Université Grenoble Alpes, Master 2 Physique.
Travail dirigé (TD) de géométrie et topologie pour la physique. Frédéric Faure.

TD. **Géométrie différentielle 4 : formes différentielles**

Table des matières

1 Tenseurs antisymétriques ou formes différentielles **1**

2 Formule de Stokes **4**

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web et les solutions aux exercices.

Références : [2], [4]

1 Tenseurs antisymétriques ou formes différentielles

Bien que particuliers, les tenseurs antisymétriques ont une grande importance en géométrie du fait qu'un champ de tenseur antisymétrique d'ordre n sur une variété de dimension n donne un nombre par intégration et aussi du fait de l'existence d'un opérateur de dérivation naturel d appelé dérivée extérieure et vérifiant $d\circ d=0$.

Exercice 1.1. « Formes volumes et intégration ». Sur une variété de dimension n, une **formule volume** μ est un champ de tenseur antisymétrique d'ordre n (aussi appelé n-formes différentielle) : $\mu\in C^{\infty}\left(M;\Lambda^{n}\left(TM\right)\right)$.

1. En coordonnées locales $(x_1,\dots x_n)$, montrer que la seule composante
$$\mu_{1,\dots n}\left(x\right):=\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_{1}},\frac{\partial}{\partial x_{2}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_{n}}\right)\in\mathbb{R}$$
caractérise la forme volume μ. Montrer que l'intégrale numérique multiple $\left|\int\mu_{1,\dots n}\left(x\right)dx_{1}\dots dx_{n}\right|\geq 0$ (si elle est bien définie) est invariante par changement de coordonnée (pour cela calculer la composante $\mu'_{1,\dots n}\left(x\right)$ de μ dans des nouvelles coordonnées $(x'_1,\dots x'_n)$ à partir de $\mu_{1,\dots n}\left(x\right)$ et observer que c'est la même formule de transformation que dans une intégrale multiple). On définit donc l'**intégrale de la forme volume** par
$$\int_{M}\left|\mu\right|:=\left|\int\mu_{1,\dots n}\left(x\right)dx_{1}\dots dx_{n}\right|.$$
2. Ainsi, si $\gamma\in M$ est une courbe (dimension 1) et $\alpha\in C^{\infty}\left(M;\Lambda^{1}\left(TM\right)\right)$ une 1-forme sur M, cela donne par restriction une 1-forme α sur γ, et on peut calculer l'**intégrale civiligne** $\int_{\gamma}\alpha$. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, si γ est le cercle de rayon 1, centre 0, et $\alpha=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(x_1dx_2-x_2dx_1\right)$. Montrer que $\alpha=d\theta$ (en coordonnées polaires) et calculer $\int_{\gamma}\alpha$?
3. Plus générallement si $N\subset M$ est une **sous variété de dimension** p et $\alpha\in C^{\infty}\left(M;\Lambda^{p}\left(TM\right)\right)$ **une p-forme sur M,** cela donne par restriction une p-forme α sur N, et on peut calculer l'**intégrale** $\int_N\alpha$.
   (a) Par exemple, sur $\mathbb{R}^3$, si N est la sphère de rayon 1, centre 0, et
$$\alpha=\frac{1}{r^{3}}\left(x^{1}\left(dx^{2}\wedge dx^{3}\right)+x^{2}\left(dx^{3}\wedge dx^{4}\right)+x^{3}\left(dx^{1}\wedge dx^{2}\right)\right).$$
   Montrer que $\alpha=\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$ (en coordonnées sphériques, appelé **angle solide**) et calculer $\int_N\alpha$.

(b) Si $N = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ est le cube de côté 1, et $\alpha = r^2 \sin\theta\,(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi)$, montrer que $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ et calculer $\int_N \alpha$.

