Université Grenoble Alpes, Master 2 Physique.
Travail dirigé (TD) de géométrie et topologie pour la physique. Frédéric Faure.

TD. **Géométrie différentielle 6 : théorie des champs de Jauge : modèles de Yang Mills**

Table des matières

1 Espace fibré vectoriel et dérivée covariante **1**

2 Les équations de Yang Mills et équations de Maxwell en théorie de Jauge **2**

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web.

1 Espace fibré vectoriel et dérivée covariante

Dans cette section on étudie quelques aspects des espaces fibrés vectoriels munis d'une connexion. Ces objets géométriques sont à la base de la formulation des équations de Maxwell et des équations de Yang-Mills modélisant les forces fondamentales en physique dans le cadre des « théories de Jauge ».

On rappelle quelques définitions (voir cours).

Définition 1.1. Si M est une variété, un **espace fibré vectoriel complexe F de rang r** est une collection d'espaces vectoriels F_x paramétrés par $x \in M$ tels que $\mathrm{dim} F_x = r$, et pour chaque point $x \in M$, il existe un voisinage U et un difféomorphisme $\varphi : \bigcup_{x\in U} F_x \to U \times \mathbb{C}^r$ (à x fixé, $\varphi : F_x \to \{x\} \times \mathbb{C}^r$ est linéaire) appelé **trivialisation locale**.

On note la projection $\pi : F \to M$ telle que $\pi(F_x) = x$. Une section de F notée $s \in C^\infty(M; F)$ est une application $s : M \to F$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}$.

Un fibré est souvent noté $F \to M$.

Définition 1.2. Si $F \to M$ est un fibré vectoriel, une **dérivée covariante (ou connexion)** est une application linéaire

$$D : C^\infty(M; F) \to C^\infty\left(M; \Lambda^1(TM) \otimes F\right)$$

telle que on ait la règle de Leibnitz $\forall s \in C^\infty(M; F), \forall f \in C^\infty(M)$,

$$D(fs) = (df)s + fD(s).$$

La dérivée covariante est naturellement étendue aux formes différentielles de degré p :

$$D : C^\infty(M; \Lambda^p(TM) \otimes F) \to C^\infty\left(M; \Lambda^{p+1}(TM) \otimes F\right)$$

par la régle de Leibnitz $\forall s \in C^\infty(M; F), \forall \alpha \in C^\infty(M; \Lambda^p(TM))$

$$D(\alpha s) = (d\alpha)s + (-1)^p \alpha \wedge D(s).$$

Proposition 1.3. *On a* $\forall s \in C^{\infty}(M; \Lambda^{\bullet}(TM) \otimes F)$

$$D^2 s = \Omega \wedge s$$

avec un tenseur $\Omega \in C^{\infty}(M; \Lambda^2(TM) \otimes \mathrm{End}(F))$ *appelé* ***courbure****.*

Définition 1.4. Un **fibré hermitien** est un fibré vectoriel tel que chaque fibre possède un produit scalaire Hermitien noté $h_x : F_x \times F_x \to \mathbb{C}$ ou noté $\langle s_x | s'_x \rangle_h = h(s_x, s'_x)$. On dit que la dérivée covariante est **compatible** avec la métrique si $\forall s, s' \in C^{\infty}(M; F)$,

$$d\langle s|s'\rangle_h = \langle Ds|s'\rangle_h + \langle s|Ds'\rangle_h.$$

Dans ce cas la courbure Ω est un tenseur à valeur dans $\Lambda^2(TM) \otimes \mathrm{u}(F)$ (ou $\Lambda^2(TM) \otimes \mathrm{su}(F)$).

On rappelle que la métrique g sur M induit une forme volume $\mu_g \in C^{\infty}(M; \Lambda^n(TM))$ sur M, avec $n = \dim M$, et un produit scalaire sur chaque espace $\Lambda^{\bullet}(T_x M)$. Avec de plus la métrique hermitienne $\langle . | . \rangle_h$ sur chaque fibre F_x, on peut définir un produit scalaire sur chaque fibre $\Lambda^p(T_x M) \otimes F_x$. Le produit scalaire induit dans $\mathrm{Herm}(F_x)$ est appelé le produit scalaire de Hilbert-Schmidt : si F est un espace vectoriel hermitien, et $A, B \in \mathrm{End}(F)$ qui s'écrit aussi

$$\langle A|B\rangle_{H.S.} := \mathrm{Tr}\left(A^{\dagger} B\right).$$

Avec la forme volume, on peut intégrer sur M et obtenir un **produit scalaire** L^2 sur l'espace des sections $C^{\infty}(M; \Lambda^{\bullet}(TM) \otimes F)$ et aussi $C^{\infty}(M; \Lambda^{\bullet}(TM) \otimes \mathrm{End}(F))$ que l'on notera indifféremment $\langle . | . \rangle_{L^2}$.

