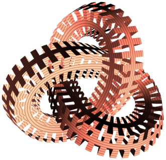
Nœuds et tresses

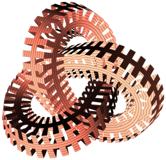
Michael Eisermann

www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. SANTÉ



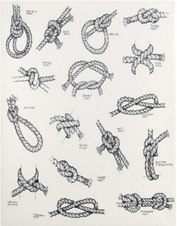
Conférence donnée le 31 janvier 2008
(document mis à jour le 6 avril 2008)



Académie de Grenoble
Remise des prix aux lauréats de l’Olympiade des Mathématiques

Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

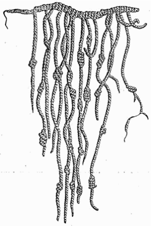
(a) Alpinisme



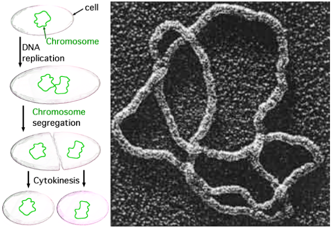
(b) Bateau

(c) Cravate

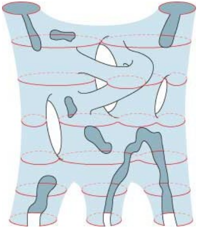
(d) Décoration



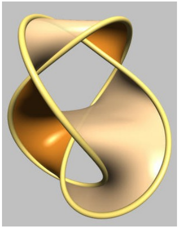
(e) Écriture



(f) Biologie moléculaire



(g) Physique théorique



(h) Mathématique

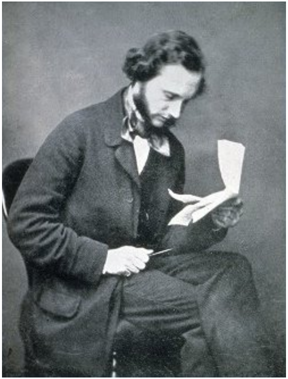
FIG.: Les nœuds au quotidien et dans les sciences

Précurseurs au XIXe siècle

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Mathématicien, physicien et
astronome allemand.

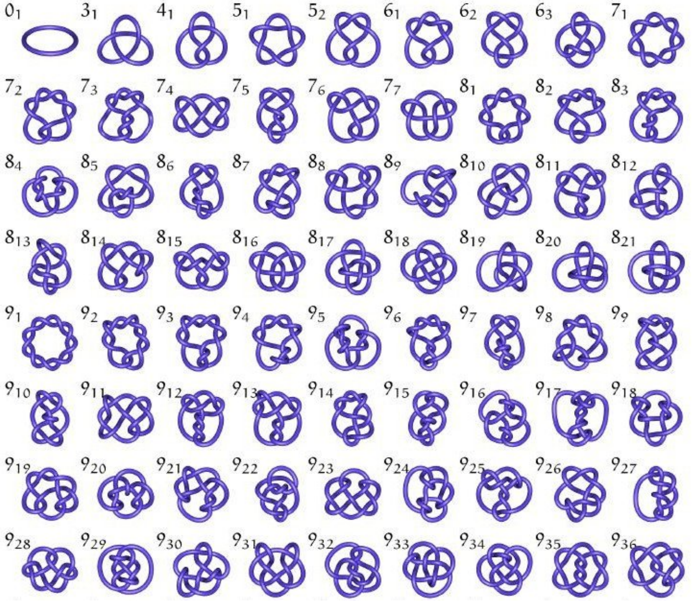
William Thomson, Lord Kelvin
(1824-1907)



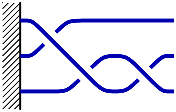
Physicien britannique né en Irlande,
professeur à Glasgow

[sources numérisées : A. Ranicki, History of Knot Theory, `www.maths.ed.ac.uk/~aar/knots`]

Tabulation empirique (Tait, Little, Kirkman, 1870-1890)

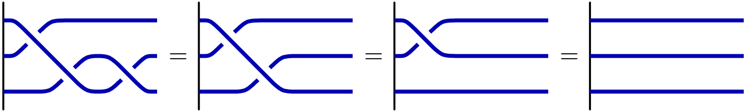


Comment modéliser les tresses ?

Un premier modèle : 

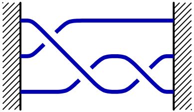
Propriété importante : les brins sont flexibles, ils peuvent bouger.