Exercice 1.2. « Dérivée extérieure ». Si $\alpha \in C^\infty(M, \Lambda^p(TM))$ est une p-forme différentielle, notée en coordonnées locales $(x_1 \dots x_n)$,

$$\alpha = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_p}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n},$$

on définie sa dérivée extérieure qui est une $(p+1)$-forme par

$$d\alpha := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \frac{\partial \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_p}(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p} \tag{1.1}$$

1. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, soit $\alpha = (x_1 + x_2)\, dx_1$, calculer $d\alpha$. Soit $\beta = x_1 dx_2 + x_2 dx_1$, calculer $d\beta$.
2. Pour montrer que le résultat $d\alpha$ ne dépend pas du choix de système de coordonnées, on va montrer qu'il correspond à la définition suivante qui n'utilise pas de coordonnées :

$$(d\alpha)(V_0, V_1, \ldots V_p) \tag{1.2}$$
$$:= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i V_i \left(\alpha\left(V_0, \ldots, \hat{V}_i, \ldots V_p\right)\right) \tag{1.3}$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha\left([V_i, V_j], V_0 \ldots, \hat{V}_i, \ldots, \hat{V}_j, \ldots V_p\right)$$

   avec des vecteurs $V_0, \ldots V_p \in T_x M$ et où $\hat{V}_i$ signifie que ce terme est absent. Pour s'entrainer, écrire l'expression dans le cas $p = 1$ et montrer que l'expression (1.2) défini bien un tenseur antisymétrique qui coincide avec (1.1).
3. (Optionnel). Montrer que l'expression (1.2) défini bien un tenseur antisymétrique. Montrer que (1.2) coincide avec (1.1).
4. Montrer que
$$d \circ d = 0. \tag{1.4}$$
5. Montrer la formule de Leibnitz si α est une p-forme,
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta). \tag{1.5}$$
6. Montrer que les 4 propriétés suivantes caractérisent uniquement l'opérateur dérivée extérieure d : 1) Linéarité 2) Leibnitz (1.5) 3) (1.4) 4) df est la différentielle d'une fonction f. C'est la « définition axiomatique de la dérivée extérieure ».

Exercice 1.3. « Gradient-rotationel-divergence dans $\mathbb{R}^3$ » sans métrique. On considère l'espace $M = \mathbb{R}^3$ sans métrique. Le but de cet exercice est de montrer la relation entre l'opérateur dérivée extérieur d et les opérations $\vec{\mathrm{grad}}, \vec{\mathrm{rot}}, \mathrm{div}$ utilisées en physique. Attention dans cet exercice on définit et utilise des notations de physique en coordonnées comme $d\vec{x}, d^2\vec{x}$, qui n'ont pas vraiment de sens géométrique.

1. On utilise la base dx_1, dx_2, dx_3 de l'espace cotangent $T_x^* M$. Pour $\lambda \neq 0$, montrer comment les composantes des objets suivants : fonction $f \in C^\infty(M)$, 1-forme $\alpha \in C^\infty(M; T^*M)$, 2-forme $\beta \in C^\infty\left(M; \Lambda^2(TM)\right)$, 3-forme $\gamma \in C^\infty\left(M; \Lambda^3(TM)\right)$ sont modifiées par les changements de coordonnées,
$$D_\lambda : \left(x^1, x^2, x^3\right) \to \left(y^1, y^2, y^3\right) = \left(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3\right)$$
   appelé **dilatation.** En particulier pour $\lambda = -1$, c'est l'opération de **Parité** $D_{-1}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Relier vos résultats aux notions de **scalaire, pseudo-vecteur et pseudo-scalaire** en physique.

