TD. **Géométrie différentielle 2 : métrique g et forme symplectique Ω**

Table des matières

1 Métrique Riemannienne **1**

2 Forme symplectique canonique et équation de mouvement de Hamilton **3**

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web et les solutions aux exercices.

1 Métrique Riemannienne

Une **métrique** g est un champ de produit scalaires Euclidiens sur chaque espace tangent : $\forall x \in M,\ g_x : \begin{cases} T_xM \times T_xM & \rightarrow \mathbb{R} \\ (U,V) & \rightarrow g_x(U,V) \end{cases}$ est bilinéaire, symétrique (i.e. $g(U,V) = g(V,U)$) et non dégénérée, i.e. $\forall V, g(U,V) = 0 \Rightarrow U = 0$. On note $g \in C^\infty(M; \mathrm{Sym}(T^*M \otimes T^*M))$ et g s'écrit en coordonnées $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j$ avec les **composantes** $g_{i,j}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g_{j,i} \in \mathbb{R}$ qui dépendent du point [1]. On dit que (M,g) est une **variété Riemanienne.**

Exercice 1.1. « Application linéaire associée ». A la métrique g, on associe l'application linéaire $\breve{g} : \begin{cases} T_xM & \rightarrow T_x^*M \\ U & \rightarrow \{V \rightarrow g(U,V)\} \end{cases}$. Montrer que $\breve{g}$ est symétrique (i.e. $\breve{g} = \breve{g}^*$) et inversible ($\breve{g}^{-1} : T_x^*M \rightarrow T_xM$).

Exercice 1.2. « Représentation des dual métriques ». Le vecteur cotangent $\breve{g}(U) \in T_x^*M$ est appelé parfois le **dual métrique** du vecteur tangent $U \in T_xM$.

1. Dans le cas d'une métrique Euclidienne $g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$ sur le plan $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$, exprimer $\breve{g}$ dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, (dx_1, dx_2) et représenter graphiquement les vecteurs cotangents $\alpha = \breve{g}(U)$ pour $U = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $U = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1}$, $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$.
2. Faire de même pour la métrique Lorenztienne $g = -dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$ sur le plan $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$ (qui correspond à un « espace x_1 et temps x_2 »), avec les vecteurs $U = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $U = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $U = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $U = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{x_2}\right)$. Remarque : ces deux derniers vecteurs vérifient $g(U,U) = 0$, on dit qu'ils sont sur le « cône de lumière ». En physique, de tels vecteurs duaux $\alpha = \breve{g}(U)$ modélisent l'impulsion de rayons lumineux.

1. dx_j est le vecteur cotangent de base vérifiant $dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{j=k}$ et on verra au TD3 que à partir de deux vecteurs contangents ξ, ξ', on définit $\xi \otimes \xi'$ comme étant la forme bilinéaire définie par $(\xi \otimes \xi')(u,u') = \xi(u)\,\xi'(u')$, $\forall u, u' \in T_xM$.

Par définition, une métrique est **Euclidienne** si il existe un système de coordonnées dans lequel $g = \sum_i dx_i \otimes dx_i$, i.e. les composantes sont sur la diagonale $g_{i,j} = \delta_{i=j}$.

Exercice 1.3. « Métrique Euclidienne en coordonnées polaires ». sur $M = \mathbb{R}^2$, avec les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2), la métrique Euclidienne s'écrit

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 \tag{1.1}$$

1. Ecrire la matrice des composantes. Montrer que en coordonnées polaires ($x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$) :
$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta \tag{1.2}$$
et écrire la matrice des composantes.
2. Montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\theta}\right)$ est une base orthonormée de l'espace tangent.
3. Donner l'expression de $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ et $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$.

Exercice 1.4. « Métrique Euclidienne en coordonnées sphériques ». Sur $M = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3), la métrique Euclidienne s'écrit

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \tag{1.3}$$

1. Ecrire la matrice des composantes. Montrer que en coordonnées sphériques :
$$g = dr \otimes dr + r^2\left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi\right) \tag{1.4}$$
et écrire la matrice des composantes.
2. Montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\theta}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)$ est une base orthonormée de l'espace tangent.
3. Déduire la métrique induite sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de rayon r (fixé) en coordonnées (θ, φ).
4. Donner l'expression de $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ et $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$.