Mauvaise nouvelle : dans ce modèle toutes les tresses sont égales.



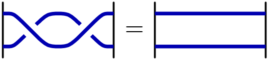
Comment modéliser les tresses ?

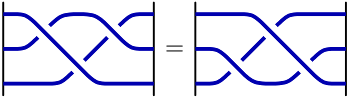
Le bon modèle :

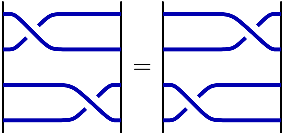


On fixe les extrémités
à gauche et à droite !

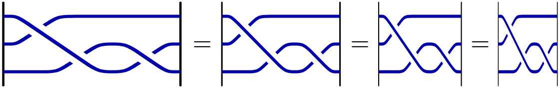
Au milieu les brins peuvent encore bouger :





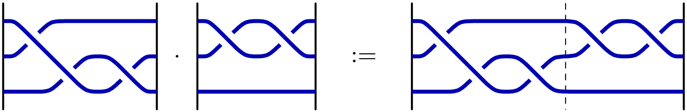


La longueur n’est pas essentielle :



On peut multiplier les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une multiplication naturelle :



Questions naturelles :

1. La multiplication des tresses est-elle associative ?

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

2. Est-elle commutative ?

$$A \cdot B = B \cdot A$$

3. Admet-elle un élément neutre ?

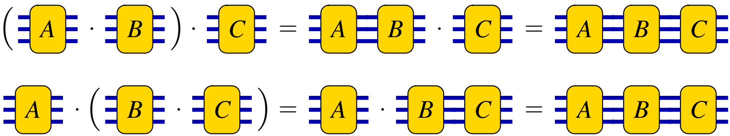
$$A \cdot 1 = A \qquad \text{et} \qquad 1 \cdot A = A$$

4. Pour une tresse A donnée, y a-t-il une tresse inverse ?

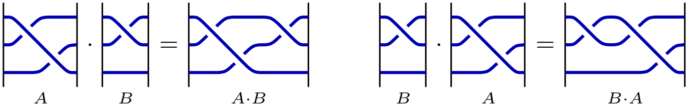
$$A \cdot A^{-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad A^{-1} \cdot A = 1$$

La multiplication des tresses

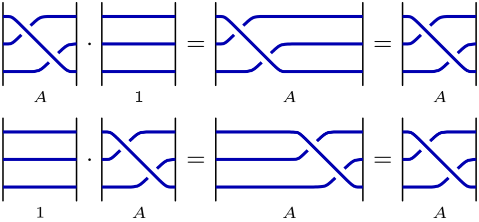
Est-elle associative ? Oui !



Est-elle commutative ? Non !

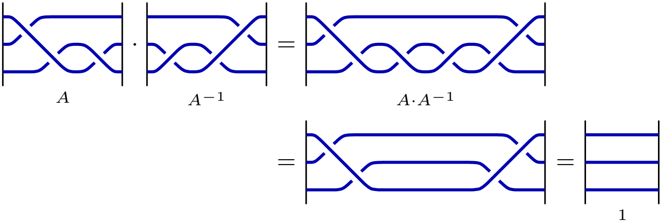


Admet-elle un élément neutre ? Oui !



La multiplication des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

Une multiplication ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

Conclusion

Les tresses à n brins forment un groupe.

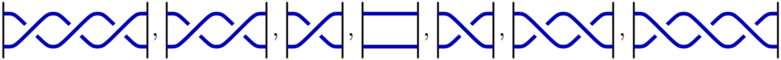
Ce groupe est non commutatif si $n \geq 3$: on a vu que $AB \neq BA$.

Les groupes des tresses

Essayons de comprendre ces groupes...

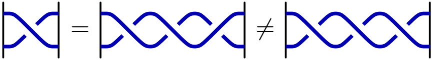
$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$: Regardons les tresses à 2 brins :



$\ldots,$ -3, -2, -1, ± 0, $+1$, $+2$, $+3$, $\ldots$

Attention : Le nombre de croisements n'est pas un invariant, il peut changer !

Exemple : 

$+1 = +1 \neq +3$

Ce qui compte est la vrille $\quad v\colon \{\text{tresses}\} \to \{\text{nombres entiers}\}$

$v\Big($  $\Big) = +1, \qquad v\Big($  $\Big) = -1, \qquad v(A \cdot B) = v(A) + v(B).$

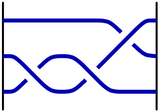
Observation

Les tresses à 2 brins sont classifiées par leur vrille.

