_1, \ldots f_m)$ et l'on complète par $(e_1, \ldots, e_n)$ pour obtenir une base de E. Ainsi $\dim (F) = m$, $\dim (E) = m + n$ Il apparait que $[e_1], \ldots [e_n]$ forme une base de E/F, en effet : tout vecteur $u \in E$ se décompose de façon unique $u = \sum u^i f_i + \sum U^i e_i$. Donc $[u] = \sum U^i [e_i]$. On déduit que $dim\,(E/F) = n$.

— Si $E = F \oplus G$ est une somme directe (déf. ci-dessus), montrons que

$$G \equiv (E/F)$$

sont isomorphes. En effet si $(f_i)_{i=1\to m}$ est une base de F et $(g_j)_{j=1\to n}$ une base de G, alors on a vu que une base de E/F s'identifie avec $[g_1], \ldots [g_n]$.

Chapitre 7

Applications linéaires

Définition 7.0.1. Si E et F sont des espaces vectoriels, une **application linéaire** est une application

$$A : E \to F$$

telle que pour tous $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v)$$

On appelle :

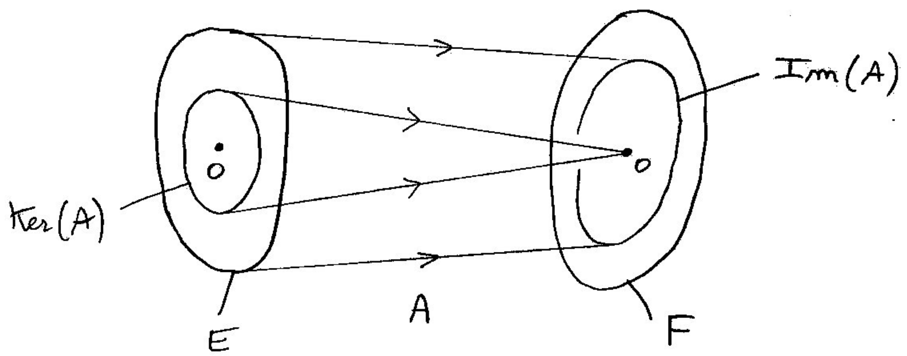
$$Ker(A) := \{u \in E, \quad A(u) = 0\} : \qquad : \text{noyau de } A$$

$$Im(A) := \{v \in F, \quad \exists u \in E, \quad v = A(u)\} : \qquad : \text{image de } A$$

qui sont des sous espaces vectoriels. On note

$$\mathcal{L}(E, F)$$

l'ensemble des applications linéaires de E vers F.



Remarques :

— on a toujours $A(0) = 0$. En effet il suffit de poser $\lambda = 0$ dans la relation $A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

— Une application linéaire de E dans E s'appelle un **endomorphisme.** Il y a un endomorphisme particulier qui est l'opérateur **identité** défini par $I_E(u) = u$.

7.0.1 Représentation d'une application linéaire dans une base

Si $A : E \to F$ est une application linéaire, et $(e_i)_{i=1\to n}$ une base de E, et $(f_j)_{j=1\to m}$ une base de F, alors on décompose chaque vecteur $A(e_i) \in F$ dans la base de F :

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{m} A_i^j f_j \tag{7.0.1}$$

où $A_i^j \in \mathbb{R}$ sont les composantes (noter la position des indices).

On décompose un vecteur $u \in E$ dans la base de E :

$$u = \sum_{i=1}^{\dim E} u^i e_i$$

On pose $v = A(u) \in F$ que l'on décompose dans la base de F :

$$v = \sum_{j=1}^{\dim F} v^j f_j$$

Proposition 7.0.2. *Les composantes de $v = A(u)$ sont données à partir des composantes de u par :*

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} A_i^j u^i \tag{7.0.2}$$

*Ce qui s'interprète comme le produit de la **matrice** $\mathbf{A} = \left(A_i^j\right)$ sur le **vecteur colonne** (u^i) :*

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ \\ v^m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1^1 & \vdots \\ \dots & A_n^m \end{pmatrix}}_{matrice\,\mathbf{A},\, m\times n} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

Ce résultat montre que la connaissance de la matrice $\mathbf{A}$ détermine complètement l'application linéaire.

Remarquer que pour une application A fixée, si on change de base de E ou de F, alors la matrice $\mathbf{A}$ change.

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} v &= A(u) = A\left(\sum_i u^i e_i\right) = \sum_i u^i A(e_i) \qquad \text{car } A \text{ est linéaire} \\ &= \sum_i u^i \sum_{j=1}^m A_i^j f_j = \sum_{j=1}^m \left(A_i^j u^i\right) f_j \end{aligned}$$

et par identification avec (7.0.2) on déduit $v^j = \sum_{i=1}^n A_i^j u^i$ (car comme $(f_j)_j$ est une base, la décomposition du vecteur v est unique). $\square$

Exercice 7.0.3. Montrer que l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F\}$ est un espace vectoriel de dimension $dim(\mathcal{L}(E,F)) = dim(E)\, dim(F)$.

Définition 7.0.4. Une application linéaire $A : E \to F$

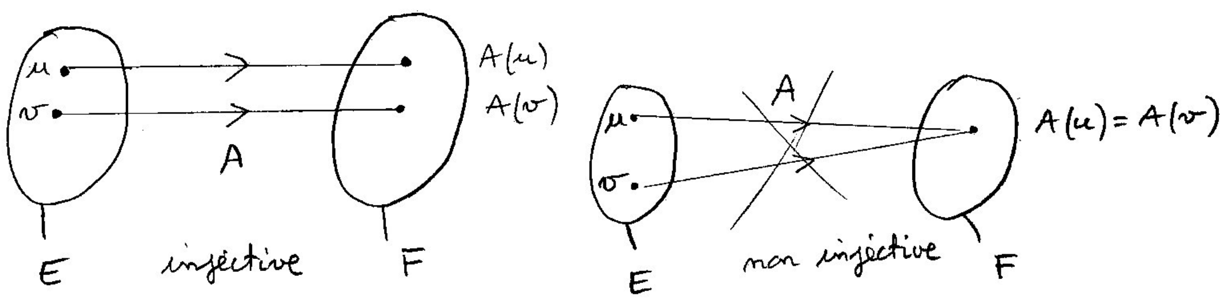
- est **injective** si $\forall u, v, \quad (A(u) = A(v)) \Rightarrow (u = v)$.
- est **surjective** si $\forall v \in F$, $\exists u \in E$, $A(u) = v$. C'est à dire si $Im(A) = F$.
- est un **isomorphisme** (est bijective) si A est injective et surjective. Alors A est inversible, car $\forall v \in F$, $\exists! u \in E, A(u) = v$. On note

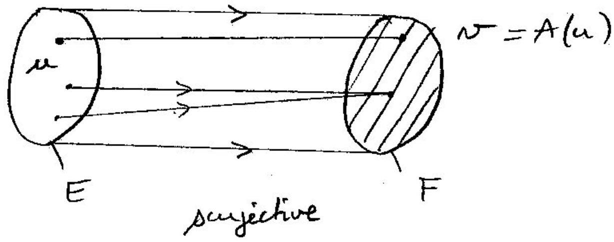
$$A^{-1} : \begin{cases} F & \to E \\ v & \to u = A^{-1}(v) \end{cases}$$

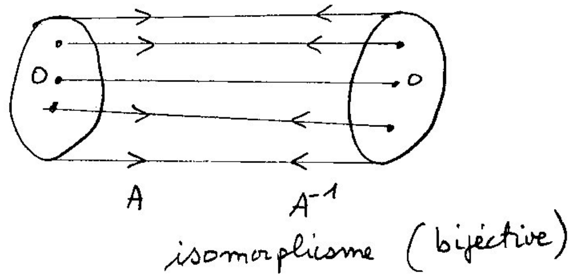
qui est aussi un isomorphisme. On a $dim(E) = dim(F)$ et on note

$$E \equiv_A F$$

pour signifier que E et F sont identifiés (isomorphes) grâce à l'application A.







Remarque 7.0.5. Une application linéaire dans un espace de dimension ∞ est souvent appelée **opérateur** et notée $\hat{A}$ avec un chapeau (utilisé en Mécanique quantique, avec l'espace des fonctions d'ondes $E = C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$)

Exercice 7.0.6. Montrer que : A injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Exercice 7.0.7. Si $A : E \to F$ est une application linéaire, montrer que cela induit un isomorphisme

$$\tilde{A} : (E/\mathrm{Ker}\,(A)) \to \mathrm{Im}\,(A) \tag{7.0.3}$$

(définir $\tilde{A}$), et déduire que

$$\dim E - \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = \dim(\mathrm{Im}\,(A)) \tag{7.0.4}$$

Un **endomorphisme** est une application linéaire $A : E \to E$ (dans un même espace vectoriel E). On note

$$A \in End\,(E)$$

Exercice 7.0.8. Si E est une espace vectoriel de dimension finie n, et $A : E \to E$ est un endomorphisme, montrer que

$$A \text{ surjective} \Leftrightarrow A \text{ injective} \Leftrightarrow A \text{ isomorphisme}$$

Montrer que ce résultat est faux en dimension infinie.

Aide : pour un contre exemple, considérer l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies $u = (u^1, u^2, \ldots)$ et l'opérateur de décalage à gauche $A : (u^1, u^2, \ldots) \to (u^2, u^3, \ldots)$. Calculer son noyau et son image. De même pour l'opérateur de décalage à droite : $B : (u^1, u^2, \ldots) \to (0, u^1, u^2, \ldots)$. Montrer l'analogie avec les opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique a^+, a.

Operateur de projection : Soit E un espace vectoriel et une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$. On définit l'opérateur

$$P : \begin{cases} E & \to E \\ (u, v) & \to (u, 0) \end{cases}$$

appelé **projecteur sur F selon G.** Montrer que P est une application linéaire, que $Ker\,(P) = G$, $Im\,(P) = F$, et que $P \circ P = P$. Montrer inversement que si $A : E \to E$ est une application linéaire vérifiant $A^2 = A$ alors A est un projecteur sur $Im\,(A)$ selon $Ker\,(A)$.

7.0.2 Déterminant et Trace d'un endomorphisme

Définition 7.0.9. Si $A \in End\,(E)$ est un endomorphisme sur E espace vectoriel, et si $(e_1, \dots e_n)$ est une base de E, et que A soit représenté par la matrice $\mathbf{A}$ alors on définit le **déterminant** et la **trace** de A par :

$$Det\,(A) := Det\,(\mathbf{A}) \tag{7.0.5}$$

$$Tr\,(A) := Tr\,(\mathbf{A}) \tag{7.0.6}$$

ces définitions ne dépendent pas de la base choisie.