2. Si $f \in C^{\infty}(M)$ est une fonction, écrire la 1-forme $\alpha = df \in C^{\infty}(M)$ sous la forme
$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i =: \vec{\alpha}.d\vec{x}$$
de composantes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, notant $d\vec{x} := (dx_1, dx_2, dx_3)$, et montrer que
$$\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{grad}}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$
3. Si $\alpha \in C^{\infty}(M; T^*M)$ est une 1-forme, écrire la 2-forme $\beta = d\alpha \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^2(TM)\right)$ sous la forme
$$\begin{aligned}\beta &= \beta_1 dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2 dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \vec{\beta}.d^2\vec{x}\end{aligned}$$
de composantes $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$, notant $d^2\vec{x} := (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$, et montrer que
$$\vec{\beta} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\alpha}) := \begin{cases} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \end{cases}$$
4. Si $\beta \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^2(TM)\right)$ est une 2-forme, écrire la 3-forme $\gamma = d\beta \in C^{\infty}\left(M; \Lambda^3(TM)\right)$, sous la forme
$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_{1,2,3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &=: \gamma_{1,2,3} d^3\vec{x}\end{aligned}$$
et montrer que
$$\gamma_{1,2,3} = \mathrm{div}\left(\vec{\beta}\right) := \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_3}.$$
5. Que donne la formule générale $d \circ d = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ exprimée avec les opérations $\vec{\mathrm{grad}}, \vec{\mathrm{rot}}, \mathrm{div}$?

Exercice 1.4. « Forme volume métrique μ_g ».[3, p.126]. Sur une variété Riemanienne ou Lorentzienne (M, g), en coordonnées locale $(x_1, \ldots x_n)$, si $g = \sum_{i,j} g_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j$, on note $\boldsymbol{g}(x) := (g_{i,j})_{i,j}$ la matrice des composantes en chaque point $x \in M$.

1. Montrer que la forme volume métrique s'écrit
$$\mu_g = \sqrt{\det(\boldsymbol{g})(x)}\,(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n).$$
2. Dans le cas particulier d'une métrique Euclidenne $g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$, donner l'expression de la forme volume μ_g.
3. Dans le cas particulier de la sphère Euclidienne $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, en coordonnées sphériques (θ, φ) on a $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi$. Déduire l'expression de la forme volume μ_g.

Exercice 1.5. « l'application $\star$ (étoile) de Hodge ». Sur une variété Riemanienne (M, g), on va introduire et étudier l'opérateur $\star$ qui est une opération ponctuelle en un point $x \in M$. On note $\langle . | . \rangle_g$ le produit scalaire [1] induit sur les p-formes et μ_g la forme volume telle que $\|\mu_g\| = 1$ (définie à un signe près). On définit
$$\star : \Lambda^p(T_xM) \to \Lambda^{n-p}(T_xM)$$
l'application de Hodge par
$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^p(T_xM), \quad \alpha \wedge (\star\beta) := \langle \alpha | \beta \rangle_g \mu_g$$

1. Le produit scalaire sur les formes différentielles est défini par le fait que pour un point $x \in M$ donné, si on choisit des coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$ telles que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ est une base orthonormée de T_xM, alors on stipule que $\left(dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_p}\right)_{i_1 < \ldots i_p}$ est une base orthonormée de $\Lambda^p(T_xM)$. En particulier $\mu_g(x) := dx_1 \wedge dx_2 \ldots dx_n \in \Lambda^n(T_xM)$ est de norme 1, appelée la forme volume métrique au point x.

1. Sur l'espace Euclidien $M=\mathbb{R}^2$ avec la métrique $g=\sum_{i=1}^{2} dx_i\otimes dx_i$, calculer $\star$ pour les vecteurs de base $1, dx_1, dx_2, dx_1\wedge dx_2$.
2. Sur l'espace Euclidien $M=\mathbb{R}^n$ avec la métrique $g=\sum_{i=1}^{n} dx_i\otimes dx_i$, calculer $\star$ pour les vecteurs de base $\left(dx_{i_1}\wedge \dots dx_{i_p}\right)_{i_1<\ldots<i_p}$ de l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet\left(T_xM\right):=\bigoplus_{p=0}^{3}\Lambda^p\left(T_xM\right)$.

Remarque 1.6. En physique, on travaille souvent sur l'espace Euclidien $M=\mathbb{R}^3$ avec la métrique Euclidienne

$$g=dx_1\otimes dx_1+dx_2\otimes dx_2+dx_3\otimes dx_3,$$

et on souhaite éviter de parler de formes différentielles (bien que ce soit important) : on se ramène toujours à des fonctions (nombre en un point) ou des vecteurs tangents. Pour cela, on utilise

1. l'application

$$\breve{g}^{-1}:T_x^*M\to T_xM$$

qui transforme un vecteur cotangent (ou 1-forme en un point) en vecteur tangent.