Ainsi les tresses à 2 brins avec leur multiplication correspondent aux nombres entiers avec l'addition usuelle. La vrille est un « isomorphisme » de groupes.

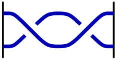
La vrille est un invariant

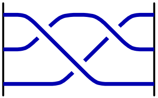
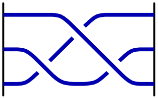
Remarque — La vrille sert aussi pour les tresses à plusieurs brins :

$v\Bigg($  $\Bigg) = +1 + 1 - 1 = 1$

$v\Big($  $\Big) = +1,$ $v\Big($  $\Big) = -1,$ $v(A \cdot B) = v(A) + v(B).$

Proposition — La vrille ne change pas sous mouvements de la tresse.

Preuve : $v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big)$

$v\Bigg($  $\Bigg) = v\Bigg($  $\Bigg)$

Bien entendu, pour $n \geq 3$ la vrille ne suffit plus pour classifier les tresses : les entiers sont commutatifs, alors que les tresses ne le sont pas !

Perspective (recherche récente, 1984–présent)

On peut étudier, voire classifier, les tresses à l'aide de matrices.

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

$\vdots$

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

$\vdots$

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther
1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

$\vdots$

1923 E. Artin (Hambourg) : le groupe des tresses

$\vdots$

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses

$\vdots$

1935 A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

$\vdots$

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

$\vdots$

1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

$\vdots$

2001 D. Krammer, S. Bigelow : représentation fidèle par des matrices

$\vdots$

En mathématiques, tout était déjà connu à nos ancêtres ? Loin de cela !
Les mathématiques sont bien vivantes et évoluent constamment.

À quoi servent les mathématiques ?

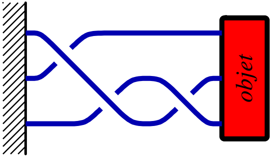
Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
  - → Je commence par ce point, parce que la compréhension de ces objets me procure beaucoup de plaisir. C'est un point de vue personnel, certes. Mais il se trouve que pour beaucoup de chercheurs c'est une raison suffisante pour y consacrer du temps.
- L'être humain est curieux : observer des phénomènes, puis les analyser, est une activité profondément humaine.
  - → Si l'on ajoute un peu d'abstraction, on l'appelle mathématiques, du grec μαθηματική τέχνη [mathēmatikē téchnē], l'art de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
  - → La *déduction* est une méthode efficace, certes, mais ce n'est pas tout ! La *motivation* et les questions intéressantes proviennent surtout des exemples, des observations, des conjectures, ... que l'on souhaite comprendre.
- Les mathématiques sont efficaces, gratifiantes, voire généreuses : tout investissement s'amortit.
  - → Elles essaient d'extraire l'essentiel, le noyau dur du problème, ce que l'on appelle *abstraction*. Si un problème est difficile, il peut nécessiter la coopération de beaucoup de personnes, parfois sur plusieurs générations. Mais une fois élaborée, la solution s'applique à de nombreuses situations analogues. Ceci explique la « déraisonnable efficacité » des mathématiques, qui étonne et réjouit ses utilisateurs.

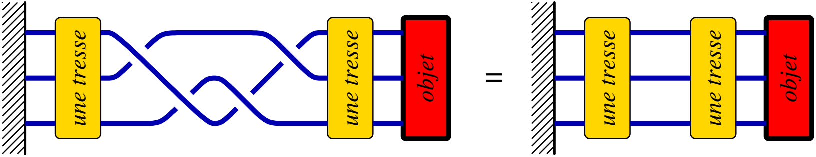
Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils
... à court terme pour la question immédiate (mathématique ou autre),
... à moyen terme pour toutes les sciences qui s'en servent,
... à long terme pour les applications technologiques.

Tresses de Dirac (théorie de l'électron, prix Nobel 1933)

Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.
Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



Seul nouveau mouvement : on peut passer un brin *autour* de l'objet.



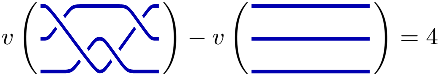
Remarque (Newman 1942 ; Fadell 1962)

Les tresses de Dirac forment à nouveau un groupe.