Démonstration. Dans une autre base on aurait $\mathbf{A}' = \mathbf{PAP}^{-1}$ et

$$Det\,(\mathbf{A}') = Det\,(\mathbf{PAP}^{-1}) = Det\,(\mathbf{P})\,Det\,(\mathbf{A})\,(Det\,(\mathbf{P}))^{-1} = Det\,(\mathbf{A})$$

De même

$$Tr\,(\mathbf{A}') = Tr\,(\mathbf{PAP}^{-1}) = Tr\,(\mathbf{AP}^{-1}\mathbf{P}) = Tr\,(\mathbf{A})$$

□

Interprétations

— $Det\,(A)$ représente la variation de volume sous l'application A : pour une boule $\mathcal{B} \subset E$

$$Vol\,(A\,(\mathcal{B})) = Det\,(A)\,Vol\,(\mathcal{B})$$

— $Tr\,(A)$ est relié au déterminant par la formule

$$Det\,(e^A) = e^{Tr(A)}$$

(on le démontre pour une matrice diagonale, puis pour les matrices diagonalisables, et on le déduit par densité pour toute matrice, donc tout endomorphisme).

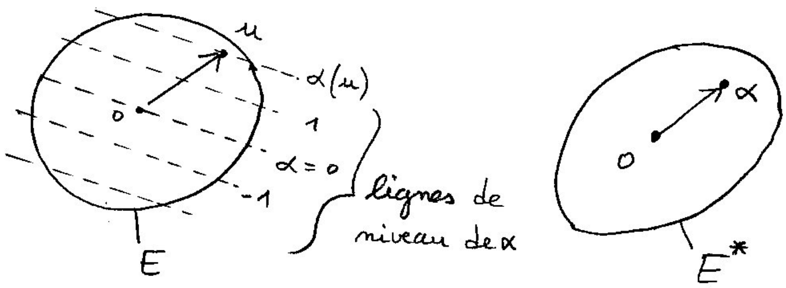
Chapitre 8

Espace dual

Définition 8.0.1. Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, on appelle

$$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \left\{ \text{applications linaires}\, \alpha : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ u & \to \alpha(u) \end{cases} \right\}$$

l'**espace dual** de E. Un élément $\alpha \in E^*$ est appelé **forme linéaire** sur E ou **vecteur dual**.



Remarques

— Un vecteur dual α étant une fonction réelle (linéaire) sur l'espace E, on peut le représenter par ses lignes de niveaux sur l'espace E (ou un point dans l'espace dual E^*). Voir figure.

— En mécanique quantique, avec la notation de Dirac, un vecteur est appelé **ket** et est noté $|u\rangle \in E$ et un vecteur dual est appelée **bra** est notée $\langle \alpha| \in E^*$. Ainsi on note[1] :

$$\alpha(u) = \langle \alpha | u \rangle \tag{8.0.1}$$

1. On pourrait noter $\langle \alpha | u \rangle_{E^*,E}$ pour ne pas confondre avec le produit scalaire $\langle . | . \rangle$ qui sera introduit plus loin.

la **contraction** de $\alpha \in E^*$ sur $u \in E$ (ce n'est pas un produit scalaire ! voir plus loin).

— Un vecteur est aussi appelé **vecteur contravariant** et un vecteur dual est aussi appelé **vecteur covariant** ou **pseudo-vecteur** en physique. La raison sera expliquée ci-dessous.

— En analyse, si f est une fonction sur E alors sa **transformée de Fourier** $\tilde{f}(\xi)$ est une fonction sur E^*. En cristallographie, par exemple le réseau périodique $\Lambda \subset E$ est engendré par une base de E et le réseau dual Λ^* par une base de E^* qui est la base duale.

— Les vecteurs duals (ou forme linéaire) ont une importance cruciale en géométrie, par exemple on verra page 160 que la **différentielle d'une fonction** df est un champ de formes linéaires).

— La notion de formes linéaires est aussi importante en théorie des fonctions (appelée "**analyse fonctionelle**"). Par exemple sur l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R})$, soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et soit :

$$\delta_x : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \to \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

alors $\delta_x \in E^*$ est une forme linéaire appelée "**distribution de Dirac en** x" et aussi notée $\langle x|$ en mécanique quantique. Ainsi avec cette notation de Dirac, si $|\varphi\rangle \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$$

On rappelle la définition du **symbole de Kronecker** :

$$\delta_k^j = \begin{cases} = 1 & \text{si } j = k \\ = 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Proposition 8.0.2. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*. On décompose un vecteur :* $u = \sum_i u^i e_i \in E$*. Pour* j *fixé on définit :*

$$e^{*j} : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ u & \to u^j \end{cases}$$

alors $e^{*j} \in E^*$ *est une forme linéaire et* $(e^{*1}, \ldots, e^{*n})$ *est une base de* E^* *appelée* ***base duale****. Elle vérifie :*

$$e^{*j}(e_k) = \delta_k^j$$

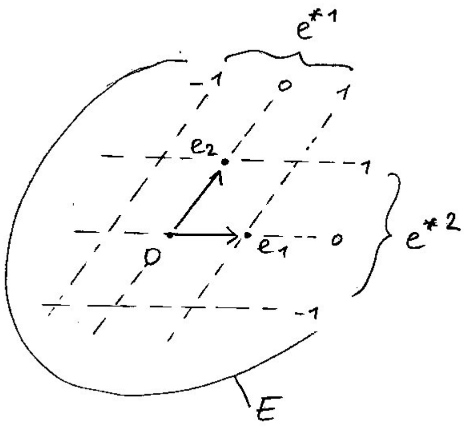
donc

$$dim(E^*) = dim(E) = n$$

Une forme linéaire $\alpha \in E^*$ *s'écrit dans cette base :*

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i} \tag{8.0.2}$$

avec $\alpha_i = \alpha(e_i) \in \mathbb{R}$ *ses composantes.*



Démonstration. Si $\alpha \in E^*$ alors

$$\alpha(u) = \alpha\left(\sum_i u^i e_i\right) = \sum_i u^i \alpha(e_i) = \sum_i e^{*i}(u)\, \alpha(e_i) = \sum_i \alpha(e_i)\, e^{*i}(u)$$

donc

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i} \qquad \text{avec } \alpha_i = \alpha(e_i)$$

$\square$

Remarques

— La correspondance :

$$\text{vecteurs de base } e_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{vecteurs de base duale } e^{*j}$$

est "collective" et non individuelle. Comme le montre la figure, si on modifie un vecteur (par exemple e_1), cela modifie tous les vecteurs duaux e^{*j}. On verra plus loin une correspondance individuelle différente qui existe lorsqu'il y a une métrique sur E.

— Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, si $\alpha \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (considérée comme une application linéaire), comme $1 \in \mathbb{R}$ est la base canonique de $\mathbb{R}$, on exprime α par rapport à ces bases par une matrice $1 \times n$, cad un **vecteur ligne** :

$$\alpha \equiv_{\text{base}\, e} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

où $\alpha_j = \alpha(e_j)$. En particulier si $u = \sum_i u^i e_i \in E$ on a

$$\alpha(u) = \sum_i \alpha_i u^i$$

le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.

Exercice 8.0.3. Si E est un espace vectoriel, montrer que $(E^*)^* \equiv E$ et que c'est un isomorphisme canonique. On notera aussi $E^{**} := (E^*)^*$.

Exercice 8.0.4. Montrer que si $A : E \to F$ est une application linéaire, alors on peut définir canoniquement une application linéaire $A^* : F^* \to E^*$ appelée **application transposée** ou **application duale**. Avec la notation de Dirac, si $\alpha \in F^*, u \in E$ alors

$$\langle \alpha | Au \rangle = \langle A^* \alpha | u \rangle \tag{8.0.3}$$

Chapitre 9

Métriques sur un espace vectoriel

9.1 Métrique Euclidienne

Définition 9.1.1. Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, un **produit scalaire Euclidien** ou **métrique Euclidienne** sur E notée $g(.,.)$ est une application bilinéaire :

$$g : (u, v) \in E \times E \to g(u, v) \in \mathbb{R}$$

bilinéaire (cad linéaire en u et en v), *symétrique* ($g(u, v) = g(v, u)$) et

$$\forall u \in E, \qquad g(u, u) \geq 0 : \qquad \text{positive}$$

$$g(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \qquad \text{non dégénérée}$$

On notera :

$$\|u\| := \sqrt{g(u, u)} \qquad : \text{norme du vecteur } u$$

On dit que (E, g) est un **espace Euclidien**.

Remarque

— Le produit scalaire se note aussi [1] avec ou $\langle .|. \rangle$:

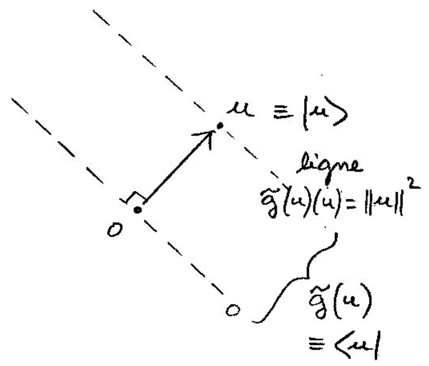
$$\langle u|v \rangle := g(u, v) \tag{9.1.1}$$

— On peut considérer g comme une application linéaire :

$$\tilde{g} : \begin{cases} E & \to E^* \\ u & \to g(u, .) = \{v \in E \to g(u, v) \in \mathbb{R}\} \end{cases} \tag{9.1.2}$$

1. On pourrait aussi noter $\langle u|v \rangle_E$ pour ne pas confondre avec la contraction $\langle .|. \rangle_{E^*,E}$ définie page 63.

Le vecteur dual $\tilde{g}(u) := g(u,.) \in E^*$ est appelé **vecteur dual métrique** de u, aussi noté $\langle u|.\rangle$ ou $\langle u|$ compatible avec la notation (9.1.1).



— L'hypothèse g est symétrique s'écrit que

$$\tilde{g} = \tilde{g}^* \qquad : E^{**} = E \to E^* \tag{9.1.3}$$

En effet : si $v \in E = E^{**}$ et $\tilde{g}(u) \in E^*$ on a d'après (8.0.3)

$$\tilde{g}^*(v)(u) = v(\tilde{g}(u)) = (\tilde{g}(u))(v) = g(u,v)$$

Par ailleurs $\tilde{g}(v)(u) = g(v,u)$.

— L'hypothèse g non dégénérée signifie que $\tilde{g} : E \to E^*$ est inversible. En effet

$$\mathrm{Ker}(\tilde{g}) = \{u,\ g(u,.) = 0\} = \{u/g(u,v) = 0, \forall v\} = \{0\}$$

donc $\tilde{g}$ est injective donc bijective (c'est un isomorphisme). On note son inverse

$$\tilde{g}^{-1} : E^* \to E \tag{9.1.4}$$

et en notation de Dirac, si $\alpha \in E^*$ on a $\tilde{g}^{-1}(\alpha) = |\alpha\rangle \in E$.

