Du vieux et du neuf sur les séries divergentes

F.Pham

(causerie au colloque Emile Borel,
Saint-Affrique 16-17 juillet 1999)

> J'insiste à nouveau sur le fait qu'en développant l'esprit d'invention mathématique par l'enseignement, on ne contribue pas seulement à la formation d'un petit nombre de spécialistes que sont les mathématiciens, mais on rend également service à tous ceux pour lesquels les mathématiques sont seulement étudiées en vue de leur application pratique.
>
> ...
>
> ... dans ces travaux ainsi que dans mes travaux sur les fonctions entières, sur les séries divergentes, sur la croissance des fonctions, je crois que le trait commun aux méthodes diverses que j'ai utilisées est un souci constant d'étudier les êtres mathématiques en eux-mêmes, comme le biologiste étudie les êtres vivants, de me familiariser avec eux, et de ne pas me laisser influencer dans cette étude intrinsèque des individus par les préjugés et les traditions.

(extraits de *Documents sur la psychologie de l'invention dans le domaine de la science*, Oeuvres de Emile Borel, tome 4, édité par les Publications du CNRS)

1 Développements de fonctions en séries de puissances de la variable

Un exemple familier... Nos étudiants de DEUG apprennent à écrire le développement de la fonction logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{1.1}$$

en intégrant terme à terme le développement

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{1.1'}$$

Ils apprennent que les "séries" (sommes infinies) figurant au membre de droite de ces égalités ont pour "rayon de convergence" 1 : cela signifie que pour $|x| < 1$ (*et pas au delà*) le membre de droite *converge* vers le membre de gauche, en ce sens que ses sommes partielles successives "tendent" vers la fonction considérée, comme le montre la figure 1.

Ce que nous omettons souvent de faire remarquer à nos étudiants, c'est que pour $|x| > 1$ non seulement la série diverge mais ses sommes partielles "décollent" de la fonction qu'elles étaient censées représenter *d'autant plus rapidement que l'ordre de troncature augmente* : cf. fig.1 bis.

Pourquoi cette omission ? Sans doute pensons-nous que là où une série diverge l'étude de ses sommes partielles n'a pas grand intérêt. L'exemple suivant va peut-être vous persuader du contraire.

... et un autre qui mériterait de l'être ! Soit à étudier, pour $x > 0$ proche de 0, la fonction f définie par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t/x}}{1+t}\, dt \tag{1.2}$$

En substituant à $\frac{1}{1+t}$ son développement (1.1′), et en intégrant terme à terme, un calcul élémentaire[1] donne la série

$$x - x^2 + 2x^3 - 6x^4 + \cdots (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,x^n + \cdots \tag{1.3}$$

La figure 2 représente les graphes des sommes partielles de cette série. On y voit un phénomène de "décollement" des sommes partielles, à première vue très similaire à celui de la fig.1 bis. Mais attention : contrairement à la série (1.1), la série (1.3) *a un rayon de convergence nul* (tout étudiant de DEUG doit pouvoir le démontrer !). Ce résultat théorique nous permet de prévoir qu'en poussant plus loin l'expérience de la figure 2, considérant des ordres de troncature beaucoup plus grands, nous finirons par voir les graphes coïncider pratiquement avec l'axe vertical.

Est-ce à dire que la série (1.3) soit sans intérêt pratique pour l'étude de la fonction (1.2) ? Bien au contraire ! Car si l'on regarde, *pour une valeur fixée de x*, comment évolue la somme partielle $S_m(x) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,x^n$ en fonction de l'ordre de troncature m, il est facile de voir qu'avant de se mettre à "diverger" celle-ci *commence par se rapprocher très rapidement de $f(x)$* [2] : par exemple pour $x = 0,2$ l'erreur estimée $E_m(x)$ (cf. note 2) diminue jusqu'à la valeur $E_6(0,2) \simeq 0,007$, restant inférieure à 10^{-2} pour $4 \leq m \leq 7$; pour $x = 0,1$ l'erreur estimée $E_m(x)$ diminue jusqu'à la valeur $E_{11}(0,1) \simeq 3,6.10^{-5}$, restant inférieure à 10^{-4} pour $7 \leq m \leq 15$; et la précision sera encore meilleure pour les valeurs plus petites de x.

[1] Le calcul de l'intégrale $\int_0^\infty t^n\, e^{-t/x}\, dt$ se ramène par changement de variable au calcul de l'intégrale $\int_0^\infty s^n\, e^{-s}\, ds$, dont on sait depuis Euler qu'elle est égale à $n! = 1.2.3\ldots n$ (intégrer par parties et raisonner par récurrence sur n).

[2] En effet $S_{2p}(x) < f(x) < S_{2p+1}(x)$ (cf. note 6 du §3), de sorte que l'écart entre $f(x)$ et $S_m(x)$ est majoré en valeur absolue par $E_m(x) = |S_m(x) - S_{m-1}(x)| = (m-1)!\,x^m$, qui décroît (d'abord très rapidement) quand m augmente, tant que $m - 1 < \frac{1}{x}$.

