Université Grenoble Alpes, Master 2 Physique.
Travail dirigé (TD) de géométrie et topologie pour la physique. Frédéric Faure.

TD. **Géométrie différentielle 1 : champs de vecteurs, 1-formes.**

Table des matières

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web et les solutions aux exercices.

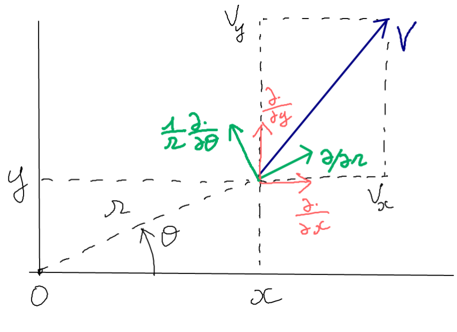
1 Vecteurs tangents

Exercice 1.1. « Coordonnées cartésiennes ou polaires »

Dans le plan M, on utilise les coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ou polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ avec les formules de changement de variable

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta.$$

1. Une fonction est une application $f : M \to \mathbb{R}$. Exprimer la fonction $f(r,\theta) = \exp\left(-r^2\right)$ en coordonnées cartésiennes et tracer ses lignes de niveaux.
2. Un champ de vecteur $V : \begin{cases} C^\infty(M) & \to \mathbb{R} \\ f & \to V(f) \end{cases}$ noté aussi $V \in C^\infty(M; TM)$ est une dérivation des fonctions (i.e. $V(fg) = V(f)\,g + fV(g)$) et s'exprime en un point $x \in M$ sous la forme
$$V = V_1(x)\frac{\partial .}{\partial x_1} + V_2(x)\frac{\partial .}{\partial x_2} = V_r(x)\frac{\partial .}{\partial r} + V_\theta(x)\frac{\partial .}{\partial \theta}.$$
Exprimer les composantes $(V_1(x), V_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ à partir des composantes $(V_r(x), V_\theta(x)) \in \mathbb{R}^2$. En cours de physique, on apprend à trouver ce résultat directement à l'aide de la figure suivante qui représente deux bases orthonormées.



Exercice 1.2. « formule de changement de coordonnées pour les vecteurs ». Plus généralement si $(x_1, \dots x_n)$ et $(y_1, \dots y_n)$ sont deux systèmes de coordonnées avec des formules de transition connues $y_k(x_1, \dots x_n)$ et $V = \sum_j V_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k W_k \frac{\partial}{\partial y_k}$ est un champ de vecteur, montrer que ses composantes dans les deux systèmes sont reliées par

$$\forall k \in \{1, \dots n\}, \quad W_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right) V_j.$$

D'après cette formule, dans les vieux ouvrages de physique, on appelle les composantes $(V_j)_j$, un vecteur contravariant.

Exercice 1.3. « Exemple de flot ». Sur le plan M en coordonnées cartésiennes $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, tracer le champ de vecteur $V=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ et déterminer la formule du flot $\phi^t : x(0)\in M\to x(t)\in M$ (i.e. trajectoires) associé défini en coordonnées par $\frac{dx(t)}{dt}=V(x(t))$ et géométriquement par $\forall x, \left(\frac{df(\phi^t(x))}{dt}\right)_{t=0}=(Vf)(x)$.

Exercice 1.4. « Crochet de Lie ». Si V et W sont deux champs de vecteurs, montrer que le commutateur

$$[V,W]:=VW-WV \tag{1.1}$$

est un champ de vecteur appelée **crochet de Lie de V et W**. (Aide : montrer que $[V,W]$ est une dérivation, ou faire le calcul en coordonnées).

Exercice 1.5. « Exemple de crochet de Lie ». Sur $M=\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées cartésiennes (x_1,x_2), soit $V=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $W=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$. Calculer et représenter le champ de vecteur $[V,W]$ ainsi que ses trajectoires.

Exercice 1.6. (optionnel) « Champ de vecteur et flot de rotation sur $\mathbb{R}^2$ ». Dans le plan $\mathbb{R}^2$, un point x peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ou polaires $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ ou complexes $(z,\overline{z})$ définies par

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta$$

$$z=x_1+ix_2=re^{i\theta},\quad \overline{z}=x_1-ix_2=re^{-i\theta}$$

(Utilisant la notation d'opérateur différentiel) on considère le champ de vecteur V défini par

$$V=\omega\frac{\partial}{\partial\theta}$$

avec $\omega\in\mathbb{R}$ fixé. C'est à dire que ses composantes polaires sont $V_r=0, V_\theta=\omega$.