— Grâce à l'isomorphisme $\tilde{g} : E \to E^*$, le produit scalaire sur E noté $\langle .|.\rangle_E$ définit un produit scalaire sur E^* aussi noté $\langle .|.\rangle_{E^*}$:

$$\langle \alpha|\beta\rangle_{E^*} := \langle \tilde{g}^{-1}(\alpha)\,|\tilde{g}^{-1}(\beta)\rangle_E \qquad \alpha, \beta \in E^*$$

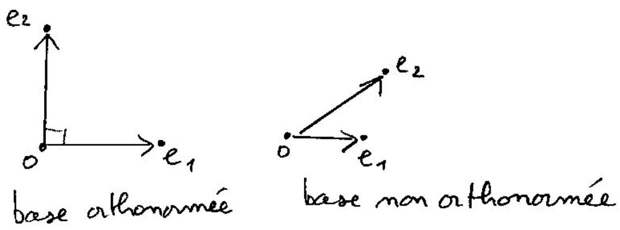
(aussi noté $g^{-1}(\beta,\alpha)$) qui est aussi symétrique, non dégénéré et positif.

— De façon équivalente on peut dire que $g \in S(E^* \otimes E^*)$ est un tenseur d'ordre 2, symétrique et défini positif. Rappelons que E^*, dual de E est l'ensemble des applications linéaires $E \to \mathbb{R}$.

Définition 9.1.2. Une **base orthonormée (b.o.n.)** est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que

$$g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}, \qquad \forall i, j$$

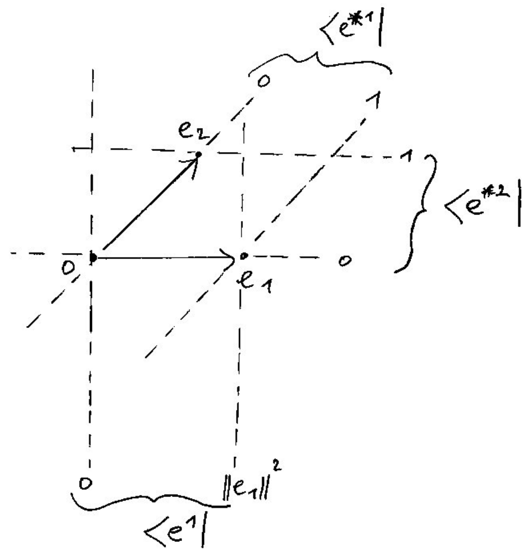
(autrement dit $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{i,j}$).



Remarque Si $(e_i)_i$ est une base quelconque (pas forcément orthonormée), avec $(e^{*i})_i$ sa base duale, alors en général un vecteur de la base duale est différent d'un vecteur dual métrique :

$$\langle e^{*i}| \neq \langle e_i|$$

sauf précisément si la base est orthonormée. Voir figure, et voir exercice ci-dessous.



— Dans une base $(e_i)_i$ de E, l'application g est représentée par une matrice $\boldsymbol{g}_{ij} := g(e_i, e_j)$, et si $U = \sum_i U^i e_i \in E$, $V = \sum_j V^j e_j \in E$, on a

$$g(U,V) = \sum_{i,j} \boldsymbol{g}_{ij} U^i V^j$$

Si $(e^{*i})_i$ est la **base duale** dans E^*, définie par :

$$e^{*j}(e_i) = \delta_i^j \qquad (9.1.5)$$

alors $e^{*i}(U) = U^i$. On peut donc noter

$$g = \sum_{i,j} \boldsymbol{g}_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j},$$

où $e^{*i}\otimes e^{*j} : (U,V) \to U^i V^j$ est une forme bilinéaire (tenseur). Concernant le produit scalaire induit sur E^* on déduit que si $\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i} \in E^*$, $\beta = \sum_j \beta_j e^{*j} \in E^*$, alors

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{E^*} = \sum_{i,j} \left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{i,j} \alpha_i \beta_j$$

où $\left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{i,j}$ sont les éléments de matrice de l'inverse de la matrice $\boldsymbol{g}_{ij}$. Cela s'écrit $\sum_k \left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{ik} \boldsymbol{g}_{kj} = \delta^i_j$.

- Noter que dans la plupart des livres de physique on convient d'écrire $(\boldsymbol{g})^{ik}$ à la place de $\left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{ik}$ (où les indices en haut suffisent à indiquer qu'il s'agit de $\boldsymbol{g}^{-1}$).
- Il existe une base $(e_i)_i$ de E appelée **base orthonormée** telle que

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

c'est à dire $g = \sum_i e^{*i} \otimes e^{*i}$.
- Si $(e_i)_i$ est une base quelconque de E donnée, attention à ne pas confondre la base duale $(e^{*i})_i$ (base de E^* définie plus haut, et qui ne nécessite pas g pour être définie), et la base duale métrique $f^i := g(e_i, .) = \langle e_i, . \rangle, i = 1 \to N$, qui nécessite g. En mécanique quantique, le dual métrique $\langle e_i | := \langle e_i, . \rangle \in E^*$ est appelé “bra” et le vecteur $|e_i\rangle := e_i \in E$ est appelé “ket”. Dans le cas d'une base orthonormée, les deux bases sont identiques : $e^{*i} = f^i$.
- En physique (anciens ouvrages), les composantes d'un vecteur $v \in E$, notées $(v^i)_i$, sont appelées **vecteur contravariant.** Les composantes d'un vecteur dual $\alpha \in E^*$, notées $(\alpha_i)_i$, sont appelées **vecteur covariant.**(voir chapitre II).

Exercice 9.1.3. Supposons que E est un espace vectoriel, $(e_1, \dots e_n)$ une base quelconque de E, et g une métrique sur E (aussi notée $\langle . | . \rangle$).

1. Montrer que avec les notations de Dirac, on a :

$$I_E = \sum_i |e_i\rangle\langle e^{*i}| = \sum_i e_i . e^{*i}(.)$$

appelée **relation de fermeture.**

2. On note

$$g_{ij} := g(e_i, e_j) = \langle e_i | e_j \rangle$$

qui forme une matrice $n \times n$. On note

$$\left(g^{-1}\right)^{ij} := \left(g^{-1}\right)\left(e^{*i}, e^{*j}\right) = \langle e^{*i} | e^{*j} \rangle_{E^*}$$

montrer que ces matrices sont inverses l'une de l'autre, c'est à dire

$$\sum_k \left(g^{-1}\right)^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

(remarque : dans la plupart des livres, on écrit g^{ik} au lieu de $\left(g^{-1}\right)^{ik}$ où les indices en haut suffisent à indiquer qu'il s'agit de l'application $\tilde{g}^{-1} : E^* \to E$).

3. Pour une base quelconque (pas forcément o.n.) montrer que la relation de fermeture s'écrit :
$$I_E = \sum_i |e_i\rangle\langle e^{*i}| = \sum_{i,j} |e_i\rangle \left(g^{-1}\right)^{ij} \langle e_j|$$
4. Si $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E, montrer que $\langle e^{*i}| = \langle e^i|$ et $|e^{*i}\rangle = |e_i\rangle$ (c'est à dire que dans ce cas les vecteurs de la base duale et les vecteurs dual métriques sont égaux).

9.1.1 Existence et construction d'une base orthonormée

Nous allons donner deux constructions particulièrement intéressantes de bases o.n., montrant au passage qu'il existe toujours une b.o.n. dans un espace vectoriel Euclidien de dimension n.

Construction de Gram-Schmidt : partant d'une base $(b_1, \ldots b_n)$ quelconque de E (pas forcément orthonormée), on pose
$$e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$
qui est **normalisé** (car $\|e_1\| = \frac{\|b_1\|}{\|b_1\|} = 1$). On considère l'espace $E_2 := \mathrm{Vect}\,(b_1, b_2) = \mathrm{Vect}\,(e_1, b_2)$ de dimension 2. On pose
$$\begin{aligned}\tilde{e}_2 &= b_2 + \lambda_1 e_1 \text{ avec } \lambda_1 \text{ t.q. } \langle e_1|\tilde{e}_2\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle e_1|b_2\rangle + \lambda_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -\langle e_1|b_2\rangle\end{aligned}$$
On pose
$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$$
qui est normalisé. Alors $\{e_1, e_2\}$ est une base o.n. de E_2. On poursuit par récurrence : si on a obtenu $e_1, \ldots e_{j-1}$, on considère $E_j = \mathrm{Vect}\,(b_1, b_2 \ldots b_j) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2 \ldots e_{j-1}, b_j)$ de dimension j. On pose $\tilde{e}_j = b_j + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{j-1} e_{j-1}$ tel que $\langle e_i|\tilde{e}_j\rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, j-1$, soit $\langle e_i|b_j\rangle + \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\langle e_i|b_j\rangle$. On pose $e_j = \frac{\tilde{e}_j}{\|\tilde{e}_j\|}$ qui est normalisé. Alors $(e_1, e_2 \ldots, e_j)$ est une b.o.n. de E_j. Par récurrence, on obtient une b.o.n. $\{e_1, \ldots e_n\}$ de $E_n = E$.

Remarque : cette construction dépend de la base $(b_1, \ldots b_n)$ de départ mais aussi de l'ordre des vecteurs $(b_j)_j$. Retenons que la base o.n. obtenue est caractérisée par le fait que
$$E_j = \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots b_j) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots e_j)\,, \qquad \forall j = 1, \ldots n$$
Ces espaces sont emboîtés :
$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n = E$$

Construction symétrique d'une base orthonormée (*) Voici une autre construction. On part d'une base $(b_1, \ldots b_n)$ quelconque de E (pas forcément orthonormée). Posons :

$$B_{i,j} := \langle b_i | b_j \rangle$$

La matrice $B = (B_{i,j})_{i,j}$ est appelée **matrice de Gram** de la base $(b_i)_i$. C'est une matrice symétrique, définie positive, c'est à dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $\langle u | Bu \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$. En effet on pose $U = \sum_i u^i b_i \in E$, et on a $0 < \langle U | U \rangle_E = \sum_{i,j} u^i u^j \langle b_i | b_j \rangle = \langle u | Bu \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Donc la matrice B se diagonalise :

$$B = UDU^{-1}$$

où U est une matrice orthogonale ($U^{-1} = U^T$) contenant les vecteurs propres de B en colonnes, et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ sont les valeurs propres de B, avec $d_1 \geq d_2 \ldots \geq d_n > 0$. On pose

$$\tilde{d}_j := \frac{1}{\sqrt{d_j}}, \qquad \tilde{D} := \operatorname{diag}\left(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_n\right)$$

et

$$C = U\tilde{D}U^{-1} \quad : \text{matrice } n \times n$$

Remarque. Cela revient à poser (par définition)

$$\tilde{D} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Posons :

$$e_\alpha := \sum_{j=1}^{n} C_{\alpha,j} b_j \in E, \quad \alpha = 1, \ldots, n$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle e_\alpha | e_\beta \rangle &= \sum_{k,l} C_{\alpha,k} C_{\beta,l} \langle b_k | b_l \rangle = \sum_{k,l} C_{\alpha,k} B_{k,l} \left(C^{\mathrm{T}}\right)_{l,\beta} \\ &= \left(CBC^{-1}\right)_{\alpha,\beta} = \left(U\tilde{D}D\tilde{D}U^{-1}\right)_{\alpha,\beta} = (\mathrm{Id})_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Remarques :

— si au départ $(b_1, \ldots b_n)$ est déjà une b.o.n. alors $B = \mathrm{Id}$, $C = \mathrm{Id}$ et donc $e_\alpha = b_\alpha, \forall \alpha$.

