TD. **Géométrie différentielle 3 : tenseurs**

Table des matières

1 Tenseurs 1

2 Produit tensoriel et composantes de tenseurs 2

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web et les solutions aux exercices.

1 Tenseurs

Définition 1.1. Si M est une variété, un **tenseur** T de type (p,q) (d'ordre $p+q$) au point $x\in M$ est une application

$$T:\underbrace{T_xM\times\ldots\times T_xM}_{p}\times\underbrace{T_x^*M\times\ldots\times T_x^*M}_{q}\rightarrow\mathbb{R}$$

qui est linéaire par rapport à chaque entrée, i.e. $\forall U,V,\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a $T(\ldots,U+V,\ldots)=T(\ldots,U,\ldots)+T(\ldots,V,\ldots)$ et $T(\ldots,\lambda U,\ldots)=T(\ldots,\lambda U,\ldots)$.

Par conséquent le tenseur T est déterminé par ses valeurs sur les vecteurs d'une base, appelées composantes. Attention l'ordre des entrées est important. L'espace des tenseurs de type (p,q) est noté

$$T\in\underbrace{T_x^*M\otimes\ldots\otimes T_x^*M}_{p}\otimes\underbrace{T_xM\otimes\ldots\otimes T_xM}_{q}=\left(T_x^*M^{\otimes p}\right)\otimes\left(T_xM^{\otimes q}\right).$$

Un **tenseur symétrique** est un tenseur de type $(p,0)$ ou $(0,q)$ dont la valeur ne change lorsque on permute deux éléments quelconques :

$$\forall i,j,\forall U,V,\quad T\left(\ldots,\underbrace{U}_{i},\ldots,\underbrace{V}_{j},\ldots\right)=T\left(\ldots,\underbrace{V}_{i},\ldots,\underbrace{U}_{j},\ldots\right).$$

On note $T\in\mathrm{Sym}^p(TM)$ l'espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre p sur TM (i.e. de type $(p,0)$).

Un tenseur antisymétrique est un tenseur de type $(p,0)$ ou $(0,p)$ dont la valeur devient opposée lorsque on permute deux éléments quelconques :

$$\forall i,j,\forall U,V,\quad T\left(\ldots,\underbrace{U}_{i},\ldots,\underbrace{V}_{j},\ldots\right)=-T\left(\ldots,\underbrace{V}_{i},\ldots,\underbrace{U}_{j},\ldots\right).$$

On note $T\in\Lambda^p(TM)$ l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre p sur TM (i.e. de type $(p,0)$).

Un **champ de tenseur** est une application sur M qui à chaque point $x\in M$ associe un tenseur. On note $C^\infty(M;\Lambda^p(TM))$ l'espace des champs de tenseur antisymétrique d'ordre p, etc. Un champ de tenseurs antisymétrique $\alpha\in C^\infty(M;\Lambda^p(TM))$ est aussi appelée **forme différentielle**. Autre exemple, $C^\infty(M;T^*M\otimes TM)$ est l'espace des champs de tenseurs de type $(1,1)$.

Il est important de retenir que par définition, si $\lambda\in C^\infty(M)$ est une fonction, $U\in C^\infty(M;TM)$ un champ de vecteurs et T un champ de tenseurs de type (p,q) (avec $p\geq1$) alors $T(\ldots,\lambda U,\ldots)=\lambda T(\ldots,U,\ldots)$. On s'en servira pour caractériser un champ de tenseur.

Remarque 1.2. De façon intuitive, un vecteur tangent $U\in T_xM$ représente une variation infinitésimale d'un point (i.e. un vecteur vitesse), et un vecteur cotangent mesure une variation infinitésimale d'une fonction (i.e. sa différentielle). Ainsi un tenseur est une généralisation et mesure en un point une variation infinitésimale d'une quantité suite à diverses variations infinitésimales combinées. Il y a bien sûr une définition plus générale de tenseur, où chaque entrée est dans un espace vectoriel qui peut être différent $T:E_1\times\ldots E_n\rightarrow\mathbb{R}$.