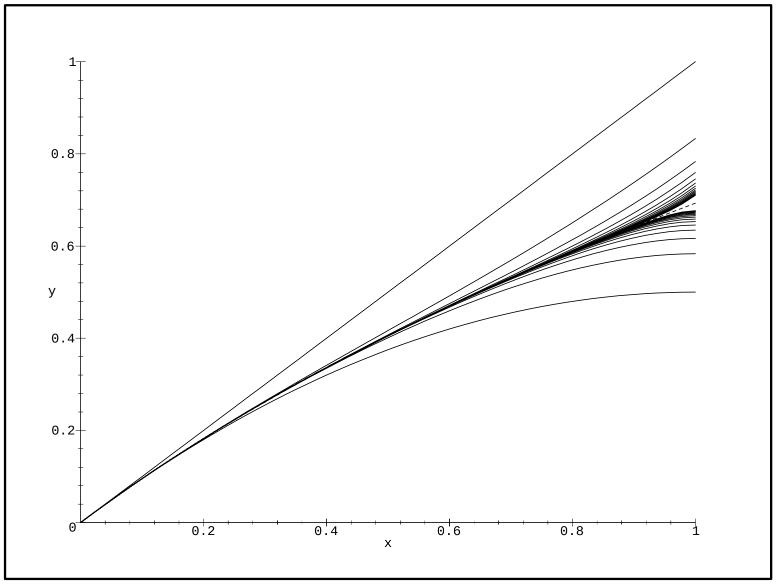

Fig.1: La fonction $\ln(1+x)$ *(en tirets), et ses développements successifs jusqu'à l'ordre 30*

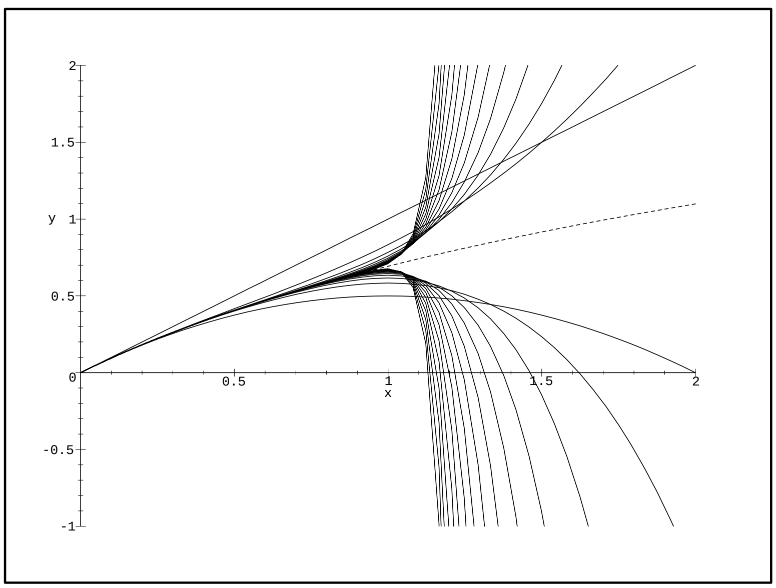

Fig.1 bis: Cadrage élargi de la figure 1

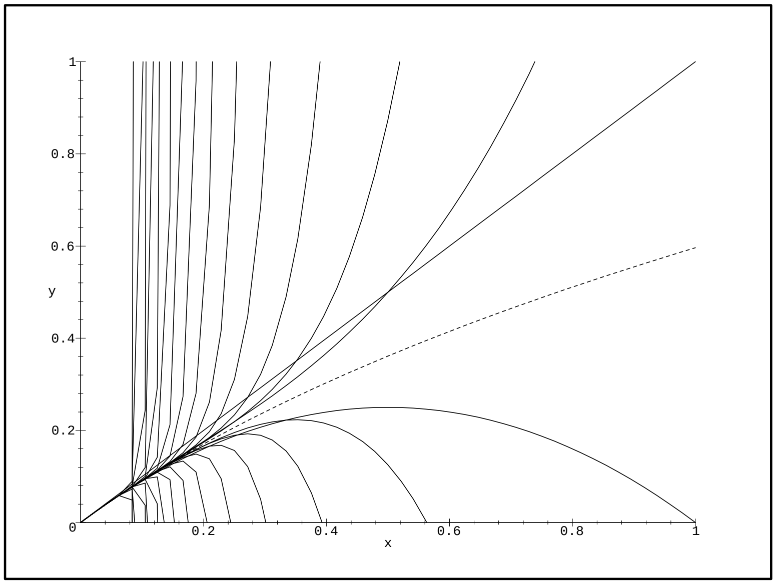

Fig.2: La fonction (1.2) *(en tirets), et ses développements successifs jusqu'à l'ordre 30*