9.1.2 Application linéaire adjointe

Si $A : E \to E$ est une application linéaire, rappelons que l'application duale est

$$A^* : E^* \to E^*$$

définit par $\langle A^*\alpha|u\rangle = \langle\alpha|Au\rangle$. Si g est une métrique Euclidienne, on a vu que cela définit un isomorphisme $\tilde{g} : E \to E^*$. Cette identification permet de "ramener" A^* sur l'espace E d'après le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "A^*"] & E^* \\ E \arrow[u, "\tilde{g}"] \arrow[r, "A^+"] & E \arrow[u, "\tilde{g}"] \end{tikzcd}$$

l'application résultante $A^+ : E \to E$, et appelée l'**application adjointe** de A. Cela s'écrit simplement

$$\forall u, v \in E, \qquad g\left(A^+u, v\right) = g\left(u, Av\right)$$

En effet : on a

$$\begin{aligned} A^+u &= \tilde{g}^{-1}\left(A^*\left(\tilde{g}\left(u\right)\right)\right) \Leftrightarrow \langle\tilde{g}\left(A^+u\right)|v\rangle = \langle A^*\left(\tilde{g}\left(u\right)\right)|v\rangle = \langle\tilde{g}\left(u\right)|A\left(v\right)\rangle \\ &\Leftrightarrow g\left(A^+u, v\right) = g\left(u, Av\right) \end{aligned}$$

En notation de Dirac cela donne :

$$\forall u, v \in E, \qquad \langle A^+u|v\rangle = \langle u|Av\rangle \tag{9.1.6}$$

qui ressemble à la notation (8.0.3).

Exercice 9.1.4. Dans *une base orthonormée*, si A est représentée par une matrice $\mathbf{A} = \left(A_i^j\right)_{i,j}$ (voir (7.0.1) page 59) montrer que A^+ est représenté par la **matrice transposée :**

$$\left(A^+\right)_j^i = \mathbf{A}^T = A_i^j$$

Remarque : Si on avait voulu une présentation plus rapide de l'opérateur adjoint, en se passant de l'espace dual et d'opérateur dual, il aurait suffit de donner eq.(9.1.6) comme définition. Notre présentation qui est plus sophistiquée, plus complexe au premier abord, sera utile pour présenter les tenseurs. Il est important de remarquer que la notion d'espace dual existe sans qu'il y ait une métrique, et que la donnée d'une métrique permet d'identifier E^* et E par un isomorphisme $\tilde{g} : E \to E^*$.

9.1.3 Applications linéaires qui préservent la métrique

Définition 9.1.5. Sur un espace vectoriel Euclidien (E,g), une application linéaire $A : E \to E$ est appelée **transformation orthogonale** si :

$$\forall u,v \in E, \qquad g(Au,Av) = g(u,v)$$

(on dit que A “préserve la métrique”)

Remarques :

- En notation de Dirac : $\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle$.
- En faisant $u = v$ on a $\langle Au|Au\rangle = \langle u|u\rangle$ soit $\|Au\| = \|u\|$ ce qui signifie que A préserve la norme $\|u\|$ et distance entre vecteurs $d(u,v) := \|u-v\|$. On dit que A est une isométrie. Mais cela est réciproque (voir ci-dessous).
- Une application orthogonale est un isomorphisme, donc A est inversible. (En effet il suffit de montrer qu'elle est injective, soit $Ker(A) = \{0\}$: On a $u \in Ker(A) \Rightarrow \|Au\| = 0$, or $\|Au\| = \|u\|$ donc $u = 0$).
- A^{-1} est aussi une transformation orthogonale, car $\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle \Leftrightarrow \langle u'|v'\rangle = \langle A^{-1}u'|A^{-1}v'\rangle$, en posant $u' = Au$, $v' = Av$.
- Une transformation orthogonale transforme une base o.n. en une base o.n. (en effet si $f_j := A(e_i)$ alors $\langle f_i|f_j\rangle = \langle A(e_i)|A(e_j)\rangle = \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{i=j}$).

Proposition 9.1.6. *Sur un e.v. Euclidien (E,g), si une application linéaire $A : E \to E$ préserve la norme $\|Au\| = \|u\|$ alors A est une transformation orthogonale.*

Démonstration. On utilise la technique de “polarisation” : en remplace $u = v + w$ dans la relation $\|Au\| = \|u\| \Leftrightarrow \langle Au|Au\rangle = \langle u|u\rangle$, ce qui donne (en developpant et utilisant la symétrie)

$$\langle Av + Aw|Av + Aw\rangle = \langle v + w|v + w\rangle \Leftrightarrow \langle Av|Aw\rangle = \langle v|w\rangle$$

donc A est orthogonale. □

Proposition 9.1.7. *Sur un e.v. Euclidien (E,g), $A : E \to E$ est une application orthogonale si et seulement si :*

$$A^{+} = A^{-1} \tag{9.1.7}$$

Démonstration. Si A est orthogonale, et d'après la caractérisation (9.1.6) de A^+, on a pour tous $u, v \in E$

$$\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle \Leftrightarrow \langle A^+Au|v\rangle = \langle u|v\rangle$$

ce qui implique que $A^+A = I$ donc $A^+ = A^{-1}$. □

Remarque : dans une base o.n. la matrice de A vérifie donc

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \tag{9.1.8}$$

9.2 Métrique Hermitienne

Si E est un espace vectoriel complexe de dimension n, un **produit scalaire hermitien** ou **métrique Hermitienne** sur E notée $h(.,.)$ doit vérifier

$$\begin{aligned} h(\lambda u, v) &= \overline{\lambda} h(u, v) \text{ antilinéaire à gauche} \\ h(u, \lambda v) &= \lambda h(u, v) \text{ linéaire à droite} \end{aligned}$$

$$h(v, u) = \overline{g(u, v)} \text{ symétrique}$$

$$h(u, u) \geq 0 \text{ positive}$$

$$h(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ non dégénérée}$$

On notera :

$$\|u\| := \sqrt{h(u, u)} \qquad : \text{norme d'un vecteur } u \in E$$

On dit que (E, h) est un **espace Hermitien** ou **espace de Hilbert**

Remarques :

- On note aussi :

  $$\langle u|v\rangle := h(u, v)$$

  le produit scalaire.
- Tout ce que l'on a définit pour une métrique euclidienne se définit de manière analogue pour une métrique Hermitienne. Il y a quelques différences :
  - Attention, l'application $\tilde{h} : E \to E^*$ définit par $\tilde{h}(u)(.) = h(u, .)$ est maintenant **anti-linéaire**.
  - Si $A : E \to E$ est une application linéaire, on définit comme en (9.1.6) l'**opérateur adjoint** A^+ relativement à la métrique Hermitienne. C'est un opérateur linéaire (on a utilisé deux fois $\tilde{h}$). Dans une base o.n. la matrice de A^+ est **la matrice transposée conjuguée** de la matrice de A.

  - Une application qui préserve la métrique Hermitienne, $\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle$ est appelée **transformation unitaire.** Elle vérifie $A^+ = A^{-1}$.
- en dimension infinie, l'espace doit être complet pour la norme $\|.\|$ (Espace de Banach, espace de Hilbert) Voir [28].

Exemples :

- Sur $E = \mathbb{C}^n$, si $u = (u^1, \ldots, u^n)$ et $v = (v^1, \ldots, v^n)$, on pose

$$\langle u|v\rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{u}^i v^i$$

- Si $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$, espace de dimension infinie, contenant des suites infinies $u = (u^1, u^2, \ldots)$ on pose de même

$$\langle u|v\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \overline{u}^i v^i$$

pour des vecteurs tels que $\|u\|^2 = \langle u|u\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} |u|^2 < \infty$ soit finie.

- **Exemple utilisé en mécanique quantique** (c'est aussi un exemple sur un espace de dimension infinie).

$$E = C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \psi, \varphi \in E$$

$$\langle \psi|\varphi\rangle := \int \overline{\psi}(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

(à condition que $\|\psi\|, \|\varphi\| < \infty$). Le complété de l'espace des fonctions de carré sommable est noté :

$$L^2(\mathbb{R})$$

(il y a des fonctions discontinues et même qui divergent en des points). En mécanique quantique, $|\psi(x)|^2 dx = P(x)\, dx$ s'interprète comme une densité de probabilité. La condition que la probabilité totale soit 1 s'écrit :

$$1 = \int_\mathbb{R} P(x)\, dx = \int |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|^2$$

cad que le vecteur ψ soit de norme 1 ("normalisé").

9.3 Métrique de Lorentz

En physique la métrique de Lorentz définie ci-dessous est utilisée en relativité sur l'"espace temps".

Définition 9.3.1. Si E est un espace vectoriel réel de dimension n (ex : $n = 4$ en relativité), une **métrique de Lorentz** sur E est une forme bilinéaire $g : E \times E \to \mathbb{R}$, symétrique (avec $\tilde{g} : E \to E^*$ définie en (9.1.2), $\tilde{g}^* = \tilde{g}$), non dégénérée ($\tilde{g}$ est inversible), et de signature $(+1, -1, \dots, -1)$, c'est à dire qu'il existe une base $\left(\underbrace{e_0}_{temps}, \underbrace{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}}_{espace}\right)$ de E, appelée **base orthonormée** (b.o.n.), telle que

$$g(e_0, e_0) = +1, \qquad g(e_i, e_i) = -1, \quad \text{si } i \geq 1$$

$$g(e_i, e_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

On dit que (E, g) est un **espace de Minkowski.**

Remarques :

— On pourra aussi noter $\langle u|v\rangle := g(u, v)$ avec $u, v \in E$.

— Attention à la confusion possible : on dit "espace-temps" représentés sur des schémas avec espace en abscisse et temps en ordonnée, mais les coordonnées sont dans l'ordre "temps-espace".

— Dans une base o.n. la matrice de la métrique $g_{i,j} = g(e_i, e_j)$ est diagonale :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

— Il n'y a pas de norme car $g(u, u)$ peut être positif, négatif ou nul selon le vecteur $u \in E$. Voir ci-dessous.