Exercice 1.5. « Produit scalaire induit sur T_x^*M ». Si g est une métrique sur M, on notera aussi $\langle u|v\rangle_{T_xM} = g_x(u,v)$ pour $u, v \in T_xM$. On définit le produit scalaire induit sur T^*M par

$$\forall x \in M, \forall \xi, \eta \in T_x^*M, \quad \langle \xi|\eta\rangle_{T_x^*M} := \left\langle \check{g}^{-1}(\xi)\,|\check{g}^{-1}(\eta)\right\rangle_{T_xM}$$

Autrement dit $\check{g}$ est une isométrie par définition.

1. Montrer que en coordonnées
$$\langle \xi|\eta\rangle_{T_x^*M} = \sum_{i,j} \left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{i,j} \xi_i \eta_j \tag{1.5}$$
où $\boldsymbol{g}^{-1}$ est la matrice inverse de $\boldsymbol{g} = (g_{ij})_{ij}$.

Attention, dans les livres de physique, il est habituel de noter $g_{i,j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} | \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ comme ici, mais de noter $g^{i,j} = \left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)^{i,j}$ avec des indices en haut, mais sans mentionner que c'est la matrice inverse !

Exercice 1.6. « Expression du gradient sur l'espace $\mathbb{R}^3$ Euclidien, en coordonnées cartésiennes et sphériques ».

On rappelle que si $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ est une fonction sur une variété Riemanienne M, en un point $x \in M$, sa différentielle $df \in T_x^*M$ est un vecteur cotangent et son **gradient** est le vecteur tangent

$$(\mathrm{grad}\,(f))_x := \breve{g}_x^{-1}(df_x) \in T_xM. \tag{1.6}$$

Ainsi $\mathrm{grad}\,(f)$ est un champ de vecteur sur M.

Sur le plan $M = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3), on considère la métrique euclidienne

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3. \tag{1.7}$$

1. Montrer que

$$\mathrm{grad}\,(f) = \breve{g}^{-1}(df) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

   Ainsi les composantes de $\mathrm{grad}\,(f)$ en coordonnées cartésiennes sont (la flèche signifie que ce sont des composantes)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) \equiv_{(x^1,x^2,x^3)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right). \tag{1.8}$$

2. Calculer les composantes de $\mathrm{grad}\,(f)$ en coordonnées sphériques dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ de T_xM.
3. Montrer que la base $(u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial \theta}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial \varphi}\right)$ de T_xM est orthonormée, et calculer les composantes de $\mathrm{grad}\,(f)$ dans cette base. Cette expression est utilisée dans les livres de physique.

2 Forme symplectique canonique et équation de mouvement de Hamilton

Soient $(x^1, \dots x^n) \in \mathbb{R}^n$ des coordonnées locales sur une variété M. Un vecteur cotangent est noté $\xi = \sum_j \xi_j dx^j$ et $(\xi_j)_j$ sont ses coordonnées. Ainsi $(x^j, \xi_j)_{j=1\to n} \in \mathbb{R}^{2n}$ forment des coordonnées locales sur l'espace cotangent T^*M.

Soit $(x, \xi) \in T^*M$ un point de l'espace cotangent et

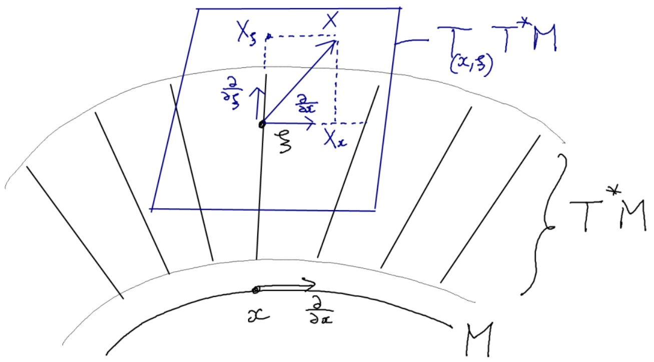
$$X, Y \in T_{(x,\xi)}(T^*M)$$

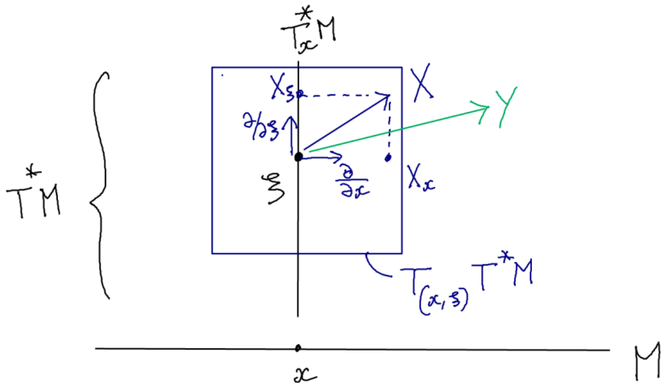
deux vecteurs tangents. Leurs coordonnées $\left(X_{x^j}, X_{\xi_j}\right)_{j=1\to n} \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\left(Y_{x^j}, Y_{\xi_j}\right)_{j=1\to n}$ sont définies par