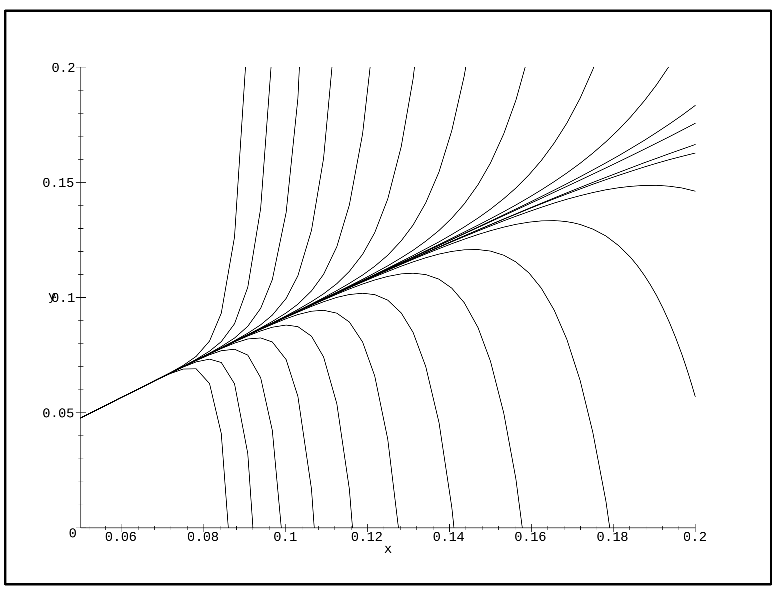

Fig.2 bis: Détail agrandi de la fig. 2, pour les ordres allant de 6 à 30

2 Les succès de la "sommation des astronomes"

Le chapitre VIII du livre de Henri Poincaré *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (paru en 1892) commence par le commentaire suivant.

> Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot *convergence*. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivant devraient croître indéfiniment.
>
> Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général
>
> $$\frac{1000^n}{1.2.3\dots n} \quad \text{et} \quad \frac{1.2.3\dots n}{1000^n}$$
>
> Les géomètres diront que la première converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999^e ; mais ils regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.
>
> Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant; et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.
>
> Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières.

Les séries des astronomes auxquelles Poincaré fait allusion (et dont il a été le premier à montrer le caractère divergent "au sens des géomètres") sont les "développements en séries de perturbation" de la mécanique céleste, ceux-là même grâce auxquels Le Verrier était devenu célèbre en prédisant l'existence d'une planète jusqu'alors inobservée, la planète Neptune.

Plus près de nous, les développements en séries de perturbation de l'électrodynamique quantique, dont l'invention en 1948 a valu le prix Nobel à Feynman, Schwinger et Tomonaga, sont des séries *divergentes* [3] de puissances de la "constante de structure fine" $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ [4]. Et pourtant, en ne gardant de ces séries que les trois ou quatre premiers termes (le calcul des termes suivants étant d'une complexité rédhibitoire), on obtient un accord spectaculaire avec l'expérience. Comme le dit Feynman dans son merveilleux livre de vulgarisation *Lumière et matière : une étrange histoire* [19], c'est comme si on déterminait une distance entre New-York et San Francisco à l'épaisseur d'un cheveu près !

Plus accessible aux mathématiciens est l'exemple suivant, que les physiciens considèrent comme une version "jouet" des développements de l'électrodynamique quantique :

[3] Freeman G. DYSON (1952)[15]

[4] Il s'agit d'une constante fondamentale de la nature, la seule connue qui soit un "nombre pur" (indépendant du choix des unités) : elle est définie comme le carré de la charge de l'électron divisé par $\hbar c$ (la constante de Planck que multiplie la vitesse de la lumière).

PROBLÈME *Etudier, en fonction du paramètre λ (positif petit), les valeurs propres de l'opérateur différentiel*

$$\mathcal{H}_\lambda = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} + \lambda x^4 \tag{2.1}$$

Par "valeurs propres" de $\mathcal{H}_\lambda$ on entend les valeurs E pour lesquelles l'équation différentielle

$$\mathcal{H}_\lambda u = Eu \tag{2.2}$$

admet une solution u "confinée", c'est-à-dire décroissant assez rapidement quand x tend vers $\pm\infty$ [5]. Pour $\lambda = 0$ l'opérateur $\mathcal{H}_0$ est le hamiltonien quantique de *l'oscillateur harmonique à une dimension*, dont les valeurs propres forment la suite arithmétique

$$E_0 = \frac{1}{2},\ E_1 = \frac{3}{2},\ E_2 = \frac{5}{2}, \ldots, E_n = n + \frac{1}{2}, \ldots \tag{2.3}$$

Pour $\lambda > 0$ petit on démontre que les valeurs propres sont voisines des valeurs ci-dessus, et données par des développements en séries de puissances de λ, les *développements de Rayleigh-Schrödinger* :

$$E_n(\lambda) = n + \frac{1}{2} + \cdots \tag{2.4}$$

Le caractère *divergent* de ces développements (sur lequel je reviendrai plus loin) traduit le fait que l'ajout du terme λx^4 dans l'expression du hamiltonien est une perturbation *singulière* de $\mathcal{H}_0$, à laquelle on ne peut appliquer la théorie usuelle des perturbations (intuitivement, cela vient du fait que pour x grand le terme "perturbatif" λx^4 l'emporte sur le terme "harmonique" $\frac{x^2}{2}$). On peut aussi remarquer que si ces développements avaient un rayon de convergence non nul les fonctions $E_n(\lambda)$ pourraient être prolongées analytiquement du côté $\lambda < 0$, ce qui choque l'intuition physique : en effet pour $\lambda < 0$ le "potentiel" $V(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda x^4$ est "répulsif", de sorte que les solutions u de (2.2) ne sauraient être confinées.