— Une transformation linéaire $A : E \to E$ qui préserve la métrique de Lorentz, i.e. $\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle, \forall u, v$ s'appelle **transformation de Lorentz**.

9.3.1 Cône de lumière

Soit (E, g) est espace vectoriel de Minkowski de dimension n.

Définition 9.3.2. Pour un vecteur $u \in E$,

— u est de **type lumière** si $g(u, u) = 0$ (u est sur le **cône de lumière**).

— u est de **type temps** si $g(u, u) > 0$,

— u est de **type espace** si $g(u, u) < 0$.

De plus étant donné une base o.n., on dit que u est de **type temps futur** si $g(u,u) > 0$ et $u_0 > 0$, et de **type temps passé** si $u_0 < 0$.

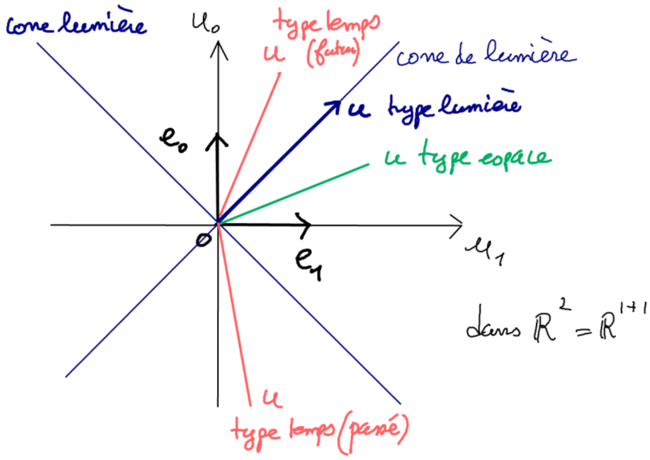
Pour illustrer ces définition, supposons $(e_0, e_1, \dots e_{n-1})$ une base orthonormée de E. Soit $u \in E$ un vecteur que l'on décompose

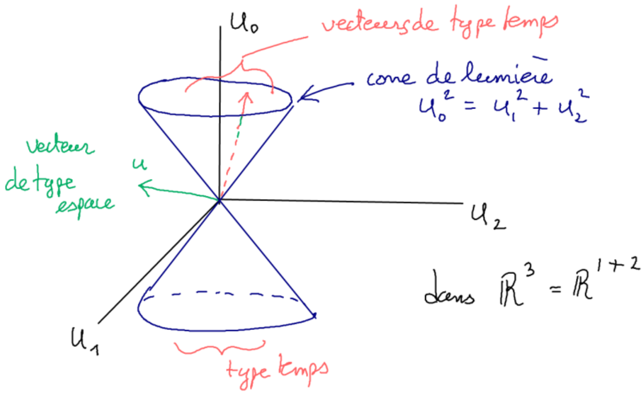
$$u = u_0 e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i$$

avec des composantes $u_0, u_i \in \mathbb{R}$. L'équation $g(u,u) = 0$ s'écrit

$$g(u,u) = 0 \Leftrightarrow u_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 = 0 \Leftrightarrow u_0 = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2}$$

Ainsi u est sur le graphe appelé **cône de lumière** (on verra pourquoi). Voici un schéma du cône de lumière dans E pour les dimension $n = 1+1$ et $n = 2+1$:





9.4 Métrique symplectique

La notion de métrique symplectique est utile en mécanique analytique pour écrire les équations de mouvement de Hamilton, indépendement du système de coordonnées.

On peut sauter cette partie en première lecture.

Définition 9.4.1. Une **métrique symplectique** ω sur un espace vectoriel E de dimension finie est une application

$$\omega : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) & \mapsto \omega(U, V) \end{cases}$$

qui est linéaire en U et V, antisymétrique ($\omega(U, V) = -\omega(V, U)$) et non dégénérée ($\omega(U, V) = 0, \forall V \Rightarrow U = 0$). On dit que (E, ω) est un **espace vectoriel symplectique**.

Remarque :

— Pour tout $u \in E$, on a $\omega(u, u) = -\omega(u, u)$ donc $\omega(u, u) = 0$.

Voici un résultat important qui montre la forme normale[2] d'une forme symplectique.

Proposition 9.4.2. *Si ω est une forme symplectique sur un espace vectoriel E alors forcément $\dim E = 2n$ (est paire) et il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1 \ldots, f_n)$ de E appelée **base canonique**, telle que*

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}, \qquad \omega(e_i, e_j) = 0, \qquad \omega(f_i, f_j) = 0, \tag{9.4.1}$$

Ainsi si les vecteurs u, v se décomposent comme $u = \sum_{i=1}^{n} (q^i e_i + p^i f_i)$, $v = \sum_{i=1}^{n} \left(q'^i e_i + p'^i f_i\right)$ alors

$$\omega(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(q^i p'^i - p^i q'^i\right)$$

Pour une preuve rapide, voir [7, p.1]. La proposition précédente découle de la proposition suivante qui est un résultat plus fort et souvent utile (Weinstein 1977 "Lectures on sympl. manifolds p.8,[7, p.66, prop12.3]) :

2. On verra la notion de forme normale à nombreuses occasions dans ce cours. En gros la **"forme normale**" d'un objet est l'expression la plus simple que puisse prendre cet objet dans un système de coordonnées approprié.

Proposition 9.4.3. *Si E est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique ω et d'une métrique g euclidienne alors* $\dim E = 2n$ *(est paire) et il existe une base* ***canonique*** $(e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1 \ldots, f_n)$ *de E vérifiant (9.4.1) et de plus cette base est* ***orthogonale*** *pour g :*

$$g(e_i, f_j) = 0, \qquad g(e_i, e_i) = g(f_i, f_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} > 0$$

avec des $\lambda_i > 0$.

Démonstration. Notons

$$\tilde{\omega} : E \to E^*, \quad \tilde{\omega}(U) = \omega(U, .)$$

et de même $\tilde{g}^{-1} : E^* \to E$, avec $\tilde{g}(U) = g(U, .)$ (déjà défini en Eq.(9.1.4), page 68) et posons

$$K := \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{\omega} \quad : E \to E$$

c'est à dire $g(K(u), v) = \omega(u, v)$. On a que ω est non dégénéré, donc K est inversible[3]. On a

$$g\left(u, K^+(v)\right) = g(K(u), v) = \omega(u, v) = -\omega(v, u) = -g(K(v), u) = g(u, -K(v)), \qquad \forall u, v$$

c'est à dire que $K^+ = -K$ (anti-hermitien pour la métrique g). Considérons la **décomposition polaire**[4] de l'opérateur K notée :

$$K = |K| J = J |K|$$

Avec $|K|^2 := K^+K = -K^2$ qui est un opérateur autoadjoint défini positif, et $J := K/\sqrt{K^+K}$ (ici $K^+ = -K$ donc J commutte avec K). Considérons un vecteur propre e de $|K|$ de valeur propre $\sqrt{\lambda}$: $|K| e = \sqrt{\lambda} e$, et posons $f = J(e)$. Remarquons que $g(e, f) = 0$, i.e. les vecteurs sont orthogonaux (en effet utilisant $K = J.|K|$, on a $0 = \omega(e, e) = g(K(e), f) = \sqrt{\lambda} g(f, e)$) et que $|K| f = |K| Je = \sqrt{\lambda} f$, donc f est aussi vecteur propre avec la même valeur propre. Si de plus le vecteur f est choisi de norme $\|f\|^2 = g(f, f) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, alors

$$\omega(e, f) = g(K(e), f) = g(J|K| e, f) = \sqrt{\lambda} g(f, f) = 1$$

Les autres termes $\omega(e, e) = \omega(f, f) = 0$ sont nuls car les vecteurs propres de $|K|$ hermitien forment une base orthonormée. De pouvoir construire les vecteurs propres ainsi par paires montre que $\dim E = 2n$ est paire. □

3. $K^{-1} : E \to E$ s'interprète comme le **champ de vecteur Hamiltonien** X généré par la fonction de Hamilton $H(x) = \frac{1}{2} g(x, x)$ sur E. En effet par définition $\omega(X, .) = dH \Leftrightarrow \tilde{\omega}(X) = \tilde{g}(x) \Leftrightarrow X = \tilde{\omega}^{-1} \circ \tilde{g}(x) = K(x)$.
4. Voir Section 11.0.2.1.

Remarques : Pour compléter les résultats établis dans la preuve précédente, remarquons que (avec les même notations) :

- Les valeurs propres de l'opérateur $|K|^2 = K^+K = -K^2$ sont $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n$ et de multiplicité 2 chacune.
- On a
$$J^2 = -1$$
en effet $J^2 = K^2/\left(K^+K\right) = -1$. On dit que J est une **structure complexe** [5] sur E. On a aussi $J^+J = K^+K/\left(K^+K\right) = 1$ donc J est un opérateur orthogonal, et $J^+ = -J$.
- On a les relations :
$$g\left(Ju, Jv\right) = g\left(u, v\right)$$
(en effet $g\left(Ju, Jv\right) = g\left(u, J^+Jv\right) = g\left(u, v\right)$). On dit que g est **compatible** avec la structure complexe J.
- Et
$$\omega\left(Ju, Jv\right) = \omega\left(u, v\right)$$
(en effet $\omega\left(Ju, Jv\right) = g\left(KJu, Jv\right) = g\left(JKu, Jv\right) = g\left(Ku, J^+Jv\right) = g\left(Ku, v\right) = \omega\left(u, v\right)$). On dit que ω est **compatible** avec la structure complexe J.
- Au final on a obtenu une base canonique $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1 \ldots, f_n\right)$ orthogonale pour g, mais pas orthonormée, $\|e_i\| = \|f_i\| = \lambda_i^{-1/4}$ (car $1/\sqrt{\lambda_j} = g\left(f_j, f_j\right) = g\left(Je_j, Je_j\right) = g\left(e_j, e_j\right)$). Par contre, avec ω et J, on peut définir une autre métrique g_J par :
$$g_J\left(u, v\right) := \omega\left(u, Jv\right)$$
qui est différente de g (et reliée par $g_J\left(u, v\right) = \omega\left(u, Jv\right) = g\left(Ku, Jv\right) = g\left(u, K^*Ju\right) = g\left(u, \sqrt{K^+K}v\right)$). Pour cette métrique, la base canonique est orthonormée. On dit que $\left(\omega, J, g_J\right)$ forment un **triplet compatibles**.
- Si on définie la forme bilinéaire sur E :
$$h\left(u, v\right) := g_J\left(u, v\right) + i\omega\left(u, v\right)$$
Elle vérifie
$$h\left(Ju, v\right) = g_J\left(Ju, v\right) + i\omega\left(Ju, v\right) = \omega\left(u, v\right) - ig_J\left(u, v\right) = -ih\left(u, v\right)$$
$$h\left(u, Jv\right) = g_J\left(u, Jv\right) + i\omega\left(u, Jv\right) = -\omega\left(u, v\right) + ig_J\left(u, v\right) = ih\left(u, v\right)$$
et donc pour $a, b \in \mathbb{R}$,
$$h\left(\left(a + bJ\right)u, v\right) = \left(a - ib\right)h\left(u, v\right), \qquad h\left(u, \left(a + bJ\right)v\right) = \left(a + ib\right)h\left(u, v\right)$$
qui est une anti-linéarité à gauche et linéarité à droite. En identifiant E avec un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (par $\left(a + ib\right)u := \left(a + bJ\right)u$), cela montre que h est une forme

5. Noter que dans le plan complexe $\mathbb{C}$ l'opération, $J : u \to iu$ vérifie $J^2 = i^2 = -1$.

pseudo-Hermitienne sur E (Hermitienne positive si g_J est positive). Inversement, si h est une forme pseudo-Hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $g := \mathrm{Re}\,(h)$ est une pseudo-métrique et $\omega := \mathrm{Im}\,(h)$ est une forme symplectique qui sont compatibles avec la structure complexe $J := i$.