Exercice 1.3. (optionnel) « Applications équivalentes associées ». Il est parfois utile de savoir qu'à un tenseur T de type (p,q) comme ci-dessus, on peut associer de façon unique des applications

$$\check{T}:\underbrace{T_xM\times\ldots\times T_xM}_{p}\rightarrow T_xM^{\otimes q}$$

ou son dual

$$\check{T}^*:\underbrace{T_x^*M\times\ldots\times T_x^*M}_{q}\rightarrow T_x^*M^{\otimes p}$$

qui sont linéaires par rapport à chaque entrée et à valeur tensorielles. Plus générallement un terme T_xM à gauche de $\rightarrow$ peut être passé à droite et devient T_x^*M et inversement.

1. Montrer que $(T_x^*M)^*\equiv T_xM$ (identification naturelle)
2. Détailler la définition de $\check{T}$ et $\check{T}^*$?
3. Un tenseur métrique $g:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$ et une forme symplectique Ω sont équivalentes à quelles applications linéaires $\check{g}$ et $\check{\Omega}$?
4. Une application linéaire $A:T_xM\rightarrow T_xM$ est équivalente à quel tenseur ?

   La suite est optionnelle.
5. Montrer que la trace, le déterminant et la décomposition spectrale d'une application linéaire $A:T_xM\rightarrow T_xM$ sont bien définies (i.e. indépendante de la base éventuellement choisie pour la définir). On dit que ce sont des invariants d'une application linéaire et ils apparaissent dans l'expression la plus simple de l'application linéaire avec une base bien choisie, appelée la **forme normale de Jordan**. [1]
6. Quels sont les invariants d'un tenseur symétrique non dégénéré $g:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$? Quelle est sa forme normale ?
7. Si on a un tenseur symétrique non dégénéré $g:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$ et un tenseur antisymétrique non dégénéré $\Omega:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$? Quelle est la forme normale ? Quels sont les invariants ?

Exercice 1.4. « Exemples importants de tenseurs ».

1. Montrer que les objets suivants sont des tenseurs et déterminer leur type et dire si ils sont éventuellement symétrique ou antisymétriques.
   (a) Les tenseurs métrique $g:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$? Les forme symplectique $\Omega:T_xM\times T_xM\rightarrow\mathbb{R}$?
   (b) Un vecteur cotangent $\xi\in T_x^*M$? Un vecteur tangent $U\in T_xM$?
   (c) Une application linéaire $A:T_xM\rightarrow T_xM$?
   (d) Une fonction $f:M\rightarrow\mathbb{R}$?
2. En physique, dire si les objects suivants sont des tenseurs et déterminer leur type :
   (a) la vitesse v ? l'impulsion p ?
   (b) l'énergie potentielle $E_p(x)$? Un champ de forces ?
   (c) le tenseur des contraintes (stress tensor) et le tenseur des déformations (deformation tensor) en mécanique des fluides, voir [1, p.19, p.32][2, p.3,5,7,] ? Le tenseur d'élasticité [2, p.10] ?
   (d) le champ électrique E ? le champ magnétique B ? (voir TD 5) le tenseur électromagnétique F ? (voir TD 5)
   (e) le tenseur de courbure de Riemann R en relativité ? (voir TD 6-2)
   (f) la dérivée covariante en mécanique quantique ? (voir TD 6)

2 Produit tensoriel et composantes de tenseurs

Si T,T' sont deux tenseurs d'ordre p et p', on défini le **produit tensoriel** $T\otimes T'$ d'ordre $p+p'$ comme le tenseur prenant les valeurs (où a,b sont des grandeurs adéquates)

$$(T\otimes T')(a,b):=T(a)\,T'(b)\quad\forall a,b.$$

On note S_p est **le groupe symétrique** des permutations de p éléments. Il y a $p!$ façons de permuter p états. La **signature d'une permutation** σ est $\varepsilon(\sigma)=\pm1$, selon que le nombre de croisements est pair ou impair dans le diagramme de correspondance (figure 2.1).