C'est d'ailleurs un argument analogue que Dyson a utilisé pour justifier son affirmation du caractère divergent des développements de l'électrodynamique quantique : si ceux-ci avaient un rayon de convergence non nul ils convergeraient en particulier pour α négatif petit ; mais un monde où la "constante de structure fine" serait négative serait un monde où deux charges électriques de même signe s'attireraient au lieu de se repousser... (Dyson poursuit en montrant qu'une telle hypothèse conduirait à des incohérences dans le formalisme de l'électrodynamique quantique).

3 Séries asymptotiques de Poincaré vs. sommation de Borel

Il fut une époque où les mathématiciens n'auraient pas eu de scrupule à écrire la fonction (1.2) et la série infinie (1.3) de part et d'autre d'un signe "égale", comme nous acceptons d'écrire l'égalité (1.1).

[5] Il suffira de demander à u d'être de carré intégrable. En fait elle sera exponentiellement décroissante à $+\infty$ et $-\infty$.

Pour un mathématicien "normal" du vingtième siècle, une telle écriture serait un *non-sens* [6]: selon un usage bien institutionnalisé depuis Cauchy, *une série qui ne converge pas ne saurait représenter une fonction* ; tout au plus une telle série S peut-elle servir à exprimer une *propriété* d'une fonction f, à savoir la propriété

$$\text{pour tout entier } m,\ |S_m - f| \text{ est un } o(|x|^m) \qquad (*)$$

où S_m désigne la somme de S tronquée à l'ordre m, et où "être un petit o de $|x|^m$ " signifie tendre vers zéro plus vite que $|x|^m$.

On résume la propriété $(*)$ en disant que *la fonction f a la série S comme développement asymptotique quand $x \to 0$.*

Il n'est pas difficile de démontrer que la fonction f définie par (1.2) a la série (1.3) pour développement asymptotique[7]. Mais cette propriété de f est partagée par bien d'autres fonctions, par exemple toutes celles de la forme[8]

$$f_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{e^{-t/x}}{1+t}\, dt \qquad (3.1)$$

dont quelques unes sont représentées sur la figure 3.

C'est pourquoi Poincaré a proposé de considérer qu'une série divergente ne représente pas une fonction mais *toute une classe* de fonctions, "classe d'équivalence" pour la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{ pour tout } m, |f-g| \text{ est un } o(|x|^m)$$

Une telle classe est ce que Poincaré appelle une *série asymptotique*. Par sa simplicité et son élégance, ce point de vue a conquis une place dominante dans les mathématiques du vingtième siècle. Mais pour un mathématicien qui s'intéresse aux fonctions "pour elles-même", comme à des "individus", comment se contenter d'un point de vue qui "met dans le même sac" des fonctions aussi dissemblables que celles de la figure 3 ? Et en quoi ce point de vue nous aide-t-il à comprendre les succès numériques spectaculaires de la "sommation des astronomes"?

[6] C'est d'ailleurs à juste titre qu'un tel mathématicien se scandaliserait de la façon cavalière dont nous avons "déduit" la série (1.3) de l'expression intégrale (1.2), en intégrant terme à terme un développement en séries de puissances de t *qui ne converge pas tout le long de l'axe* $[0,\infty]$ *mais seulement pour* $x < 1$!

[7] Remarquer que

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^m t^m + (-1)^{(m+1)} \frac{t^{m+1}}{1+t}$$

et que $0 < \frac{t^{m+1}}{1+t} < t^{m+1}$. On obtient ainsi "en prime" le fait que le terme correctif est > 0 pour m impair et < 0 pour m pair, de sorte que les sommes partielles successives de la série (1.2) encadrent la fonction f alternativement par excès et par défaut.

[8] En effet on établit sans peine des inégalités $0 < f(x) - f_\alpha(x) < C_\alpha\, e^{-\alpha/x}$, qui montrent que $|f - f_\alpha|$ est pour tout m un $o(|x|^m)$.