— Interprétation utile en mécanique Hamiltonienne (Williamson 1968, réf : cours de De-Gosson 2006 @@ chap.3) : Sur un espace symplectique (E, ω), une forme quadratique définie positive g peut être diagonalisée par une transformation symplectique linéaire.

9.4.1 Application linéaire adjointe symplectique A^ω

Si $A : E \to E$ est une application linéaire et ω est une métrique symplectique sur E, on définit A^ω par :

$$\begin{array}{ccc} E^* & \underset{\longrightarrow}{A^*} & E^* \\ \uparrow \tilde{\omega} & & \uparrow \tilde{\omega} \\ E & \underset{\longrightarrow}{A^\omega} & E \end{array}$$

c'est à dire $A^\omega(u) = \tilde{\omega}^{-1}(A^*(\tilde{\omega}(u)))$. Comme précédement, cela donne :

$$\omega(A^\omega(u), v) = \omega(u, A(v)), \qquad \forall u, v \in E$$

Proposition 9.4.4. *Dans une base canonique e, si on note $\phi_e(A) = \mathbf{A}$ la matrice qui représente A, alors A^ω est représenté par la matrice :*

$$\mathbf{A}^\omega = \phi_e(A^\omega) = -\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}, \qquad \textit{avec } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(on a $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2 = -I$)

Démonstration. Dans une base canonique, si $u \equiv \mathbf{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ et $v \equiv \mathbf{v}$ alors

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$$

donc

$$\omega(u, v) = \langle \mathbf{J}\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle \mathbf{u} | -\mathbf{J}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$$

donc

$$\begin{aligned}
\omega\left(A^{\omega}\left(u\right),v\right) &= \omega\left(u,A\left(v\right)\right)\\
\Leftrightarrow \langle \mathbf{J}\mathbf{A}^{\omega}\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} &= \langle \mathbf{J}\mathbf{u}|\mathbf{A}\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}\\
\Leftrightarrow \langle \mathbf{J}\mathbf{A}^{\omega}\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} &= \langle \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}\\
\Leftrightarrow \mathbf{J}\mathbf{A}^{\omega} &= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\omega} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = -\mathbf{J}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}
\end{aligned}$$

□

9.4.2 Application linéaire qui préserve la métrique symplectique ω

Définition 9.4.5. Sur un espace vectoriel symplectique (E,ω), une application linéaire $A : E \to E$ est appelée **transformation symplectique linéaire** ou **transformation canonique linéaire** si

$$\forall u,v \in E, \qquad \omega\left(Au,Av\right) = \omega\left(u,v\right)$$

Remarque : une transformation symplectique transforme une base canonique en une base canonique.

Proposition 9.4.6. *$A \in \mathcal{L}\left(E,E\right)$ est une transformation symplectique linéaire si et seulement si*

$$A^{\omega} = A^{-1}.$$

Dans une base canonique, la matrice $\mathbf{A}$ qui représente A vérifie :

$$-\mathbf{J}\mathbf{A}^{T}\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1} \tag{9.4.2}$$

On dit que c'est une ***matrice symplectique****.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\omega\left(Au,Av\right) &= \omega\left(u,v\right), \qquad \forall u,v \in E\\
\Leftrightarrow \omega\left(A^{\omega}Au,v\right) &= \omega\left(u,v\right)\\
\Leftrightarrow \quad A^{\omega}A &= I \Leftrightarrow A^{\omega} = A^{-1}
\end{aligned}$$

et donc $-\mathbf{J}\mathbf{A}^{T}\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}$. D'après ci-dessus. □

Exercice 9.4.7. Soit E un espace vectoriel symplectique (i.e. munit d'une forme symplectique ω) et $(e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1 \ldots, f_n)$ une base canonique. Soit g une métrique sur E. D'après la proposition 9.4.3, il existe une base canonique $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, f'_1 \ldots, f'_n)$ qui est aussi orthogonale pour g. Notons $d_i = \|e'_i\|^2 = \|f'_i\|^2$. On a vu que pour une métrique g compatible avec ω alors $d_i = 1, \forall i$. Traduisons cela sous forme matricielle.

Notons $g_{i,j} = g(a_i, a_j)$ avec $a_i \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1 \ldots, f_n\}$ un vecteur de base et $\mathbf{g} = (g_{i,j})_{i,j}$ la matrice représentant g dans cette base. Notons $\mathbf{A} = \left(A_i^j\right)_{i,j}$ la matrice de changement de base définie par $a_i = \sum_{j=1}^{2n} A_i^j a'_j$. Montrer que $\mathbf{A}$ est une matrice symplectique, i.e. vérifie (9.4.2) et que

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T \tag{9.4.3}$$

avec $\mathbf{D} = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots d_{2n})$ la matrice diagonales des coefs d_i. Inversement cela signifie que toute matrice symétrique $\mathbf{g}$ peut s'écrire sous la forme (9.4.3).

Démonstration. D'après la proposition 9.4.3, la matrice $\mathbf{A}$ est symplectique. On a

$$\begin{aligned}
g_{i,j} = g(a_i, a_j) &= g\left(\sum_{k=1}^{2n} A_i^k a'_k, \sum_{l=1}^{2n} A_j^l a'_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} A_i^k \sum_{l=1}^{2n} A_j^l g(a'_k, a'_l) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} A_i^k \sum_{l=1}^{2n} A_j^l \delta_{k,l} d_k = \sum_{k=1}^{2n} A_i^k A_j^k d_k \\
&= \left(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T\right)_{i,j}
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 10

Espaces tensoriels

L'espace tensoriel généralise la notion d'espace dual vue page 63. Rappelons qu'un vecteur dual $\alpha \in E^*$ est une application linéaire $\alpha : E \to \mathbb{R}$. On considère des espaces vectoriels réels, mais ce qui suit est identique pour les espaces vectoriels complexes.

Définition 10.0.1. Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, **un tenseur de type** (p,q) **sur** E est une application :

$$T:\begin{cases}\underbrace{E\times\ldots\times E}_{p}\times\underbrace{E^{*}\times\ldots\times E^{*}}_{q} & \to\mathbb{R}\\ (u_1,\ldots,u_p,\alpha_1,\ldots\alpha_q) & \to T\left(u_1,\ldots,u_p,\alpha_1,\ldots\alpha_q\right)\end{cases}\tag{10.0.1}$$

linéaire par rapport à chaque u_i et α_i (c'est à dire que $T\left(\ldots,\lambda u_i+\mu v_i,\ldots\right)=\lambda T\left(\ldots,u_i,\ldots\right)+\mu T\left(\ldots,v_i,\ldots\right)$). On note

$$T\in\underbrace{E^{*}\otimes\ldots\otimes E^{*}}_{p}\otimes\underbrace{E\otimes\ldots\otimes E}_{q}=\left(E^{*}\right)^{\otimes p}\otimes\left(E^{\otimes q}\right)\tag{10.0.2}$$

l'**espace tensoriel** des tenseurs de type (p,q).
Un tenseur $T\in\left(E^{*}\otimes\ldots E^{*}\right)$ de type $(p,0)$ est **symétrique** si il est invariant par permutation de deux variables quelconques :

$$T\left(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots\right)=T\left(\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots\right),\qquad\forall i,j$$

On note $\mathcal{S}\left(E^{*}\otimes\ldots\otimes E^{*}\right)=\mathcal{S}\left(\left(E^{*}\right)^{\otimes p}\right)$ l'espace des tenseurs symétriques.
Le tenseur est **antisymétrique** si il change de signe :

$$T\left(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots\right)=-T\left(\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots\right),\qquad\forall i,j$$

On note $\mathcal{A}\left(E^{*}\otimes\ldots E^{*}\right)=\mathcal{A}\left(\left(E^{*}\right)^{\otimes p}\right)$ ou plus simplement $\Lambda^{p}\left(E\right)$ l'espace des tenseurs anti-symétriques de type $(p,0)$.

Remarques

— Noter la présence ou non de $*$ qui est différente entre (10.0.1) et (10.0.2).
— Par extension, un tenseur de type $(0,0)$ est un nombre réel. (on dit aussi un **scalaire** en physique).
— On peut généraliser et définir des espaces tensoriels mixtes. Par exemple si E,F sont des e.v. on pose :

$$E^{*}\otimes F:=\left\{\text{tenseurs } T:(u,\alpha)\in\left(E\times F^{*}\right)\to T\left(u,\alpha\right)\in\mathbb{R}\right\}$$

etc.

Exemples :

— Un vecteur dual $\alpha\in E^{*}$ est un tenseur de type $(1,0)$.
— Un vecteur $u\in E=E^{**}$ est un tenseur de type $(0,1)$.

— Une application linéaire $A : E \to F$ peut être considéré comme un tenseur $\tilde{A} \in (E^* \otimes F)$ de type $(1,1)$ défini par :

$$\tilde{A}(u,\alpha) = \alpha(A(u)), \qquad u \in E, \alpha \in F^*$$

— La métrique $g(.,.)$ sur E est un tenseur de type $(2,0)$ symétrique.

Définition 10.0.2. Si $\alpha, \beta \in E^*$, on note $(\alpha \otimes \beta) \in (E^* \otimes E^*)$ le tenseur de type $(2,0)$ défini par

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v) \in \mathbb{R}$$

appelé **produit tensoriel.**
On note :

$$\alpha \wedge \beta := (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) \in \Lambda^2(E)$$

appelé **produit extérieur,** qui est un tenseur antisymétrique car

$$(\alpha \wedge \beta)(u_2,u_1) = \alpha(u_2)\beta(u_1) - \beta(u_2)\alpha(u_1) = -(\alpha \wedge \beta)(u_1,u_2)$$

La proposition suivante généralise la relation (8.0.2) page 65 que l'on avait pour les formes linéaires.

