Université Joseph Fourier. Master 1 Physique 2009-10
TD de Mathématiques pour la physique

TD n^{o}1
Algèbre linéaire

---

1 Bases d'un espace vectoriel

1. Montrer que si E est un espace vectoriel et que $(e_1, \dots e_n)$ est une base, et que $(f_1, \dots f_m)$ est une autre base alors $m = n$, autrement dit, la dimension $\dim(E) := n$ ne dépend pas du choix de la base.
2. Montrer que $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel complexe de dimension n, mais un espace vectoriel réel de dimension $2n$ (trouver une base canonique).
3. Soit E l'espace des matrices A carrées $N \times N$, à coefficients a_{ij} complexes et hermitiennes, c'est à dire $A^\dagger = A$, ce qui signifie que $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, $\forall i, j$. Montrer que E est un espace vectoriel réel (et non pas complexe). Trouver une base et déduire le dimension de E.
4. Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit l'espace vectoriel :
$$E_d := \{\text{polynomes } p(x_1, \dots, x_m) \text{ à } m \text{ variables et de degré } \leq d\}$$
Un tel polynome s'écrit
$$p(x_1, \dots, x_m) = \sum_\alpha p_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \tag{1}$$
avec $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$, des coefficients $p_\alpha \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1 + \dots \alpha_m \leq d$. Trouver une base de l'espace vectoriel E_d, déduire sa dimension.
5. Même question pour
$$E_d := \{\text{polynomes } p(x_1, \dots, x_m) \text{ à } m \text{ variables homogènes degré } d\}$$
Un tel polynome vérifie : $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_m)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'écrit donc comme (1) avec $\alpha_1 + \dots \alpha_m = d$.

2 Somme directe d'espaces vectoriels

Definition 1. Soit E, F des espaces vectoriels. On définit l'espace **somme directe** $E \oplus F$ comme étant l'espace $E \times F$ des couples $(u, v) \in E \times F$ avec les opérations
$$(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v')$$
$$\lambda(u, v) := (\lambda u, \lambda v)$$

Si $(e_1, \dots e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots f_m)$ est une base de F déduire une base de $E \oplus F$, et déduire $dim(E \oplus F)$?

Si G est un espace vectoriel et $E, F \subset G$ sont des sous espaces vectoriels tels que $E \bigcap F = \{0\}$ et $Vect(E \bigcup F) = G$ (c.a.d. tout vecteur de G peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs de E et F), montrer que $G \equiv E \oplus F$, c.a.d. que G et $E \oplus F$ sont canoniquement isomorphes.

3 Applications linéaires

1. Si $A : E \to F$ est une application linéaire, montrer que A est injective si et seulement si $Ker\,(A) = \{0\}$.
2. Si E est une espace vectoriel de dimension finie n, et $A : E \to E$ est une application linéaire, montrer que

$$A \text{ surjective} \Leftrightarrow A \text{ injective} \Leftrightarrow A \text{ isomorphisme}$$

montrer que ce résultat est faux en dimension infinie. Aide : considérer l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies$u = \left(u^1, u^2, \ldots\right)$ et l'opérateur de décalage à gauche $A : \left(u^1, u^2, \ldots\right) \to \left(u^2, u^3, \ldots\right)$. Calculer son noyau et son image. De même pour l'opérateur de décalage à droite : $B : \left(u^1, u^2, \ldots\right) \to \left(0, u^1, u^2, \ldots\right)$. Montrer l'analogie avec les opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique a^+, a.

3. **Operateur de projection :** Soit E un espace vectoriel et une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$. On définit l'opérateur

$$P : \begin{cases} E & \to E \\ (u, v) & \to (u, 0) \end{cases}$$

appelé projecteur sur F selon G. Montrer que P est une application linéaire, que $Ker\,(P) = G$, $Im\,(P) = F$, et que $P \circ P = P$. Montrer inversement que si $A : E \to E$ est une application linéaire vérifiant $A^2 = A$ alors A est un projecteur sur $Im\,(A)$ selon $Ker\,(A)$.

4 Espaces quotients

1. Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous espace vectoriel. On définit une relation d'équivalence dans E :

$$u \sim v \text{ si } (u - v) \in F$$

On note $[u]$ la classe d'équivalence de u et E/F l'ensemble des classes d'équivalences appelé **espace quotient**. Montrer que E/F est une espace vectoriel (préciser les opérations $+, .$) et que $dim\,(E/F) = dim\,(E) - dim\,(F)$. Si $E = F \oplus G$, montrer que $G \equiv (E/F)$ sont isomorphes.

2. Si $A : E \to F$ est une application linéaire, montrer que cela induit un isomorphisme

$$\tilde{A} : (E/\mathrm{Ker}\,(A)) \to \mathrm{Im}\,(A)$$

(définir $\tilde{A}$), et déduire que $\dim E - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(A)) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(A))$.

5 Espace vectoriel dual

(E est un espace vectoriel de dimension finie)

1. Si E est un espace vectoriel, montrer que $(E^*)^* = E$ et que les bases $(e_1, \ldots e_n)$ de E et $\left(e^{*1}, \ldots e^{*n}\right)$ de E^* sont duales l'une de l'autre.
2. Montrer que si $A : E \to F$ est une application linéaire, alors on peut définir canoniquement une application linéaire $A^t : F^* \to E^*$appelée application transposée ou duale.

6 Métrique sur un espace vectoriel

Supposons que E est un espace vectoriel, $(e_1, \dots e_n)$ une base quelconque de E, et g une métrique sur E (aussi notée $\langle . | . \rangle$).

1. Montrer que avec les notations de Dirac, on a :

$$Id_E = \sum_i |e_i\rangle\langle e^{*i}| = \sum_i e_i . e^{*i} (.)$$

appelée **relation de fermeture.**

2. On note

$$g_{ij} := g(e_i, e_j) = \langle e_i | e_j \rangle$$

qui forme une matrice $n \times n$. On note

$$\left(g^{-1}\right)^{ij} := \left(g^{-1}\right)\left(e^{*i}, e^{*j}\right) = \langle e^{*i} | e^{*j} \rangle$$

montrer que ces matrices sont inverses l'une de l'autre, c'est à dire

$$\sum_k \left(g^{-1}\right)^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

(remarque : dans la plupart des livres, on écrit g^{ik} au lieu de $\left(g^{-1}\right)^{ik}$ où les indices en haut suffisent à indiquer qu'il s'agit de l'application $\tilde{g}^{-1} : E^* \to E$).

3. Pour une base quelconque (pas forcément o.n.) montrer que la relation de fermeture s'écrit :

$$Id_E = \sum_i |e_i\rangle\langle e^{*i}| = \sum_{i,j} |e_i\rangle \left(g^{-1}\right)^{ij} \langle e_j|$$

4. Si $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E, montrer que $\langle e^{*i}| = \langle e^i|$ et $|e^{*i}\rangle = |e_i\rangle$ (c'est à dire que dans ce cas les vecteurs de la base duale et les vecteurs dual métriques sont égaux).