TD. **Géométrie différentielle 5 : géométrie (pseudo) Riemanienne et électromagnétisme**

Table des matières

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web et les solutions aux exercices.

1 Opérateur adjoint $d^{\dagger}$ et Laplacien $\Delta = \left(d + d^{\dagger}\right)^2 = dd^{\dagger}+d^{\dagger}d$

On considère une variété Riemanienne ou Lorentzienne (M, g) orientable.

Rappels :

— On a défini l'opérateur dérivée extérieure sur les formes différentielles

$$d : C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right) \rightarrow C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right).$$

— On a vu que en chaque point $x \in M$, la métrique g induit un produit scalaire $\langle .|. \rangle_g$ sur l'espace des tenseurs antisymétriques $\Lambda^{\bullet}(T_x M)$ et aussi une forme volume μ_g (unique à signe près). Ainsi on a un produit scalaire sur les formes différentielles $\langle .|. \rangle$ définit par

$$\forall \alpha, \beta \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right),$$
$$\langle \alpha | \beta \rangle := \int_{x \in M} \langle \alpha(x) | \beta(x) \rangle_g \mu_g$$

Exercice 1.1. « L'opérateur adjoint $d^{\dagger}$ ». On définit l'opérateur adjoint

$$d^{\dagger} : C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right) \rightarrow C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right)$$

par (la définition générale) :

$$\forall \alpha, \beta \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^{\bullet}(TM)\right), \qquad \langle \alpha | d^{\dagger}\beta \rangle = \langle d\alpha | \beta \rangle.$$

Remarque : on a que $d : C^{\infty}\left(M; \Lambda^{p}(TM)\right) \rightarrow C^{\infty}\left(M; \Lambda^{p+1}(TM)\right)$ augmente le degré et $d^{\dagger} : C^{\infty}\left(M; \Lambda^{p+1}(TM)\right) \rightarrow C^{\infty}\left(M; \Lambda^{p}(TM)\right)$ diminue le degré.

1. Montrer que $\left(d^{\dagger}\right)^2 = 0$.
2. Sur l'espace euclidien $(M = \mathbb{R}, g = dx \otimes dx)$ si $\beta = b(x)\, dx \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^{1}(TM)\right)$ est une 1-forme, montrer que $d^{\dagger}\beta$ est la fonction donnée par :

$$d^{\dagger}\beta = -\left(\frac{db}{dx}\right) \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^{0}(TM)\right) \tag{1.1}$$

3. Sur l'espace Euclidien ($M = \mathbb{R}^2, g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$), si $\beta = \beta_{1,2}(x_1, x_2)(dx_1 \wedge dx_2) \in C^\infty(M; \Lambda^2(TM))$ est une 2-forme, montrer que $d^\dagger\beta$ est la 1-forme donnée par :

$$d^\dagger\beta = \left(\frac{\partial\beta_{1,2}}{\partial x_2}\right) dx_1 - \left(\frac{\partial\beta_{1,2}}{\partial x_1}\right) dx_2 \tag{1.2}$$
$$\in C^\infty\left(M; \Lambda^1(TM)\right) \tag{1.3}$$

4. Sur l'espace Euclidien $M = \mathbb{R}^3$, $g = \sum_{i=1}^3 dx_i \otimes dx_i$, utilisant les notations du TD4, pour une 1 forme $\alpha = \vec{\alpha}.d\vec{x}$, montrer que

$$d^\dagger\alpha = -\mathrm{div}\vec{\alpha},$$

pour une 2 forme $\beta = \vec{\beta}.d^2\vec{x}$, montrer que

$$d^\dagger\beta = -\left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{\beta}\right).d^2\vec{x}$$

pour une 3 forme $\gamma = \gamma_{1,2,3}d^3\vec{x}$, montrer que

$$d^\dagger\gamma = -\vec{\mathrm{grad}}\left(\gamma_{1,2,3}\right)d^2\vec{x}$$

Comparer à l'action de d, cf TD 4.

Exercice 1.2. « Relation $d\star = (-1)^p \star d^\dagger$ avec l'opérateur star de Hodge ».

1. Montrer que sur les p-formes on a

$$d\star = (-1)^p \star d^\dagger$$

où $\star : C^\infty(M; \Lambda^p(TM)) \to C^\infty(M; \Lambda^{n-p}(TM))$ est l'opérateur (ponctuel) star de Hodge défini au TD 4, sur une variété de dimension n. Cela donne $d^\dagger = (-1)^p \star d\star$.

2. Par exemple, refaire les calculs de l'exercice précédent avec cette formule.

Exercice 1.3. « Opérateur de Dirac et opérateur Laplacien ».