1. Plus générallement, **une forme normale** est l'expression la plus simple d'un objet mathématique par rapport à des coordonnées bien choisies. La forme normale a souvent l'intérêt de montrer les invariants de l'objet et de simplifier le problème à résoudre.

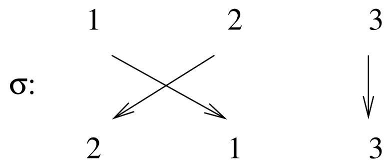

FIGURE 2.1 – Une permutation $\sigma \in S_3$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$, de signature $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Définition 2.1. Si $(x_1, \dots x_n)$ est un système de coordonnées, on pose

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} := \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\, dx_{i_{\sigma(1)}} \otimes dx_{i_{\sigma(2)}} \dots \otimes dx_{i_{\sigma(p)}} \quad \in \Lambda^p$$

qui est un tenseur antisymétrique et le signe $\wedge$ est appelé **produit extérieur**.
On pose

$$dx_{i_1} \odot \dots \odot dx_{i_p} := \sum_{\sigma \in S_p} dx_{i_{\sigma(1)}} \otimes dx_{i_{\sigma(2)}} \dots \otimes dx_{i_{\sigma(p)}} \quad \in \Lambda^p$$

qui est un tenseur symétrique.

Par exemple $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} = dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} - dx_{i_2} \otimes dx_{i_1}$.

Exercice 2.2. « Tenseurs de base par rapport à un systèmes de coordonnées ». Si M est une variété de dimension n et $(x_1, \dots x_n)$ des coordonnées locales, on note dx_j la différentielle de la fonction x_j et $\frac{\partial}{\partial x_k}$ le vecteur tangent selon x_k. Soit $x \in M$ un point.

1. Si $T \in (T_x^* M)^{\otimes p}$ est un tenseur de type $(p, 0)$, montrer que l'on peut écrire de façon unique
$$T = \sum_{i_1, \dots i_p = 1}^{n} T_{i_1, \dots i_p}\, dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_p}$$
avec les composantes $T_{i_1, \dots i_p} := T\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \in \mathbb{R}$. Autrement dit les tenseurs $\left(dx_{i_1} \otimes \dots dx_{i_p}\right)_{i_1, \dots i_p}$ forment une base des tenseurs de type $(p, 0)$. Quelle est la dimension de cet espace ? Remarque : en physique on ne travaille que avec les composantes des tenseurs, appelé tenseur covariant, et **une convention pour les tenseurs de type $(p, 0)$ est de mettre les indices en bas $T_{i_1, \dots i_p}$.**
2. Si $T \in (T_x M)^{\otimes q}$ est un tenseur de type $(0, q)$, montrer que l'on peut écrire de façon unique
$$T = \sum_{i_1, \dots i_q = 1}^{n} T_{i_1, \dots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}$$
avec les composantes $T_{i_1, \dots i_q} = T(dx_1, \dots, dx_q) \in \mathbb{R}$. Autrement dit les tenseurs $\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}\right)_{i_1 \dots i_q}$ forment une base des tenseurs de type $(p, 0)$. Remarque : en physique on ne travaille que avec les composantes des tenseurs, appelé tenseur contravariant, et **une convention pour les tenseurs de type $(0, q)$ est de mettre les indices en haut $T^{i_1, \dots i_q}$.**
3. Si $\alpha \in \Lambda^p(T_x M)$ est un tenseur antisymétrique de type $(p, 0)$, montrer que l'on peut écrire de façon unique
$$\alpha = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$
avec les composantes $\alpha_{i_1, \dots i_p} := \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \in \mathbb{R}$. Autrement dit les tenseurs $\left(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}\right)_{i_1 < \dots < i_p}$ forment une base des tenseurs antisymétriques de type $(p, 0)$. Quelle est la dimension de cet espace $\Lambda^p(T_x M)$ et de l'**algèbre extérieure** $\Lambda^\bullet(T_x M) := \oplus_{p=0}^n \Lambda^p(T_x M)$?