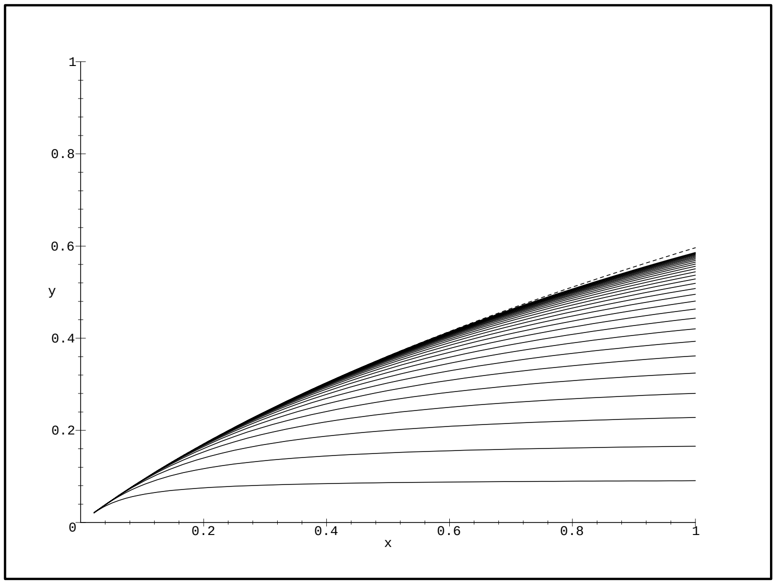

Fig.3: La fonction (1.2) *(en tirets), et les fonctions f_α pour $\alpha = p/10$,*
$p = 1, \ldots, 30$

Dans ses *Leçons sur les séries divergentes* (1905), Emile Borel propose un tout autre point de vue (cf. Appendice), dans lequel à toute série S de puissances de la variable x vérifiant un certain nombre de conditions dites “de sommabilité” est associée une fonction f bien déterminée, appelée *somme* (de Borel) de la série S. Par exemple la série (1.3) est sommable au sens de Borel, et admet la fonction (1.2) pour somme. *Les développements de Rayleigh-Schrödinger* (2.4) *sont sommables au sens de Borel* ([20], 1969).

La sommation au sens de Borel est une opération transcendante, pas facile à implémenter numériquement. Mais on peut montrer que la recette de “sommation des astronomes” en fournit une bonne approximation (comme dans l'exemple discuté à la fin du §1): cf. appendice, où l'on trouvera des estimations de l'erreur commise.

C'est grâce à cela que nous pouvons comprendre aujourd'hui un étrange et spectaculaire calcul de Stokes (1850), dont je vais parler maintenant.

4 Regard neuf sur un étrange calcul de Stokes

Introduite en 1838 par l'astronome britannique G.Airy pour modéliser l'arc-en-ciel[1], la fonction d'Airy (fig.4) peut être définie par l'intégrale

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t^3 + xt)\, dt \tag{4.0}$$

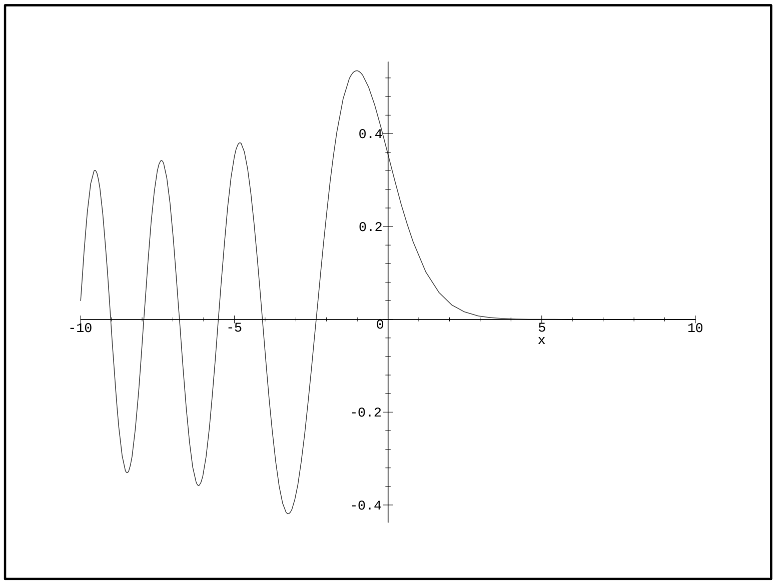

Fig.4: la fonction d'Airy

En 1850 G.G.Stokes entreprit de comparer le modèle d'Airy aux résultats expérimentaux très précis obtenus entre temps par des physiciens (qui avaient monté en laboratoire des "simulations d'arc-en-ciel"). Comme l'intégrale (4.0) se prête mal aux calculs numériques sa première idée fut de développer $Ai(x)$ en série de puissances de x, série dont il est facile de montrer qu'elle converge pour tout x. Malheureusement il constata que la convergence était très lente, ne lui permettant pas en pratique d'obtenir une précision satisfaisante en dehors d'un petit voisinage de $x = 0$. Il décida donc de chercher à développer la fonction d'Airy "au voisinage de l'infini", inventant pour l'occasion la méthode aujourd'hui connue sous le nom de "méthode du col"[9].
$\boxed{\text{Pour } x >> 0}$ il trouva

$$Ai(x) = \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}\,(1 - \frac{a_1}{x^{3/2}} + \frac{a_2}{x^{6/2}} - \frac{a_3}{x^{9/2}} + \cdots) \tag{4.1}$$

avec[10]

$$a_n = (\frac{3}{4})^n\, \frac{\Gamma(n+\frac{1}{6})\Gamma(n+\frac{5}{6})}{2\pi\,\Gamma(n+1)}$$

$\boxed{\text{Pour } x << 0}$ il vit qu'il fallait faire intervenir *deux* cols, et fut ainsi conduit à écrire la fonction d'Airy comme somme de deux termes (complexes conjugués

[9] Cf. par exemple [14].