1. Tracer l'allure du champ de vecteur V dans le plan $\mathbb{R}^2$. Exprimer V en coordonnées cartésiennes et complexes, c'est à dire trouver les composantes V_{x_1},V_{x_2} et $V_z,V_{\overline{z}}$ définies par

$$V=V_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+V_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}=V_z\frac{\partial}{\partial z}+V_{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$$

2. On note $\phi^t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ le flot généré par le champ de vecteur V. Ecrire les équations de mouvement des trajectoires générées par ce champ de vecteur dans les différents systèmes de coordonnées. Choisir le meilleur système de coordonnées pour les résoudre et déduire l'expression du flot ϕ^t. Schéma du flot.
3. On note $\left(\phi^t\right)^\circ : C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)\to C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ l'opérateur de composition défini par $\left(\phi^t\right)^\circ f=f\circ\phi^t$. Montrer que $\frac{d\left(\phi^t\right)^\circ}{dt}=V\left(\phi^t\right)^\circ$, $\left(\phi^{t=0}\right)^\circ=\mathrm{Id}$ et donc (formellement)

$$\left(\phi^t\right)^\circ=e^{tV}.$$

4. On appelle $p_1=-i\frac{\partial}{\partial x_1}$, $p_2=-i\frac{\partial}{\partial y_1}$ les "**opérateurs impulsion**" (utilisés en mécanique quantique). Montrer que

$$-iV=\omega\left(x_1p_2-x_2p_1\right)$$

appelé moment angulaire.

Exercice 1.7. (optionnel) « Moment angulaire, groupe et algèbre des rotations dans $\mathbb{R}^3$ ». Cet exercice fait suite à l'exercice précédent.

1. On note $x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$, $p_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 1, 2, 3$ et $p = (p_1, p_2, p_3)$ qui est un triplet de champ de vecteurs appelé **opérateur impulsion**. On note

$$L = x \wedge p := \begin{cases} L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{cases}$$

Ainsi $L = (L_1, L_2, L_3)$ est un triplet d'opérateurs appelé **opérateurs moment angulaire**. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ vecteur unitaire, $\|u\| = 1$. Montrer que le champ de vecteur

$$V_u = i\,(L.u) := i\,(L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3)$$

génère un flot $(\phi_u^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ qui est une rotation d'un angle α autour de l'axe $\mathbb{R}u$. (Aide : il suffit de traiter le cas $u = (0, 0, 1)$). On dit que l'opérateur moment angulaire est le **générateur des rotations**. Et l'opérateur de composition $R_{\alpha,u} = e^{-\alpha V_u} = ((\phi_u^\alpha)^\circ)^{-1}$ est appelé opérateur de rotation.

2. Pour des opérateurs A, B, par définition $[A, B] := AB - BA$ est appelé commutateur. Montrer que

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_2, L_3] = iL_1, \quad [L_3, L_1] = iL_2$$

appelé relation de commutation de l'algèbre so(3).

3. Plus généralement, déduire que si on note $U = \alpha u \in \mathbb{R}^3$ et $V_U = i\,(L.U)$ le champ de vecteur qui génère l'opérateur de rotation $R_{\alpha,u} = e^{-V_U} = ((\phi_u^\alpha)^\circ)^{-1}$, alors pour $U, W \in \mathbb{R}^3$ quelconques

$$[V_U, V_W] = -V_{U\wedge W}.$$

2 Vecteurs cotangents ou 1 Formes différentielles

En un point $x \in M$ d'une variété, un **vecteur cotangent** est une application linéaire $\xi : T_x M \to \mathbb{R}$. On note $\xi \in T_x^* M$. Dans un système de coordonnées $(x_1, \dots x_n)$, les vecteurs tangents $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ forment une base de $T_x M$ et les différentielles $(dx_1, \dots dx_n)$ forment une base de $T_x^* M$, appelée base duale, vérifiant $\forall j, k, dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{j=k}$.

Exercice 2.1. « Représentation de vecteurs cotangents ». Comme une vecteur cotangent est une fonction (linéaire) sur l'espace tangent, on peut le représenter par ses lignes de niveaux. En fait les lignes de niveau 0 (le noyau) et 1 suffisent à le caractériser.

Sur l'espace tangent $T\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, avec la base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$, représenter les vecteurs tangents $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1}$, $V = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$. Représenter les vecteurs cotangents de base dx_1, dx_2, représenter les vecteurs cotangents $\xi = 2dx_1$, $\eta = 2dx_1 + dx_2$, $\alpha = dx_1 - 2dx_2$. Calculer $\xi(U), \eta(V), \alpha(V)$.