Proposition 10.0.3. *Si $(e_1, \dots e_n)$ est une base de l'espace vectoriel E, et $(e^{*i})_i$ est la base duale (base de E^*) alors $(e^{*i} \otimes e^{*j})_{i,j}$ est une base de $(E^* \otimes E^*)$ donc $\dim(E^* \otimes E^*) = n^2$, etc.*
Un tenseur $T \in (E^* \otimes E^*)$ de type $(2,0)$ s'écrit dans cette base :

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T_{i,j}\left(e^{*i} \otimes e^{*j}\right)$$

avec $T_{i,j} = T(e_i,e_j) \in \mathbb{R}$ qui sont ses composantes.

La proposition précédente se généralise pour des tenseurs de type (p,q) quelconques.

Exercice 10.0.4. Par exemple, $A \in E^* \otimes E$ de type $(1,1)$ (qui est une application linéaire $A : E \to E$) se décompose :

$$A = \sum_{i,j} A_i^j\left(e^{*i} \otimes e_j\right) = \sum_{i,j} A_i^j |e_j\rangle \otimes \langle e^{*i}|$$

où les composantes A_i^j sont les "éléments de matrice" définis dans (7.0.1) par $A(e_i) = \sum_{i,j} A_i^j e_j$.

Si g est une métrique euclidienne sur un e.v. E et si $(e_1, \dots e_n)$ est une base (quelconque) de E montrer que

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} e^{*i} \otimes e^{*j}$$

en particulier si la base est orthonormée alors

$$g = e^{*1} \otimes e^{*1} + \dots + e^{*n} \otimes e^{*n}$$

Remarque : pour une métrique de Lorentz on a plutot $g = e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*2} \otimes e^{*2} + e^{*3} \otimes e^{*3} - e^{*0} \otimes e^{*0}$.

Exercice 10.0.5. (*) Si ω est une métrique symplectique sur un e.v. E et si $(e_1, \dots e_n, f_1 \dots f_n)$ est une base symplectique de E montrer que

$$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + e_2^* \wedge f_2^* + \dots + e_n^* \wedge f_n^*$$

10.0.1 Changement de Base. Transformation de coordonnées d'un tenseur.

Exercice 10.0.6. Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \dots e_n)$ une base. Soit $P \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme bijective. Soit

$$f_i := P(e_i) = \sum_j P_i^j e_j$$

Ainsi $(f_1, \dots f_n)$ est une nouvelle base. On note

$$\mathbf{P} := \left(P_j^i\right)_{i,j}$$

la matrice des composantes de P qui est la **matrice de passage** entre les deux bases. Attention dans cet exercice, il n'y a pas de métrique.

1. Si $u = \sum_i u^i e_i = \sum_j u'^j f_j \in E$ est un vecteur, on note ses composantes $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'^1 \\ \vdots \\ u'^n \end{pmatrix}$ dans chacune des bases. Montrer que

$$\mathbf{u}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}$$

2. Si $(e^{*1}, \dots e^{*n})$ et $(f^{*1}, \dots f^{*n})$ désignent les bases duales, montrer que

$$e^{*j} = \sum_i P_i^j f^{*i}$$

et si $\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i} = \sum_j \alpha_j f^{*j} \in E^*$ est un vecteur dual, on note ses composantes $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1 \dots \alpha^n)$, $\boldsymbol{\alpha}' = \left(\alpha'^1 \dots \alpha'^n\right)$, montrer que

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}$$

3. Généralisation des deux cas précédents. Si $T \in E^* \otimes E$ est un tenseur de type $(1,1)$, on le décompose dans les bases :

$$T = \sum_{i,j} \mathbf{T}_i^j \left(e^{*i} \otimes e_j \right) = \sum_{i',j'} (\mathbf{T}')_{i'}^{j'} \left(f^{*i'} \otimes f_{j'} \right)$$

Montrer que ses composantes sont reliées par

$$(\mathbf{T}')_{i'}^{j'} = \sum_{i,j} \mathbf{P}_{i'}^{i} \left(\mathbf{P}^{-1} \right)_j^{j'} \mathbf{T}_i^j \tag{10.0.3}$$

Chapitre 11

Spectre et pseudo-spectre d'applications linéaires

Cette Section est très inspirée de la référence [31] très recommandée.

Dans cette section E est un espace vectoriel complexe de dimension finie N, muni d'une norme notée $\|.\|$. On considérera parfois le cas où cette norme est associée à un produit scalaire Hermitien $\|u\|^2 = \langle u|u\rangle$ (on le précisera).

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires $A : E \to E$. La norme de $A \in \mathcal{L}(E)$ est :

$$\|A\| := \max_{u\in E, u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

On utilisera [1] que si A, B sont deux opérateurs (i.e. application linéaires) :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Rappelons (Section 7.0.1 et exercice 10.0.4) que si $(e_i)_{i=1\ldots N}$ est une base de l'espace E, alors l'application linéaire A s'exprime dans cette base sous la forme $\mathbf{A} = \sum_{i,j} A_i^j e_j^* \otimes e_i$ avec des coeficients $\boldsymbol{A} = \left(A_i^j\right)_{i,j}$ formant une matrice.

Dans le cas particulier où $Ae_i = z_i e_i$ avec $z_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i = 1 \ldots N$ (c'est à dire que e_i est vecteur propre) alors la matrice $A_i^j = z_i \delta_i^j$ est diagonale.

11.0.1 Pseudo spectre d'un opérateur de rang fini

11.0.1.1 Définition du spectre d'un opérateur

Rappelons que si $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ alors $A \in \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme (car en dimension finie A injective $\Leftrightarrow$ A bijective), donc inversible. On note $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire inverse.

1. En effet $\|AB\| = \max_{u\in E, u\neq 0} \frac{\|ABu\|}{\|u\|} \leq \max_{u\in E, u\neq 0} \frac{\|A\|\|Bu\|}{\|u\|} = \|A\| \|B\|$

Définition 11.0.1. L'**ensemble résolvent** est

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C},\ (z - A) \text{ inversible}\}$$

Le complémentaire

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

s'appelle le **spectre** de A.

Pour $z \in \rho(A)$, on appelle

$$R_A(z) := (z - A)^{-1}$$

l'opérateur **résolvente** de A en z.

Remarque 11.0.2.

1. Le spectre $\sigma(A)$ ne dépend pas du choix de la norme. On rappelle que si $z \in \sigma(A)$, alors z est une valeur propre, car il existe $u \in E$, $u \neq 0$ tel que $Au = zu$ soit :

$$(A - z)\, u = 0$$

2. Noter que si z se rapproche de $\sigma(A)$ alors $\|R_A(z)\| \to \infty$. Le pseudo spectre s'intéresse aux valeurs de z proches du spectre pour lesquelles $\|R_A(z)\|$ est grand.

Définition 11.0.3. Le **rayon spectral** de $A \in \mathcal{L}(E)$ est

$$r_s(A) = \max_{z_i \in \sigma(A)} \{|z_i|\}$$

11.0.1.2 Définition du pseudo-spectre

Définition 11.0.4. Pour $\delta > 0$, le **δ-pseudo spectre** est l'ensemble

$$\sigma_\delta(A) := \sigma(A) \cup \left\{ z \in \rho(A), \quad \|R_A(z)\| \geq \frac{1}{\delta} \right\} \tag{11.0.1}$$

Proposition 11.0.5. *Voici d'autres caractérisations équivalentes du δ-pseudo-spectre :*

$$\sigma_\delta(A) := \{z \in \mathbb{C}, \quad z \in \sigma(A + P), P \text{ opérateur } \|P\| \leq \delta\}$$
$$\sigma_\delta(A) := \{z \in \mathbb{C}, \quad z \in \sigma(A + P), P \text{ opérateur de rang } 1, \|P\| \leq \delta\} \tag{11.0.2}$$

Autrement dit, c'est l'union des spectres pour tous les opérateurs $A + P$ où P est une perturbation (il suffit qu'elle soit de rang 1).

Voici une 3eme caractérisation équivalente :

$$\sigma_\delta(A) = \{z \in \mathbb{C}, \quad \exists u \in E, u \neq 0, \ t.q. \ \|(A - z)\, u\| \leq \delta \|u\|\} \tag{11.0.3}$$

Autrement dit, ce sont les valeurs de z pour lesquelles il existe un δ-quasimode. On dit que z est une δ-quasi-valeur propre.

Démonstration. Notons $\sigma_\delta^{(1)}(A), \sigma_\delta^{(2)}(A), \sigma_\delta^{(3)}(A)$ les ensembles définis respectivement par (11.0.1),(11.0.2),(11.0.3). Pour montrer qu'ils sont égaux, on va montrer que

$$\sigma_\delta^{(1)}(A) \subset \sigma_\delta^{(3)}(A) \subset \sigma_\delta^{(2)}(A) \subset \sigma_\delta^{(1)}(A).$$

Si $z \in \sigma_\delta^{(1)}(A)$, alors $\left\|(z-A)^{-1}\right\| \geq 1/\delta$. Donc il existe $v \in E$ tel que $\left\|(z-A)^{-1}v\right\| \geq \frac{1}{\delta}\|v\|$. Posons $u = (z-A)^{-1}v$. Alors $\delta\|u\| \geq \|(z-A)u\|$ et on déduit que $z \in \sigma_\delta^{(3)}(A)$.

Si $z \in \sigma_\delta^{(3)}(A)$, alors $\|(A-z)u\| \leq \delta\|u\|$ avec $u \neq 0$. Posons $v = (z-A)u$. On a $\|v\| \leq \delta\|u\|$. Soit $w^* \in E^*$ telle que $w^*(u) = 1$ et $\|w^*\| = \frac{1}{\|u\|}$. Alors

$$\begin{aligned} zu &= Au + (z-A)u = Au + v.w^*(u) \\ &= (A+P)(u) \end{aligned}$$

avec $P = v \otimes w^*$ opérateur de rang 1. On a $\|P\| = \|v\|\|w^*\| = \frac{\|v\|}{\|u\|} \leq \delta$ donc $z \in \sigma_\delta^{(2)}(A)$.

Si $z \in \sigma_\delta^{(2)}(A)$, alors $(A+P)v = zv$ avec $\|P\| \leq \delta$ donc $(z-A)v = Pv$. Supposons $z \notin \sigma(A)$, donc $v = (z-A)^{-1}Pv$ et $\|v\| \leq \|R_A(z)\|\|P\|\|v\|$ soit $\|R_A(z)\| \geq \frac{1}{\|P\|} \geq \frac{1}{\delta}$. Donc $z \in \sigma_\delta^{(1)}(A)$. □

Proposition 11.0.6. *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ et $z \in \rho(A)$ alors*

$$\|R_A(z)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}$$

(où $\operatorname{dist}(z,\sigma(A)) := \min_{z_i \in \sigma(A)} |z - z_i|$).