Définition 1.4. Sur une variété Riemanienne ou Lorentzienne (M, g), on définit l'**opérateur de Dirac**

$$\begin{aligned} D &:= d + d^\dagger \\ &: C^\infty(M; \Lambda^\bullet(TM)) \to C^\infty(M; \Lambda^\bullet(TM)) \end{aligned}$$

et l'**opérateur Laplacien**

$$\begin{aligned} \Delta &:= D^2 \\ &: C^\infty(M; \Lambda^\bullet(TM)) \to C^\infty(M; \Lambda^\bullet(TM)) \end{aligned}$$

1. Montrer que les opérateurs sont auto-adjoints : $D^\dagger = D, \Delta^\dagger = \Delta$. Montrer que

$$\Delta = d^\dagger d + dd^\dagger$$

et que $\Delta : C^\infty(M; \Lambda^p(TM)) \to C^\infty(M; \Lambda^p(TM))$ préserve le degré. Montrer que sur les fonctions $C^\infty(M; \Lambda^0(TM))$, $\Delta = d^\dagger d$.

2. Dans le cas d'une métrique Eulidienne (définie positive), on a $\langle \alpha|\alpha \rangle = \|\alpha\|^2 \geq 0$, montrer que $\langle \alpha|\Delta\alpha \rangle \geq 0$ (on dit que l'opérateur Δ est positif).
3. En coordonnées locale $(x_1, \dots x_n)$, si $g = \sum_{i,j} g_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j$, on note $\boldsymbol{g}(x) := (g_{i,j})_{i,j}$ la matrice des composantes en chaque point $x \in M$. Montrer que sur une fonction $f \in C^\infty(M; \Lambda^0(TM))$, on a [1, p.137]

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det(\boldsymbol{g})(x)}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\boldsymbol{g}^{-1}(x)\right)^{j,k} \sqrt{\det(\boldsymbol{g})(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} f \right)$$

4. Sur $\mathbb{R}^n$ Euclidien, montrer que $\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ (opposé du Laplacien habituel).
5. Sur $\mathbb{R}^2$ Euclidien, en coordonnées polaires (r, θ) montrer que

$$-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

6. Sur $\mathbb{R}^3$ Euclidien en coordonnées sphériques (r, θ, φ), montrer que pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$-\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

7. Sur $M = \mathbb{R}^4$ avec la métrique de Lorentz $g = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i$, montrer que

$$-\Delta f = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Ainsi $\Delta f = 0$ est l'équation d'onde. Remarque : en physique on note souvent $\square = \Delta$ appelé **d'Alembertien**. Ce n'est pas un opérateur positif car la métrique g n'est pas définie positive.

2 Equations de Maxwell avec les 1-formes

Nous allons donner une écriture géométriques des équations de Maxwell. Maxwell a écrit ces équations en 1865, avec des composantes de champs électrique $\vec{E}(x,t)$ et magnétiques $\vec{B}(x,t)$ en unifiant ainsi différents phénomènes d'électricité et de magnétisme découverts auparavant. Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par changement de référentiel Galiléen (par exemple dans un référentiel, le champ magnétique peut être nul et un champ électrique est présent, alors que dans un autre référentiel le champ magnétique sera non nul). Cependant elles sont invariantes par les transformations de Lorentz (1892). Ce problème a été un indice pour établir la formulation de la relativité par Einstein (1905, 1915). Dans les exercices suivants on montre que dans le cadre de la relativité, les équations de Maxwell admettent une formulation géométrique très simple. Cette formulation sera encore plus naturelle dans le chapitre suivant dans le cadre des fibrés vectoriel (théorie de Jauge).

Définition 2.1. Soit (M, g) une variété Lorentzienne modélisant « l'espace temps ». Soit $\mathcal{A} \in C^\infty(M; \Lambda^1(TM))$ une 1-forme modélisant le « champ électromagnétique » et $\mathcal{J} \in C^\infty(M; \Lambda^1(TM))$ une 1-forme modélisant des « charges ». **L'équation de Maxwell** est la relation

$$\mathcal{J} = d^\dagger d\mathcal{A}. \tag{2.1}$$

Remarque : plus précisément, en physique, l'espace-temps est de dimension 4 et la métrique g est de signature $(1,3)$.

Exercice 2.2. « Conséquences immédiates ». On définit la deux forme

$$F := d\mathcal{A} \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^2(TM)\right) \tag{2.2}$$

appelé « tenseur de courbure electromagnétique » (voir chapitre théorie de Jauge).

1. Montrer que l'équation de Maxwell (2.1) s'écrit
$$\mathcal{J} = d^{\dagger}F \tag{2.3}$$
Montrer que
$$dF = 0. \tag{2.4}$$

2. Montrer que
$$d^{\dagger}\mathcal{J} = 0 \tag{2.5}$$
et que cela s'interpréte comme « une loi de conservation de la charge ».

Exercice 2.3. « Les équations originelles de Maxwell sur un espace plat ». On va montrer que dans le cas d'un espace plat, l'équation (2.1) implique les 6 équations originales de Maxwell ainsi que l'équation de conservation de la charge.