$$X = \sum_{j=1}^n X_{x^j}\frac{\partial}{\partial x^j} + X_{\xi_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

et de même pour Y. Rappel : $dx^j(X) = X_{x^j}$ etc.

Les schéma suivants représentent la variété M, la variété T^*M comme collection des espaces vectoriels cotangents $(T_x^*M)_{x\in M}$, l'espace tangent $T_{(x,\xi)}T^*M$, les vecteurs tangents $X, Y \in T_{(x,\xi)}T^*M$ ainsi que les coordonnées de X. La deuxième figure est équivalente à la première mais un peu plus schématique et sera utilisé dans la suite.





Définition 2.1. On définit la forme bilinéaire Ω sur $T_{(x,\xi)}\left(T^{*}M\right)$ par

$$\Omega\left(X,Y\right):=\sum_{j=1}^{n}X_{x^{j}}Y_{\xi_{j}}-X_{\xi_{j}}Y_{x^{j}},$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\Omega&=\sum_{j=1}^{n}dx^{j}\otimes d\xi_{j}-d\xi_{j}\otimes dx^{j}\\&=:\sum_{j=1}^{n}dx^{j}\wedge d\xi_{j}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Exercice 2.2. « Application linéaire associée $\check{\Omega}$ ». A la forme bilinéaire Ω,on associe l'application linéaire

$$\check{\Omega}:\begin{cases}T_{(x,\xi)}\left(T^{*}M\right) & \rightarrow T_{(x,\xi)}^{*}\left(T^{*}M\right)\\X & \rightarrow\check{\Omega}\left(X\right):=\left\{Y\rightarrow\Omega\left(X,Y\right)\right\}\end{cases}\tag{2.2}$$

1. Montrer que Ω est antisymétrique, i.e. $\Omega\left(Y,X\right)=-\Omega\left(X,Y\right)$. Montrer que $\check{\Omega}$ est anti-symétrique (i.e. $\check{\Omega}^{*}=-\check{\Omega}$) et inversible (on dit que Ω est non dégénérée).
2. Montrer que Ω est indépendante du choix de coordonnées. On appelle Ω la **forme symplectique canonique** sur $T^{*}M$. On dit que $\left(T^{*}M,\Omega\right)$ est une **variété symplectique**.
3. (Optionnel) Il y a une meilleure façon de présenter ce résultat très important, sans utiliser de coordonnées locales. Pour cela, on définit d'abord la **1-forme de Liouville** η sur $T^{*}M$ par
$$\forall X\in T_{(x,\xi)}T^{*}M,\qquad\eta_{(x,\xi)}\left(X\right)=\xi\left(d\pi\left(X\right)\right),$$

où $\pi : (x, \xi) \in T^*M \to x \in M$ est la projection du fibré cotangent sur sa base et $d\pi : T_{(x,\xi)}T^*M \to TM$ sa différentielle. Ensuite on définit Ω par la dérivée extérieure $\Omega := -d\eta$ (le signe moins est une convention venant de la physique), ce qui signifie

$$\Omega (X, Y) = Y (\eta (X)) - X (\eta (Y)) + \eta ([X, Y]) .$$

Cette définition est géométrique car n'utilise pas de coordonnées, mais (si on ne connaît pas la dérivée extérieure) il faut montrer que Ω est un tenseur et que l'on retrouve l'expression (2.1) en coordonnées locales :

(a) Si $f, g \in C^\infty (M)$ sont des fonctions, montrer que $\Omega (fX, gY) = fg\Omega (X, Y)$, i.e. que Ω est un tenseur.

(b) En coordonnées locales, montrer que $\eta = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$ et montrer que $\Omega = -d\eta$ est donnée par (2.1).