[10] Γ est la fonction Gamma d'Euler, définie pour $\Re es > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$

En particulier pour s entier $\Gamma(s) = (s-1)!$.

l'un de l'autre),

$$\begin{aligned} &Ai(x) = \Phi + \overline{\Phi}, \qquad \text{avec (en posant } x = -r^{2/3}) \\ &\Phi = \tfrac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}}\, r^{-1/6} e^{\frac{2}{3}ir}\, (1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n\, \frac{a_n}{r^n}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

En regroupant d'un côté les puissances paires de r^{-1}, de l'autre les puissances impaires, il trouva ainsi

$$\begin{aligned} Ai(-r^{2/3}) &= \cos(\tfrac{2}{3}r - \tfrac{\pi}{4})\, R(r) + \sin(\tfrac{2}{3}r - \tfrac{\pi}{4})\, S(r), \text{ avec} \\ R(r) &= \tfrac{r^{-1/6}}{\sqrt{\pi}}(1 + \textstyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\, \frac{a_{2m}}{r^{2m}}) \\ S(r) &= \tfrac{r^{-1/6}}{\sqrt{\pi}}(\textstyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\, \frac{a_{2m-1}}{r^{2m-1}}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour déterminer les zéros de l'expression (4.3) il est plus commode de la réécrire sous la forme

$$Ai(-r^{2/3}) = \rho(r)\, \cos(\frac{2}{3}r - \frac{\pi}{4} - \varphi(r)) \tag{4.4}$$

où l'on a posé $\rho = (R^2 + S^2)^{1/2}$, $\varphi = \operatorname{Arc\,tg} \frac{S}{R}$ (si l'on interprète (R, S) comme coordonnées cartésiennes dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, (ρ, φ) s'interprètent comme les coordonnées polaires).

Si l'on admet que ρ ne s'annule jamais, les zéros de (4.4) sont ceux de la fonction sinusoïdale $\cos(\frac{2}{3}\tau - \frac{\pi}{4})$, où l'on a posé

$$\tau = r - \frac{3}{2}\varphi(r) \tag{4.5}$$

Pour réexprimer ces zéros en termes de la variable r, il suffit d'inverser la formule (4.5). On trouve

$$r(\tau) = \tau + \frac{5}{32}\,\tau^{-1} - \frac{1255}{6144}\,\tau^{-3} + \frac{272075}{196608}\,\tau^{-5} + \cdots \tag{4.6}$$

En fait Stokes ne poussa pas le développement plus loin que le terme en τ^{-5} ; en le tronquant ainsi, *il obtint la position des zéros de la fonction d'Airy avec 4 décimales exactes, sauf le premier zéro pour lequel il obtint "seulement" 3 décimales exactes.*

Et pourtant la série infinie (4.6), comme toutes celles qui précèdent, *sont des séries divergentes*, de sorte que pour un mathématicien "normal" du vingtième siècle *la suite d'égalités écrites par Stokes est une succession de non-sens* !

Il est vrai qu'au prix de quelques contorsions on peut les réinterpréter comme des "équivalences asymptotiques" au sens de Poincaré. Mais outre qu'elle n'explique pas le succès numérique spectaculaire du calcul de Stokes, cette réinterprétation a conduit à répandre dans la communauté mathématique une compréhension erronée d'un phénomène important, célèbre sous le nom de *phénomène de Stokes.* En étudiant les prolongements analytiques de la fonction d'Airy dans le plan complexe, Stokes avait découvert que son égalité (4.1) était valable dans le secteur $\frac{-2\pi}{3} < \arg x < \frac{2\pi}{3}$, et l'égalité (4.2) dans le secteur $\frac{-\pi}{3} < \arg(-x) < \frac{\pi}{3}$; autrement dit, *selon Stokes, le développement de la fonction d'Airy subit une discontinuité au passage des lignes* $\arg x = \pm\frac{2\pi}{3}$. Si au contraire on réinterprète les égalités de Stokes en termes d'équivalences asymptotiques au sens de Poincaré, cette affirmation devient fausse, la discontinuité du développement asymptotique ne se produisant pas là où l'affirme Stokes mais au passage de l'axe réel négatif[11]. Cela a conduit à une situation comique : alors que la littérature mathématique du vingtième siècle fourmille de références au "phénomène de Stokes", la majorité des mathématiciens, mus par un souci de rigueur dans lequel le point de vue originel de Stokes n'a pas trouvé sa place, appellent "lignes d'anti-Stokes" ce que la plupart des physiciens appellent "lignes de Stokes", et vice-versa !