Exercice 1.5. « Courbure ».

1. Ecrire la preuve de la proposition 1.3 qui montre que $D^2 s = \Omega \wedge s$.
2. Dans le cas d'un fibré de rang $r = 1$ Hermitien et d'une connexion $\mathrm{u}(1)$, i.e. compatible, montrer que $\mathcal{F} = i\Omega$ s'identifie à une 2-forme sur M à valeurs réelles.
3. Donner les expression de D et Ω en coordonnées locale et par rapport à une trivialisation locale.

2 Les équations de Yang Mills et équations de Maxwell en théorie de Jauge

Dans cette section on continue l'abstraction et montrons que l'équation de Maxwell (voir TD5) a une écriture plus naturelle en faisant intervenir un espace fibré complexe de rang 1 sur l'espace temps M. Pour cela on part d'une expression générale pour un fibré de rang r, appelée modèle de Yang-Mills ou « théorie de Jauge non abélienne », et on dérive par la méthode variationnelle les équations qui modèlisent les forces fondamentales de la physique (forces nucléaires dans le cas $r = 2, 3$) et les forces électromagnétiques (équations de Maxwell, cas $r = 1$).

Références en physique : Itzikson-Zuber [2, p.31], Voir [3] ou [1].

Définition 2.1. On considère une variété Lorentzienne (M,g) et un espace fibré complexe hermitien de rang r, $F \to M$, muni d'une connexion (ou dérivée covariante) D compatible avec la métrique Hermitienne h. On note Ω la courbure du fibré F. Soit $s \in C^{\infty}(M;F)$ une section de ce fibré et un paramètre fixé $m>0$. L'**action de Yang-Mills** est définie par

$$I(s,D) := \langle Ds|Ds\rangle_{L^2} - m^2\langle s|s\rangle_{L^2} - \langle\Omega|\Omega\rangle_{L^2} \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

que l'on considère comme dépendant de la section s et de la connexion D.

Signification physique : Les équations la physique (i.e. la configuration de s et D) correspondent aux point critiques de l'action considérée comme fonction de s, D, i.e. t.q. $\partial_{s,D} I = 0$. Voici les termes utilisés en physique pour ce modèle géométrique. En physique $\dim M = 4$, la variété Lorentzienne (M,g) avec la métrique g de signature $(1,3)$, modélise l'**espace-temps**. La courbure Ω de la connexion est appelée **« champ de Jauge des bosons intermédiaires »** sur l'espace temps (c'est le champ **électromagnétique** dans le cas $r=1$) et la section s décrit un champ de particules de masse m et de spin 0 (car on n'a pas considéré le spin dans ce modèle). Voici plus précisément des exemples de modèles physiques selon la valeur de la dimension des fibres $r = \dim F_x$:

— Cas rang $r=1$: c'est la théorie **« électromagnétique »**. La courbure Ω à valeur dans $\mathrm{u}(1) \equiv \mathbb{R}$, a $r^2=1$ composante (idem champs scalaire), appelé le **champs de photon** γ qui est générateur du sous groupe $U(1)$. La section s décrit une particule de masse m soumise à ces champs de « forces électromagnétique » donc une particule chargée de spin 0, comme un pion π^+ ou π^-.

— Cas rang $r=2$: c'est la théorie **« d'interaction électro-faible ».** La courbure Ω à valeur dans $\mathrm{u}(2)$ a $r^2=4$ composantes appelées les **champs de photon γ, boson** Z_0, W_+, W_-. Comme $\mathrm{U}(2) = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$, le photon est générateur du sous groupe $\mathrm{U}(1)$ et les autres de $\mathrm{SU}(2)$. La section s a $r=2$ composantes et décrit une particule de masse m soumises à ces champs de “forces électro-faibles”. Remarque : dans le modèle standard de la physique, l'action est en fait plus compliquée que ci-dessus avec la présence du champs de Higgs, responsable d'une “brisure de symmétrie”.