Exercice 2.3. « Contraction d'un tenseur ou trace partielle ». Si $T : T_x M \times T_x M \times T_x^* M \to \mathbb{R}$ est un tenseur de type $(2, 1)$, d'après l'exercice précédent, on peut considérer de façon équivalente $\check{T}_{2,3} : T_x M \to T_x^* M \times T_x M$ où l'image est une application linéaire. On peut donc prendre la trace du résultat et obtenir un tenseur de type $(1, 0)$ appelé trace partielle ou contraction de T par rapports aux entrées 2 et 3 :

$$\mathrm{Tr}_{2,3}(T) := \mathrm{Tr}\left(\check{T}_{2,3}\right) \quad : T_x M \to \mathbb{R}.$$

1. En coordonnées locales $(x_1, \dots x_n)$, donner l'expression de $\mathrm{Tr}_{2,3}(T)$ à partir des composantes de T ? (en respectant la convention des indices en haut/en bas des physiciens)

2. Plus généralement si T est de type (p,q) on peut contracter T et obtenir un tenseur de quel type ?

Exercice 2.4. (Optionnel) « Produit scalaire sur les tenseurs ». Si (M,g) est une variété Riemannienne, on va montrer que g induit un produit scalaire sur chaque espace tensoriel $(T_x^*M)^{\otimes p}$.

Une façon simple est que si $(e_j)_{j=1\to n}$ est une base orthonormée de T_xM, alors on stipule que la base duale $(e_k^*)_k$ de T_x^*M définie par $e_k^*(e_j)=\delta_{k=j}$ est orthonormée. De même la base $\left(e_{i_1}^*\otimes\dots e_{i_p}^*\right)_{i_1,\dots i_p}$ de $T_x^*M^{\otimes p}$ est orthonormée, etc.

Une façon équivalente et plus géométrique (sans utiliser de base) est la suivante qui utilise la trace. Pour deux vecteurs tangents $T,T'\in T_xM$, la métrique $g:T_xM\times T_xM\to\mathbb{R}$ définit un produit scalaire $\langle T|T'\rangle_g := g(T,T')=\sum_{i,j}g_{i,j}T^iT'^j$. On note $\left(g^{-1}\right)^{i,j}$ les éléments de l'inverse de la matrice $(g_{i,j})_{i,j}$. On note l'application linéaire associée $\breve{g}:T_xM\to T_x^*M$ et son inverse $\breve{g}^{-1}:T_x^*M\to T_xM$. On les exprime en coordonnées de la façon suivante, pour un vecteur tangent $U=\sum_i U^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ et un vecteur cotangent $\xi=\sum_j\xi_j dx^j$,

$$(\breve{g}U)=\sum_i g_{i,j}U^i dx^j,\qquad \left(\breve{g}^{-1}\xi\right)=\sum_i\left(g^{-1}\right)^{i,j}\xi_j\frac{\partial}{\partial x_i},$$

1. Si $T,T'\in T_x^*M$ sont deux vecteurs cotangents, utiliser la métrique g et la trace pour définir un nombre noté $\langle T|T'\rangle_g$. Montrer que
$$\langle T|T'\rangle_g=\sum T_iT_j\left(g^{-1}\right)^{i,j}$$
2. Si $T,T':T_xM\times T_xM\times T_x^*M\to\mathbb{R}$ sont des tenseurs de type $(2,1)$, utiliser la métrique et la trace pour définir un nombre noté $\langle T|T'\rangle_g$. Montrer que
$$\langle T|T'\rangle_g=\sum T_{i_3}^{i_1,i_2}T_{j_3}^{j_1,j_2}g_{i_1,j_1}g_{i_2,j_2}\left(g^{-1}\right)^{i_3,j_3}$$
3. Généralement, si T,T' sont des tenseurs de type (p,q), utiliser la métrique et la trace pour définir un nombre noté $\langle T|T'\rangle_g$.

Références

[1] Alexandre Joel Chorin, Jerrold E Marsden, and Jerrold E Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*, volume 3. Springer, 1990.

[2] Jerrold E. Marsden and Thomas J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity.* Dover Publications Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1983 original.