Il est pourtant possible de comprendre le discours de Stokes comme parfaitement rigoureux, sans avoir à y changer un iota : il suffir pour cela de remarquer que toutes les séries qu'il manipule sont *sommables au sens de Borel*, et d'interpréter en ce sens les égalités où interviennent ces séries. A ma connaissance, cette façon de comprendre Stokes est de date récente (du moins chez les mathématiciens, qui longtemps n'ont accordé que peu d'attention aux idées de Borel sur les séries divergentes). Elle s'est développée grâce à la *théorie de la résurgence*, introduite par Jean Ecalle vers 1980. En modifiant un peu les hypothèses de Borel (cf. appendice), Ecalle définit une classe de fonctions appelées *fonctions résurgentes*, classe dont il montre qu'elle est stable par toutes les opérations usuelles de l'analyse : addition, multiplication, composition des fonctions, fonction réciproque ou fonctions implicites... (en particulier toutes les opérations formelles mises en œuvre par Stokes pour déduire ses équations les unes des autres sont licites dans la classe des fonctions résurgentes, classe à laquelle appartiennent chacun des membres de ces équations).

La théorie d'Ecalle dispose par ailleurs (et c'est là sa principale nouveauté) d'une machinerie puissante pour analyser systématiquement les phénomènes de Stokes. A priori, la théorie a vocation à s'appliquer à tous les problèmes asymptotiques "naturels" posés dans un cadre analytique. C'est dire si son champ est immense, et il ne saurait être question ici de passer en revue les diverses applications développées à ce jour (cf. notamment [16][17][18]). Qu'on me permette seulement de situer mon champ d'intérêt personnel, qui concerne les équations différentielles singulièrement perturbées du type de l'équation (2.2) [12], sujet auquel les physiciens ont jusqu'ici accordé beaucoup plus d'attention que les mathématiciens. Ce sont d'ailleurs des idées de physiciens [3], citées par Bernard Malgrange dans [21], qui m'ont donné envie de lire ce que Borel avait écrit sur les séries divergentes. C'est ainsi que j'ai découvert non pas seulement des résultats mathématiques mais un *auteur*, dont la pensée profondément originale a bouleversé ma vision des mathématiques.

---

[11] En effet, c'est en traversant l'axe réel négatif (ou bien l'un des deux axes $\arg x = \pm\frac{\pi}{3}$) que les deux exponentielles complexes de la formule (4.2) "échangent leur dominance". Quant au phénomène de Stokes (au sens originel où l'entendait Stokes), il se produit au contraire là où l'une des deux exponentielles est "maximalement dominante" sur l'autre (pour reprendre une heureuse terminologie due à Dingle[13]).

[12] Par exemple avec mon co-équipier Eric Delabaere j'ai précisé dans[11] les propriétés de prolongement analytique complexe des fonctions $E_n(\lambda)$ dont il a été question au §2, démontrant une vieille conjecture qui avait fait couler beaucoup d'encre chez les physiciens.

Appendice : de Borel à Ecalle

A1 Définition de la sommation de Borel

Etant donné une série formelle

$$\varphi = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \tag{A1}$$

vérifiant trois hypothèses i)ii)iii) formulées plus loin, la *somme de Borel* de φ sera définie par la formule

$$\varphi^{(0)}(z) := a_0 + \int_0^\infty e^{-z\zeta}\,\hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta \tag{A2}$$

où $\hat{\varphi}$ est la fonction analytique donnée au voisinage de 0 par le développement convergent

$$\hat{\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\,\zeta^n \tag{A3}$$

Pour que l'intégrale $(A2)$ ait un sens, on suppose que

i) la série $(A3)$ (appelée *transformée de Borel de* φ) a un rayon de convergence strictement positif ;

ii) la fonction $\hat{\varphi}$ définie par cette série se prolonge analytiquement le long de l'axe réel positif ;

iii) $\hat{\varphi}$ ne croît pas plus vite qu'une exponentielle quand ζ tend vers l'infini :

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| < c\,e^{\tau\zeta} \tag{A4}$$

Une série φ dont la transformée de Borel $\hat{\varphi}$ vérifie ces trois hypothèses sera dite *sommable de Borel.* Sa *somme de Borel*, définie par l'intégrale $(A2)$, est alors une fonction analytique dans le demi-plan $\Re e\, z > \tau$ (où τ est le "type exponentiel" de $\hat{\varphi}$, c'est-à-dire la borne inférieure des τ pour lesquels $\hat{\varphi}$ vérifie une inégalité de la forme $(A4)$).

A2 Comparaison avec la "sommation des astronomes"

Supposons maintenant que z soit *réel positif.* Sous les hypothèses A1, notons $R_m(z)$ l'erreur commise en remplaçant la somme de Borel $\varphi^{(0)}(z)$ par la somme *tronquée à l'ordre* m de la série φ :

$$R_m(z) := \varphi^{(0)}(z) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{z^n} \tag{A5}$$

En utilisant astucieusement la formule des résidus de Cauchy, on démontre que

$$|R_m(z)| \leq K\,\frac{m!}{(\rho z)^{m+1}} \tag{A6}$$

où ρ est le rayon de convergence de la série $(A3)$, et K une constante positive.