— Cas rang $r=3$: c'est la théorie “**Quantum ChromoDynamique**” (Q.C.D.) ou **“théorie de la force nucléaire forte**” ou **“interaction forte**”. La courbure Ω à valeur dans $\mathrm{u}(3)$ a $r^2=9$ composantes appelées les **champs de photon γ, et de gluons** $(g_i)_{i=1\ldots 8}$. Comme $\mathrm{U}(3) = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(3)$, le photon est générateur du sous groupe $\mathrm{U}(1)$ et les autres de $\mathrm{SU}(3)$. La section s a $r=3$ composantes, appelées “**couleurs**” R, V, B et décrit une particule de masse m de spin 0 soumises à ces champs de “forces nucléaires fortes” comme les champs de quarks (mais en physique les quarks ont un spin 1/2).

Exercice 2.2. « Ecriture de l'action dans un système de coordonnées locales ». Le but de cet exercice est de montrer que l'expression géométrique de l'action (2.1) correspond à l'expression habituelle que l'on trouve dans les livres de physique [2, p.31], dans le cas d'une métrique de Minlowski et le cas $r=1$.

1. On suppose un système de coordonnées locales sur M, (x_0,x_1,x_2,x_3), et on note $g = \sum_{i,j=0}^{3} g_{i,j}dx^i \otimes dx^j$ la métrique de Lorentz de signature $(1,3)$. Supposons que σ soit une trivialisation unitaire du fibré F (cad $|\sigma(x)|=1$, $\forall x \in M$) alors on écrit la section

$$s(x) = \psi(x)\,\sigma(x)$$

où $\psi \in C^{\infty}(M;\mathbb{C})$ est une fonction complexe sur l'espace-temps (champs scalaire complexe). On définit la 1-forme de connexion $A = i\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j dx^j$ sur M par $D\sigma = A\sigma$. Montrer que les composantes sont réelles $\mathcal{A}_j(x) \in \mathbb{R}$ et que

$$Ds = \sum_j \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^j} + i\mathcal{A}_j\psi\right) dx^j \otimes \sigma$$

2. On définit la courbure par $\Omega = dA$, et notons (comme dans les livres de physique)

$$(g)^{ij} := \left(g^{-1}\right)_{i,j}, \qquad \mathcal{A}^i := g^{ij}\mathcal{A}_j, \qquad \partial_i \psi := \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \qquad \partial^i \psi := g^{ij}\partial_j \psi$$

Par ailleurs posons

$$\mathcal{F} := i\Omega \in C^\infty\left(M; \Lambda^2 (TM)\right)$$

qui est une 2 forme à valeurs réelles. On écrit ses composantes $\mathcal{F} = \sum_{i,j} \mathcal{F}_{i,j} dx^i \otimes dx^j$. Montrer que l'action (2.1) s'écrit $I(s, D) = \int \mathcal{L}_s(x)\, d^4x$ avec la « densité Lagrangienne »

$$\mathcal{L}_s(x) = \sum_i \overline{\left(\partial^i \psi + i\mathcal{A}^i \psi\right)} \left(\partial_i \psi + i\mathcal{A}_i \psi\right) - m^2 |\psi|^2 - \sum_{i,j} \mathcal{F}_{i,j}\mathcal{F}^{i,j}. \tag{2.2}$$

Cette expression sert de définition dans les livres de physique, comme [2, p.31].

Exercice 2.3. « Formulation variationnelle de l'équation de Maxwell ». Le but de cet exercice est de considérer le cas $r = 1$ et de montrer comment on obtient les équations de Maxwell de l'électromagnétisme à partir de l'action de Yang-Mills (2.1).

1. Montrer que l'action $I(s, D)$, (2.1), est extrémale par rapport aux variations de la section s si et seulement si s vérifie l'équation de "**Klein-Gordon**"

$$D^\dagger D s - m^2 s = 0 \tag{2.3}$$

où $D^\dagger$ est l'adjoint de D

$$D^\dagger : C^\infty\left(\Lambda^p \otimes F\right) \to C^\infty\left(\Lambda^{p-1} \otimes F\right).$$

Montrer que dans un système de coordonnée (2.3) s'écrit :

$$\overline{\left(\partial^i + iA^i\right)} \left(\partial_i + iA_i\right)\psi + m^2 \psi = 0$$

2. Montrer que l'action $I(s, D)$, (2.1), est extrémale par rapport aux variations de la connexion D si et seulement l'équation de "**Maxwell**" est vérifiée :

$$d^\dagger \Omega = \langle Ds | s \rangle_{F_x} \tag{2.4}$$

Montrer que dans un système de coordonnée (2.4) s'écrit (cf [2, (1-160) p.31]) :

$$d^\dagger \mathcal{F} = J = \sum_\iota \overline{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + iA_i \psi\right)} \psi$$

References

[1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes.* 1987.

[2] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory.* 1980.

[3] J.J. Sakurai. *Advanced quantum mechanics.* 1967.