Pour simplifier la démarche, on suppose que l'espace temps s'écrit $M = \mathbb{R}_t \times N$: produit direct de l'axe temporel et de la partie spatiale $N = \mathbb{R}^3_{x_1,x_2,x_3}$. Dans la suite on mettra systématiquement l'indice N pour signifier qu'il s'agit d'un objet géométrique sur la partie spatiale N (qui peut dépendre du temps t). Dans ces coordonnées (t, x_1, x_2, x_3) sur M la métrique plate de Minkowski est

$$g = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i = -dt \otimes dt + g_N.$$

On écrit

$$\mathcal{A} = Vdt + A_N,$$
$$A_N = \sum_{i=1}^{3} A_i dx_i$$

avec en chaque point $x \in M$, les composantes appelées **potentiel scalaire** $V \in \mathbb{R}$ et **potentiel vecteur** A_N de composantes$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in \mathbb{R}^3$. On définit la 2-forme $F = d\mathcal{A}$ et on écrit

$$F = E_N \wedge dt + B_N \tag{2.6}$$

avec la 1-forme **champ électrique** de composantes $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3) \in \mathbb{R}^3$

$$E_N = \sum_{i=1}^{3} E_i dx_i$$

et la 2-forme **champ magnétique** de composantes $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$,

$$B_N = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

On écrit

$$\mathcal{J} = -\rho dt - J_N$$
$$J_N = \sum_{i=1}^{3} J_i dx_i,$$

avec les composantes appelées **densité de charge** $\rho \in \mathbb{R}$ et **densité de courant** $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3$. (Dans certains livres, on note la coordonnées temporelle $x_0 = t$ ainsi $F = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu,\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$, $\mathcal{J} = \sum_{\mu=0}^{3} \mathcal{J}_\mu dx_\mu$, etc.).

1. Montrer que l'équation (2.2), $F = dA$ s'écrit $E_N = d_N V - \frac{\partial A_N}{\partial t}$ et $B_N = d_N A_N$ donnant

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}\right) \tag{2.7}$$

2. Montrer que l'équation (2.3), $\mathcal{J} = d^\dagger F$ s'écrit $J_N = -\frac{\partial E_N}{\partial t} - d_N^\dagger B_N$, $\rho = -d_N^\dagger E_N$ donnant

$$\vec{J} = \vec{\text{rot}}\left(\vec{B}\right) - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \rho = \text{div}\left(\vec{E}\right) \tag{2.8}$$

3. Montrer que l'équation (2.4), $dF = 0$ s'écrit $d_N E_N + \frac{\partial B_N}{\partial t} = 0$, $d_N B_N = 0$, donnant

$$\text{div}\left(\vec{B}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = 0 \tag{2.9}$$

4. Montrer que l'équation (2.5), $d^\dagger \mathcal{J} = 0$ s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} - d_N^\dagger J_N = 0$ donnant la « conservation de la charge » :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\left(\vec{J}\right) = 0 \tag{2.10}$$

Exercice 2.4. « invariants électromagnétiques » En physique, une quantité géométrique est aussi appelé « invariant » car indépendantes des coordonnées. Considérons l'équation de Maxwell $\mathcal{J} = d^\dagger dA$ sur une variété Lorentzienne générale (M, g). Si $f \in C^\infty\left(M; \Lambda^0(TM)\right)$ est une fonction, on pose $A' = A + df$ (appelé **changement de Jauge**).

1. Montrer que par changement de Jauge F est inchangée.
2. A partir de la définition $F = E \wedge dt + B$ ci-dessus, montrer que

$$\langle F|F\rangle_g = \left\|\vec{B}\right\|^2 - \left\|\vec{E}\right\|^2$$

$$F \wedge F = 2\left(\vec{E}.\vec{B}\right)\mu_{vol}$$

3. Posons la 3-forme $K := A \wedge F$. Montrer que K est fermée :

$$dK = 0.$$

   Par changement de Jauge, montrer que K devient $K' = K + d\beta$ avec une deux forme β, i.e. $K' - K$ est exacte. Cela implique que la classe de Cohomologie de K ne dépend pas du choix de Jauge. Cf livre de Alves Rodrigues, Capelas de Oliveira - « The Many Faces Of Maxwell, Dirac And Einstein Equations » (2007)

Exercice 2.5. « Formulation variationnelle de l'équation de Maxwell ». Soit (M, g) une variété Lorentzienne et des 1-formes $A \in C^\infty\left(M; \Lambda^1(TM)\right)$, $\mathcal{J} \in C^\infty\left(M; \Lambda^1(TM)\right)$. En tout point $x \in M$ on définit la **densité Lagrangienne électromagnétique**. On définit l'**action électromagnétique** :

$$I_{A,\mathcal{J},g} := -\frac{1}{2}\langle dA|dA\rangle_g + \langle A|\mathcal{J}\rangle_g$$

Montrer que $I_{A,\mathcal{J},g}$ est extrémale pour des variations à support compact de A si et seulement si l'**équation de Maxwell** $d^\dagger dA = \mathcal{J}$ est vérifiée.

Références

[1] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I.* Springer, 1996.