Le twist de Dirac

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Observation utile :



La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Jonglage topologique

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?

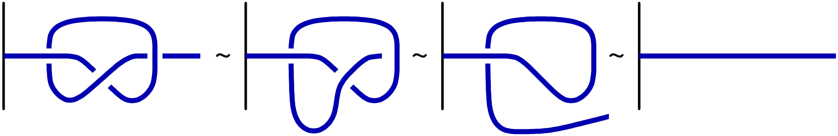
Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire. En mathématiques on appelle cela une « preuve constructive ».
- Pour prouver que c'est impossible, il ne suffit pas d'échouer. Il faut identifier l'obstacle !

La première question est réglée. Pour la seconde il nous faudra des maths !

Comment modéliser les nœuds ?

Observation — Dans un modèle trop naïf, tous les nœuds sont égaux :

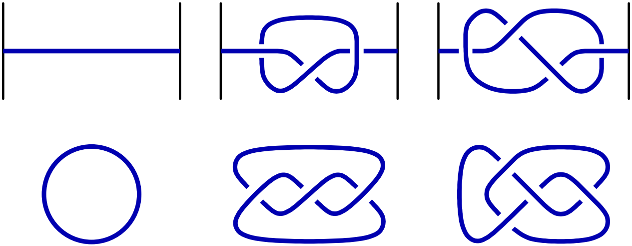


Deux solutions possibles :

noeuds ouverts

$\updownarrow$

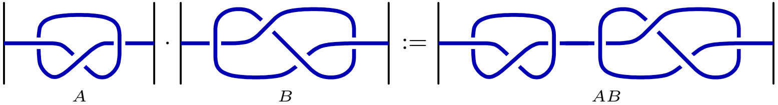
noeuds fermés



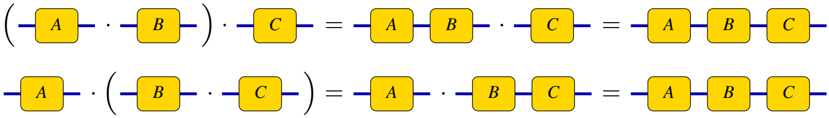
Remarque — Ces deux modèles sont équivalents.

La multiplication des nœuds

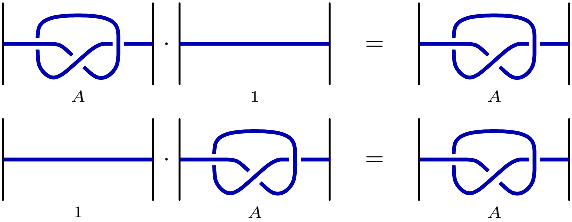
Les nœuds jouissent d'une multiplication naturelle :



Est-elle associative ? $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$? Bien sûr !

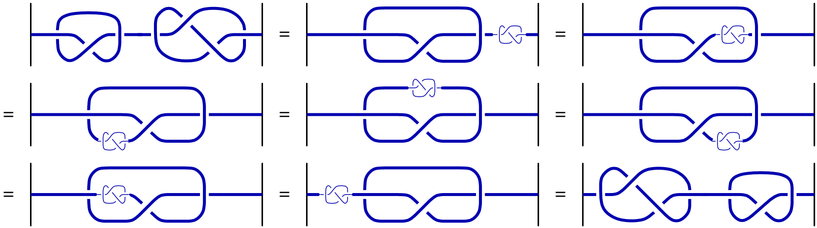


Admet-elle un élément neutre ? $A \cdot 1 = A$ et $1 \cdot A = A$? Bien sûr !

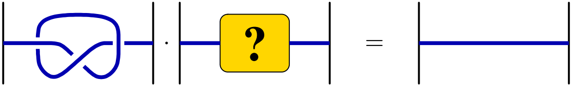


La multiplication des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A \cdot B = B \cdot A$? Contrairement aux tresses, oui !



Existe-t-il des éléments inverses ? $A \cdot A^{-1} = 1$ et $A^{-1} A = 1$?



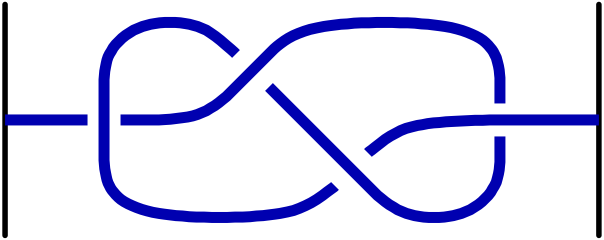
C’est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu’un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
- Pour prouver qu’un objectif est impossible, il faut identifier l’obstacle !