2. l'application de Hodge $\star:\Lambda^2\left(T_xM\right)\to\Lambda^1\left(T_xM\right)=T_x^*M$ qui transforme une 2-forme en 1 forme et donc par composition

$$\breve{g}^{-1}\star:\Lambda^2\left(T_xM\right)\to T_xM$$

transforme une 2-forme en un vecteur tangent. Le résultat est parfois appelé **pseudo-vecteur** en physique.

3. et finalement

$$\star:\Lambda^3\left(T_xM\right)\to\Lambda^0\left(T_xM\right)$$

transforme les 3-formes en fonctions. Le résultat est parfois appelé **pseudo-scalaire** en physique.

Exercice 1.7. (optionnel) « Gradient-rotation-divergence en physique dans $\mathbb{R}^3$ » On souhaite maintenant définir les opérations de gradient, rotationnel et divergence **utilisant uniquement les fonctions et champs de vecteurs** comme cela est sous entendu en physique, sans mentionner les formes différentielles. (voir exercice 1.3 qui utilise seulement les formes différentielles et la dérivée extérieure d qui est la vraie opérations en jeu).

1. Si $f\in C^\infty(M)$ est une fonction on définit le gradient

$$\mathrm{grad}\,(f):=\left(\breve{g}^{-1}d\right)f\in C^\infty\left(M;TM\right)$$

qui est un champ de vecteurs sur M. Calculer les composantes.

2. Si $V\in C^\infty\left(M;TM\right)$ est un champ de vecteurs, on définit le rotationnel

$$\mathrm{rot}\,(V):=\left(\breve{g}^{-1}\star d\breve{g}\right)(V)\in C^\infty\left(M;TM\right)$$

qui est un champ de vecteurs sur M. Calculer les composantes. Montrer que $\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad}=0$.

3. Si $U\in C^\infty\left(M;TM\right)$ est un champ de vecteurs, on définit la divergence

$$\mathrm{div}\,(U):=\left(\star d\star\breve{g}\right)(U)\in C^\infty(M)$$

qui est une fonction sur M. Calculer les composantes. Montrer que $\mathrm{div}\circ\mathrm{rot}=0$.

2 Formule de Stokes

Roman sur l'histoire de la formule : [1].

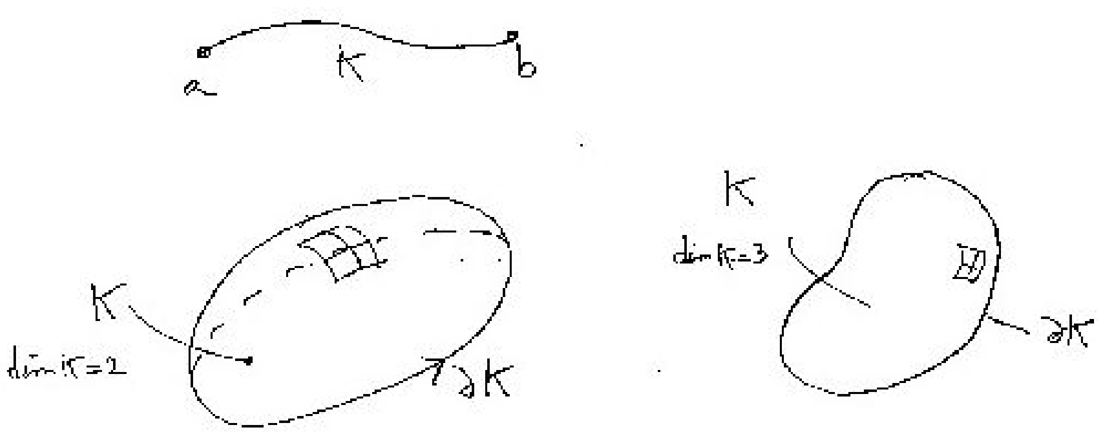
Théorème 2.1. *« Formule de Stockes ». Si M est une variété de dimension $n+1$ de bord ∂M, si α est une n forme sur M, alors*

$$\int_{\partial M}\alpha=\int_M d\alpha. \qquad (2.1)$$

Exercice 2.2. « Preuve de la formule de Stokes ». Remarquer que la formule (2.1) est géométrique, on peut utiliser le choix de systèmes de coordonnées que l'on veut pour l'exprimer.