Exercice 2.2. « Coordonnées cartésiennes ou polaires » Dans le plan M, on utilise les coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ou polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ avec les formules de changement de variable

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta.$$

Une 1 forme $\xi \in C^\infty(M; T^*M)$ s'exprime en un point $x \in M$ sous la forme

$$\xi = \xi_1(x)\,dx_1 + \xi_2(x)\,dx_2 = \xi_r(x)\,dr + \xi_\theta(x)\,d\theta.$$

1. Exprimer les composantes $(\xi_r(x), \xi_\theta(x)) \in \mathbb{R}^2$ à partir des composantes $(\xi_1(x), \xi_2(x)) \in \mathbb{R}^2$.
2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit la 1-forme $\alpha = d\theta$ (en coordonnées polaires). Exprimer α en coordonnées cartésiennes (x_1, x_2).

Exercice 2.3. « formule de changement de coordonnées pour les 1 formes ». Plus généralement si $(x_1, \ldots x_n)$ et $(y_1, \ldots y_n)$ sont deux systèmes de coordonnées, et $\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k dx_k = \sum_{j=1}^{n} \eta_j dy_j$ est une 1 forme, montrer que ses composantes dans les deux systèmes sont reliées par

$$\forall k, \quad \xi_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) \eta_j.$$

Comparer aux formules des changements de coordonnées pour les vecteurs tangents. D'après cette formule, dans les vieux ouvrages de physique, on appelle les composantes $(\xi_k)_k$, un vecteur covariant. Il est préférable d'utiliser le terme actuel de 1-forme différentielle.

Exercice 2.4. « Forme exacte ». Une 1 forme ξ est **exacte** si il existe une fonction f telle que $\xi = df$. En coordonnées, si $\xi = \sum_j \xi_j (x_1, \ldots x_n) dx_j$, montrer qu'une condition nécessaire pour que α est exacte est que ξ soit **fermée**, i.e. vérifie (on apprendra plus au TD 3)

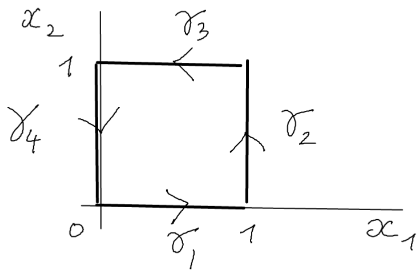
$$\forall j, k, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}.$$

Donner un exemple sur $\mathbb{R}^2$ de 1-forme qui n'est pas exacte.

Exercice 2.5. (optionnel) « 1 forme et intégrales curvilignes ». Sur le plan $\mathbb{R}^2$, considérons le chemin fermé suivant formé de quatre segments

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \tag{2.1}$$

avec pour $t \in [0, 1]$,$\gamma_1 (t) = (t, 0)$, $\gamma_2 (t) = (1, t)$, $\gamma_3 (t) = (1 - t, 1)$, $\gamma_4 (t) = (0, 1 - t)$.



1. Soit la fonction $f (x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Calculer sa différentielle df. Calculer les intégrales $\int_{\gamma_j} df$ (i.e. variation de f sur les segments) pour $j = 1, 2, 3, 4$ et vérifier que la variations totale $\int_\gamma df = 0$. Remarque : on verra au TD le sens géométrique de l'intégrale, pour le moment on admet la définition $\int_{\gamma_j} df := \int_0^1 \sum_{k=1,2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \left(\frac{dx_k}{dt} \right) dt$ avec $\gamma_j (t) = (x_1 (t), x_2 (t))$.
2. Soit la différentielle $\alpha = x_2 dx_1$. Est elle fermée ? Calculer les intégrales $\int_{\gamma_j} \alpha$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et l'intégrale totale $\int_\gamma \alpha$ deux façons (directement et en utilisant la formule de Stokes).
3. En coordonnées polaires (r, θ) bien définies pour $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, montrer que $\alpha = d\theta = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$. Calculer $\int_\gamma \alpha$ où γ est le cercle de rayon 1. α est-elle fermée ?

Exercice 2.6. (optionnel) « 1-formes en thermodynamique ». Avec les notations de la thermodynamique (mais simplifiées) : dans le plan $(E, V) \in \mathbb{R}^2$, on suppose avoir la fonction « entropie » $S (E, V) = \ln (VE)$ et on note sa différentielle

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$$

avec des fonctions $T (E, V)$, $P (E, V)$ que l'on calculera. On définit les 1-formes

$$\delta Q := T dS, \qquad \delta W := -P dV.$$

appelées respectivement échange de chaleur et échange de travail. Montrer que $dE = \delta Q + \delta W$ (appelé 1er principe). Montrer que δQ et δW ne sont pas fermées (et donc pas exactes, ce ne sont pas des différentielles de fonctions). Calculer $\int_\gamma \delta Q$ sur le chemin fermé $\gamma = \partial C$, bord du carré $C = [1, 2]^2$.