  On vient de franchir la première étape :
  on a reformulé le problème en termes mathématiques.

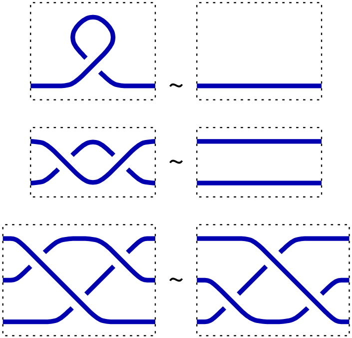
Ceci n'est pas un nœud !



(Ce n'est qu'un diagramme d'un nœud.)

Mouvements de Reidemeister

Les mouvements suivants modifient le *diagramme*,
mais ils ne changent pas le *nœud* :

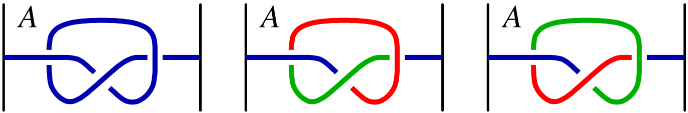


Théorème (Reidemeister 1926)

Ces mouvements suffisent : si deux diagrammes représentent le même nœud, alors l'un se transforme en l'autre par des mouvements de Reidemeister.

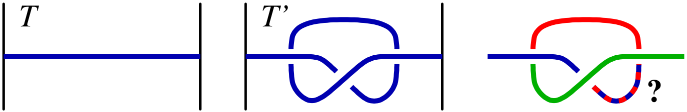
Tricoloriages (Fox 1971)

Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu (b), rouge (r) et vert (v).



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

- Le premier arc et le dernier arc sont toujours coloriés en bleu.
- À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur (mais jamais seulement deux couleurs).



Définition

Pour tout diagramme D on note $\mathrm{col}(D)$ le nombre de ses tricoloriages.

Exemple : on trouve que $\mathrm{col}(A) = 3$ mais $\mathrm{col}(T) = \mathrm{col}(T') = 1$.

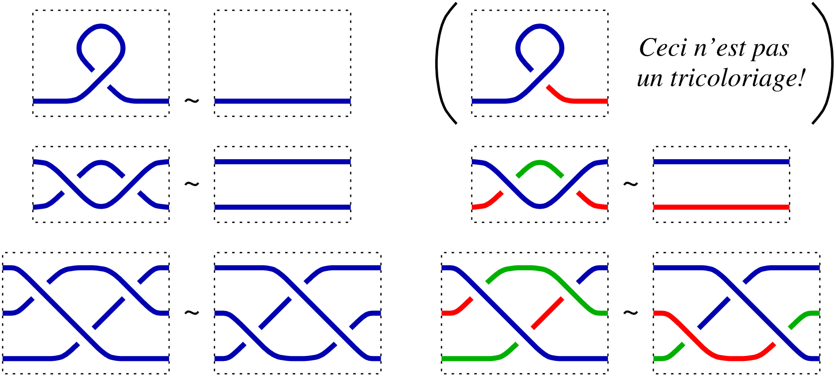
Les tricoloriages sont invariants !

Théorème (Fox 1971)

Si $D \sim D'$ *alors* $\mathrm{col}(D) = \mathrm{col}(D')$.

Autrement dit, si $\mathrm{col}(D) \neq \mathrm{col}(D')$ alors $D \not\sim D'$.

Idée de la démonstration :

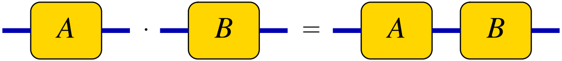


Existe-t-il des nœuds inverses ?

Constat

Le nœud de trèfle est non trivial, car il admet trois tricoloriages.

Mieux encore : on a $\mathrm{col}(A \cdot B) = \mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B)$.



Pour le nœud de trèfle A nous avons trouvé $\mathrm{col}(A) = 3$.

Si $A \cdot B = 1$, alors $\mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B) = 1$. C'est impossible !

Conclusion

Le nœud de trèfle n'a pas d'inverse.

Ceci résout notre question initiale issue du « jonglage topologique ».