1. Considérons un choix très simple : tout d'abord dans le cas $n = 1$, $M = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ est le demi plan avec les coordonnées $x_1 \in [-\infty, 0], x_2 \in \mathbb{R}$. Le bord de M orienté est la droite verticale $\partial M = \mathbb{R}$ orienté vers le haut avec la coordonnées x_2. Si α est une 1-forme sur M que l'on écrit $\alpha = \alpha_1(x_1, x_2)\, dx_2 + \alpha_2(x_1, x_2)\, dx_1$, C^∞, à support compact (c'est à dire que α s'annulle au delà d'une certaine distance), exprimer $d\alpha$ en coordonnées et montrer la formule de Stokes
$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha.$$
2. Plus généralement écrire cette preuve dans le cas $M = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n$ et expliquer pourquoi le cas général peut se ramener à ce dernier cas.

Exercice 2.3. « Formule de Stokes utilisée en physique ». Lire la remarque 1.6. Montrer les formules suivantes.



1. sur $\mathbb{R}^2$, si $\alpha = \alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2$ est une 1-forme et $\dim K = 2$, $\dim \partial K = 1$ alors
$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_2} \right) (dx_1 \wedge dx_2)$$
la formule de Stokes donne la **formule de Green-Riemann :**
$$\iint_K \left(\frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{\partial K} (\alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2)$$
2. Sur $\mathbb{R}^3$, si $f(x)$ est une fonction (0-forme), K est une courbe d'extrémitées a, b alors (en notation de la physique)
$$\int_K \vec{\mathrm{grad}} f . d\vec{l} = f(b) - f(a)$$
3. Sur $\mathbb{R}^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\alpha(x)$ est une 1-forme, K est une surface alors (en notation de la physique)
$$\iint_K \vec{\mathrm{rot}} \vec{\alpha} . d^2\vec{s} = \oint_{\partial K} \vec{\alpha} . d\vec{l}$$
4. Sur $\mathbb{R}^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, si $\beta(x)$ est une 2-forme, K est un volume alors (en notation classique) on a la **formule d'Ostrogradski**
$$\iiint_K \mathrm{div} \vec{\beta} . d^3 x = \iint_{\partial K} \vec{\beta} . d^2\vec{s}$$

Exercice 2.4. « Loi de conservation ». On va présenter une version géométrique très simple de ce qui s'appelle loi de conservation en physique. Soit M une variété de dimension n appelée espace-temps. Soit α une $n-1$-forme sur M **fermée**, i.e. $d\alpha = 0$. Soient $S_0, S_1 \subset M$ des hypersurfaces (i.e. sous variétés de dimension $n-1$) qui bordent un sous ensemble $\mathcal{M} \subset M$, i.e. $S_1 - S_0 = \partial\mathcal{M}$. Montrer que

$$\int_{S_1} \alpha = \int_{S_0} \alpha.$$

Remarque 2.5. On appelle α la **densité de charge** et $Q_i := \int_{S_i} \alpha$ la **charge totale** sur l'hypersurface S_i. Ainsi la relation précédente s'écrit $Q_1 = Q_0$: conservation de la charge totale. On retient de cet exercice que pour obtenir une loi de conservation, il faudra obtenir une $n-1$ fermée sur l'espace temps.

Références

[1] Michèle Audin. *La formule de Stokes, roman.* Cassini, 2016.

[2] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Institute of Physics Publishing, 2003.

[3] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I.* Springer, 1996.

[4] M. Dillard-Bleick Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette. *Analysis, manifolds and physics.* North-Holland, 1982.