Démonstration. On a

$$\sigma(R_A(z)) = \left\{\frac{1}{(z-z_i)}, z_i \in \sigma(A)\right\}$$

et

$$\|R_A(z)\| \geq r_s(R_A) = \max_i\left(\frac{1}{(z-z_i)}\right) = \frac{1}{\min_i (z-z_i)} = \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(A))}$$

□

11.0.1.3 Image numérique (étendue numérique)

On suppose ici que $\langle.|.\rangle$ est un produit scalaire Hermitien sur E et que $\|u\|^2 = \langle u|u\rangle$.

On rappelle que A^+, l'**opérateur adjoint** de $A \in \mathcal{L}(E)$ est défini par $\langle u|A^+v\rangle = \langle Au|v\rangle$ pour tous $u, v \in E$.

Définition 11.0.7. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est **normal** si $[A, A^+] = 0$ (cad $A \circ A^+ = A^+ \circ A$).

Remarquer que un opérateur autoadjoint $A = A^+$ est normal.

Lemme 11.0.8. *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est normal alors il existe une base orthonormale $(e_i)_i$ de E de vecteurs propres de A et A^+ :*

$$Ae_i = z_i e_i, \quad A^+ e_i = \overline{z_i} e_i, \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots \dim E$$

Démonstration. Remarquons que $Ae_i = z_i e_i, \forall i$ et $(e_i)_i$ b.o.n. est équivalent à $A^+ e_i = \overline{z_i} e_i, \forall i$ et $(e_i)_i$ b.o.n. En effet$\langle e_i | A^+ e_j \rangle = \langle Ae_i | e_j \rangle = \overline{z_i} \delta_{i,j}$ donc $A^+ e_j = \overline{z_j} e_j$. Faisons la preuve du Lemme par récurrence sur la dimension de E. Cela est vrai pour $\dim E = 1$. Supposons vrai $n \geq 1$ donné et vrai pour $\dim E = n$. Soit E tel que $\dim E = n+1$. Si e_1 est un vecteur propre de A, considérons le sous espace orthogonal $(e_1)^\perp = \{u \in E, \langle u | e_1 \rangle = 0\}$ qui est préservé par A^+ car $\langle A^+ u | e_1 \rangle = \langle u | Ae_1 \rangle = z_1 \langle u | e_1 \rangle = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base o.n. $(e_2, \dots e_{n+1})$ dans ce sous espace qui vérifie $A^+ e_j = \overline{z_j} e_j$ donc $Ae_j = z_j e_j$. □

Définition 11.0.9. L'**image numérique** de $A \in \mathcal{L}(E)$ est

$$\mathcal{N}(A) := \left\{ \frac{\langle u | Au \rangle}{\langle u | u \rangle}, \quad u \in E, u \neq 0 \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Proposition 11.0.10. *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = 2$ et $\sigma(A) = \{z_1, z_2\}$ sont ses deux valeurs propres alors $\mathcal{N}(A)$ est une ellipse de foyers z_1, z_2 et de surface*

$$S = \pi \left| \det([A, A^*]) \right|^{1/2}$$

Démonstration. (Horn p.20). On montre que par conjugaison par un opérateur unitaire on peut se ramener à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 < b < a$. Pour calculer l'image numérique, il suffit de prendre $u = \left(t, e^{i\theta}\right)$,$t, \theta \in \mathbb{R}$ et on obtient une ellipse dont les foyers sont les valeurs propres $z_\pm = \pm\sqrt{ab}$ et les demi-grand/petits axes sont $(a-b)\,, a+b$. La surface est donc $S = \pi(a^2 - b^2)$. Par ailleurs on calcule que $\left|\det([A, A^*])\right|^{1/2} = (a^2 - b^2)$. □

Proposition 11.0.11. *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est normal alors $\mathcal{N}(A)$ est l'enveloppe convexe de son spectre $\sigma(A)$, c'est à dire $\{z \in \mathbb{C}, \sum_i \rho_i z_i\}$ avec $\sum_i \rho_i = 1$.*

Démonstration. Soit $(e_i)_i$ une base o.n. de A. Un vecteur $u \in E$ s'écrit $u = \sum_i u_i e_i$ avec $u_i \in \mathbb{C}$. Supposons $1 = \langle u | u \rangle = \sum_i |u_i|^2$. Alors

$$\langle u | Au \rangle = \sum_{i,j} \overline{u}_i u_j \langle e_i | A_j e_j \rangle = \sum_i |u_i|^2 z_i$$

□

Théorème 11.0.12. *"de Toeplitz-Hausdorff". Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$, son image numérique $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{C}$ est compacte et convexe.*

Démonstration. $\mathcal{N}(A)$ est compacte car c'est l'image de la sphère unité par $u \in B_1 \subset E \to \langle u|Au\rangle \in \mathbb{C}$. Pour montrer la convexité, il faut montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$, et $u, v \in E$ alors

$$\alpha\frac{\langle u|Au\rangle}{\langle u|u\rangle} + (1-\alpha)\frac{\langle v|Av\rangle}{\langle v|v\rangle} \in \mathcal{N}(A).$$

Pour cela on considère le sous espace de dimension 2 engendré par u, v et on se ramène au cas de l'ellipse en Proposition 11.0.10 qui est convexe. $\square$

La proposition suivante montre que la norme de la résolvente "décroit bien" hors de l'image numérique. (Considérer le cas de la matrice de Jordan pour illustrer cela).

Proposition 11.0.13. *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ et $z \notin \mathcal{N}(A)$ alors*

$$\|R_A(z)\| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}\,(z, \mathcal{N}(A))}.$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}\,(z,\mathcal{N}(A)) &= \min_{u,\|u\|=1} |z - \langle u|Au\rangle| = \min_{u,\|u\|=1} |\langle u|(z-A)u\rangle| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \min_{u,\|u\|=1} \|u\|\,\|(z-A)u\| \\
&= \min_{u,\|u\|=1} \frac{\|(z-A)u\|}{\|u\|} = \min_{v,\|v\|=1} \frac{\|v\|}{\left\|(z-A)^{-1}v\right\|} = \frac{1}{\max_{v,\|v\|=1}\left\|(z-A)^{-1}v\right\|} \\
&= \frac{1}{\|R_A(z)\|}
\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on a posé $v = (z-A)u$. $\square$

11.0.2 Valeurs singulières

11.0.2.1 Décomposition polaire

@@ revoir @@

Proposition 11.0.14. *Sur un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire Hermitien ou euclidien $g(.,.) = \langle .,.\rangle$, la **décomposition polaire** [24, p.195] d'un opérateur quelconque $A : E \to E$ est la décomposition orthogonale de l'espace $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ et de A en produit de deux opérateurs :*

$$A = PU \oplus 0$$

où $P : F \to F$ est hermitien ($P^+ = P$) et positif (valeurs propres > 0) et $U : F \to F$ est unitaire ($U^+ = U^{-1}$). Remarque :

Démonstration. Pour obtenir une expression explicite de P et U, remarquons que AA^+ est un opérateur hermitien (en effet $(AA^+)^+ = AA^+$) et positif (en effet $\langle u, AA^+u\rangle = \langle A^+u, A^+u\rangle = \|A^+u\|^2 \geq 0$). Alors P est donné par $P := \sqrt{AA^+}$ (ce qui signifie que P a les même espaces propres que AA^+ mais ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_j}$ avec $\lambda_j \geq 0$ étant les valeurs propres de AA^+). On note aussi $P = |A| = \sqrt{AA^+}$. Si les $\lambda_j > 0$, alors P est inversible et on pose $U := P^{-1}A$. Alors $UU^+ = P^{-1}AA^+P^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = 1$ donc U est unitaire. Pour les espaces propres où $\lambda_j = 0$, on choisit $U = I$ (par exemple, c'est arbitraire). $\square$

Remarque 11.0.15.
- A admet une autre décomposition polaire $A = U'P'$. C'est une construction analogue avec $P' = \sqrt{A^+A}$. Comme $P'^2 = U^{-1}P^2U$ on déduit que P et P' ont les même valeurs propres positives $\lambda_j \geq 0$ appelées **valeurs singulières** de l'opérateur A.
- On a que A est normal (cad $[A, A^+] = 0$) si et seulement si $[U, P] = 0$. Dans ce cas les espaces propres de A coincident avec les espaces propres orthogonaux de P.

Plus généralement on a

Proposition 11.0.16. *Si $A : (E_1, \langle .,. \rangle_1) \to (E_2, \langle .,. \rangle_2)$ est une application linéaire entre deux espaces Hermitiens (ou euclidiens) sa **décomposition polaire** (ou **décomposition en valeurs singulières**) s'écrit*

$$E_1 = F_1 \overset{\perp}{\oplus} G_1, \qquad E_2 = F_2 \overset{\perp}{\oplus} G_2$$

$$A = PU \oplus 0 = U'P' \oplus 0$$

où $P : F_2 \to F_2$ est hermitien ($P^+ = P$) et positif (valeurs propres > 0), $U : F_1 \to F_2$ est unitaire ($U^+ = U^{-1}$), et où $P' : F_1 \to F_1$ est hermitien ($P'^+ = P'$) et positif (valeurs propres > 0), $U' : F_1 \to F_2$ est unitaire ($U'^+ = U'^{-1}$).

Démonstration. On a $A^+ : E_2 \to E_1$ et on remarque que $AA^+ : E_2 \to E_2$ est un opérateur hermitien positif, c'est à dire que $(AA^+)^+ = AA^+$et $\langle u, AA^+u \rangle_2 = \langle A^+u, A^+u \rangle_1 = \|A^+u\|_1^2 \geq 0$. On pose donc $P := \sqrt{AA^+}$ (ce qui signifie que P a les même espaces propres que AA^+ mais ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_j}$ avec $\lambda_j \geq 0$ étant les valeurs propres de AA^+). P peut avoir des valeurs propres nulles. On note $F_2 := \mathrm{Im}P$, $G_2 := \mathrm{Ker}P$. On a la décomposition $E_2 = F_2 \overset{\perp}{\oplus} G_2$, et $P = P_2 \oplus 0$ avec $P_2 : F_2 \to F_2$ inversible. On pose $U := \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) \circ A : E_1 \to E_2$. Alors $U^+ = A^+ \circ \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) : E_2 \to E_1$ et

$$\begin{aligned} UU^+ &= \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) AA^+ \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) = \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) P^2 \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) = \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) \left(P_2^2 \oplus 0\right) \left(P_2^{-1} \oplus 0\right) \\ &= \mathrm{Id}_{F_2} \oplus 0 \end{aligned}$$

Posons $F_1 = \mathrm{Im}U^+$. Alors $U^+ : F_2 \to F_1$ est unitaire car pour $u \in F_2$, $\|U^+u\|^2 = \langle U^+u, U^+u \rangle = \langle u, UU^+u \rangle = \|u\|^2$. $\square$