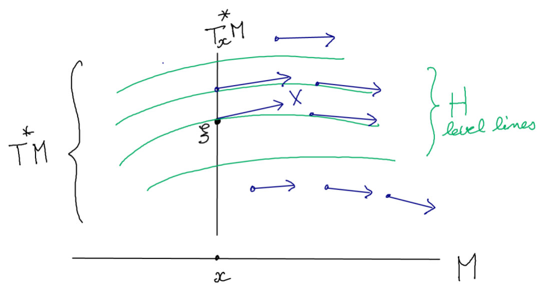
Exercice 2.3. « Equations de mouvement de Hamilton en général ». Soit M une variété appelée « **espace de configuration** ». L'espace cotangent T^*M est appelé « **espace des phases** ». Soit $H \in C^\infty (T^*M; \mathbb{R})$ une fonction sur l'espace des phases appelée « **Hamiltonien** » ou « énergie totale ». Soit

$$X := \check{\Omega}^{-1} (dH) \tag{2.3}$$

le champ de vecteur sur T^*M appelé « **champ de vecteur Hamiltonien** ». Il génère un flot $\phi^t : T^*M \to T^*M$ appelé le **flot Hamiltonien**, défini par

$$\frac{d\phi^t}{dt} = X. \tag{2.4}$$

Remarque 2.4. Éventuellement $H (t)$ peut dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi X dépendrait du temps.



1. Soient $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ des coordonnées locales sur M et $(\xi_1, \dots \xi_n)$ les coordonnées duales sur T_x^*M. Montrer que le champ de vecteur Hamiltonien s'écrit

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

et génère des trajectoires de composantes $(x_j (t), \xi_j (t))_{j=1\dots n} = \phi^t (x (0), \xi (0))$ qui vérifient les **équations de Hamilton**

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} & = X_{x_j} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \\ \frac{d\xi_j}{dt} & = X_{\xi_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases} \tag{2.5}$$

2. Montrer que $X (H) = 0$ et $H (\phi^t (\rho)) = H (\rho)$ pour tout $\rho \in T^*M$ et $t \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que l'**énergie totale est conservée** par le flot Hamiltonien.

Exercice 2.5. « Équations de mouvement de Hamilton, cas de la mécanique ». On appelle "**mécanique**" ou "**mécanique classique**", la théorie de Newton (1685), ensuite reformulée par Lagrange (1780) et Hamilton (1834). Elle concerne le mouvement des objets soumis à des forces, ces objets pouvant être des points ("mécanique du point"), des objets solides ("mécanique du solide"), des fluides ("mécanique des fluides"), le champ électromagnétique, etc. En mécanique, la variété est $M = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées (x_1, x_2, x_3) fixées par rapport aux étoiles, que l'on appelle **le référentiel cosmique**, et la métrique Euclidienne $g = \sum_{j=1}^{3} dx_j \otimes dx_j$. On considère une fonction $U \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ appelée **énergie potentielle**. Pour la mécanique du point, considérons un objet ponctuel de masse $m > 0$. A l'instant $t \in \mathbb{R}$, sa position est $x(t) \in M$. On note $(x, \xi) \in T^*M \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, point de l'espace cotangent ou espace des phases. La **fonction de Hamilton de la mécanique** (ou énergie totale) est

$$\begin{aligned} H(x,\xi) := & \underbrace{\frac{1}{2m}\|\xi\|_g^2}_{\text{energie cinetique}} + \underbrace{U(x)}_{\text{energie potentielle}} \\ = & \frac{1}{2m}\left(\sum_j \xi_j^2\right) + U(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Les équations de Hamilton déterminent un champ de vitesse $X = \check{\Omega}^{-1}(dH)$ sur l'espace des phases, générant les trajectoires $(x(t), \xi(t)) \in T^*M$ de la particule dans l'espace des phases. Ses coordonnées dans $M = \mathbb{R}^3$ sont $x(t) = (x_j(t))_j$ et coordonnées duales $\xi(t) = (\xi_j(t))_j$.

1. Montrer que les équations de Hamilton (2.5) donnent la **Loi de Newton** (1685) :

$$m\frac{d^2x_j(t)}{dt^2} = F_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.7}$$

avec les composantes $F_j = -\frac{\partial U}{\partial x^j}$, $\forall j = 1, 2, 3$ du champ de vecteur

$$F(x) = -\mathrm{grad}(U) \in T_xM. \tag{2.8}$$

appelé **champ de forces** et

$$\xi_j = m\frac{dx_j}{dt}$$

appelée **impulsion** ou **quantité de mouvement**.