Comme déjà mentionné à la fin du §1, le membre de droite de $(A6)$ est minimal pour $m \simeq \rho z$. En remplaçant $m!$ par son évaluation asymptotique donnée par la formule de Stirling on déduit de $(A6)$ que *pour m grand, de l'ordre de ρz*, on a

$$|R_m(z)| \leq C\, e^{-\rho z} \tag{A7}$$

(où C est une constante positive).

A3 Extension aux valeurs complexes de z

Modifions les hypothèses ii) iii) de A1 en remplaçant l'axe réel positif par un secteur du plan complexe $\{\arg\zeta \in I\}$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$). Pour $\theta \in I$, la *somme de Borel de φ dans la direction $e^{i\theta}\infty$* peut alors être définie par la formule

$$\varphi^{(\theta)}(z) := a_0 + \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta}\, \hat{\varphi}(\zeta)\, d\zeta \tag{A8}$$

La fonction ainsi définie est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(ze^{i\theta}) > 0$, et il résulte immédiatement du théorème de Cauchy que cette fonction $\varphi^{(\theta)}$ est "localement indépendante du choix de θ ": plus précisément, pour toute autre direction $\theta' \in I$ les fonctions $\varphi^{(\theta)}$ et $\varphi^{(\theta')}$ coïncident dans l'intersection de leurs demi-plans de définition.

Pour imiter la démarche de A2, nous allons maintenant supposer que

$$\arg z = -\theta$$ [13]

Alors *tout ce qui a été dit en A2 reste vrai, avec $\varphi^{(0)}(z)$ remplacé par $\varphi^{(\theta)}(z)$, et z remplacé par $|z|$ dans les inégalités (A6), (A7).*

A4 L'anneau des "séries résurgentes" d'Ecalle

Alors que Borel demandait à la fonction $\hat{\varphi}$ de se prolonger analytiquement dans un voisinage de l'axe réel positif, Ecalle lui demande de se prolonger analytiquement *dans tout le plan complexe sauf en des points isolés* [14]. Par contre il n'interdit pas à ces points singuliers d'être réels positifs : par exemple la série $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{z^n}$, qui a pour transformée de Borel $\hat{\varphi}(\zeta) = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\zeta}$, entre bien dans le cadre de la théorie d'Ecalle bien qu'elle ne vérifie pas les hypothèses A1 ($\hat{\varphi}$ a une singularité sur l'axe réel positif, en $\zeta = 1$). Bien que la présence d'éventuelles singularités sur l'axe réel positif empêche de définir la somme de Borel $\varphi^{(0)}$, elle n'empêche pas de définir deux *sommes d'Ecalle* $\varphi^{(0)+}$ *resp.* $\varphi^{(0)-}$, définies respectivement en détournant légèrement dans (A2) le chemin d'intégration au dessus ou au dessous de l'axe réel positif. On définira de même, pour tout angle θ, deux sommes d'Ecalle $\varphi^{(\theta)+}$ et $\varphi^{(\theta)-}$. Ecalle démontre —c'est là le point de départ de sa théorie— que ses hypothèses sur

[13] Remarquez que si z est fixé, $\theta = -\arg z$ est la direction de *décroissance la plus rapide* de la fonction $\zeta \mapsto e^{-z\zeta}$ dans la formule (A8). C'est de cette façon qu'il faut choisir θ pour obtenir une interprétation du "phénomène de Stokes" conforme aux affirmations de Stokes dans [27].

[14] Ce prolongement peut être "multiforme", c'est-à-dire que les singularités de $\hat{\varphi}$ peuvent être des "points de branchement". On trouvera dans [7] des précisions sur la notion (pas si évidente qu'on pourrait le croire) de "fonction multiforme à points singuliers isolés".

φ sont *stables par addition et multiplication des séries formelles*, et que chacun des opérateurs $s^{(\theta)\pm} : \varphi \mapsto \varphi^{(\theta)\pm}$ est un *homomorphisme* de l'anneau des "séries résurgentes" (séries vérifiant les hypothèses ci-dessus) dans l'anneau des fonctions. Le cœur de la théorie consiste en l'étude algébrique des *automorphismes de Stokes* $\mathcal{S}^\theta = (s^{(\theta)+})^{-1} \circ s^{(\theta)-}$, qui contiennent toute l'information sur l'ambiguïté de la sommation d'Ecalle ; il s'agit d'automorphimes "formellement tangents à l'identité" et Ecalle préfère travailler avec leurs logarithmes formels, qu'il appelle les *dérivations étrangères.* Tout le sel de la théorie tient dans le fait que dans tous les problèmes naturels où interviennent des séries résurgentes, celles-ci sont liées à leurs dérivées étrangères par des relations explicites simples, qu'Ecalle appelle les *équations de résurgence* du problème (le mot "résurgence" évoque l'idée qu'on voit "re-surgir" les objets de départ dans les expressions de leurs dérivées étrangères).

References

[1] G.I.Airy, On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans.Cam.Phil.Soc* 6 (1838), 379-402

[2] R.Balian & C.Bloch, Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths, *Ann. of Physics* 85 (1974), 514-545

[3] R.Balian, B.Parisi, A.Voros, Quartic oscillator, in *Feynman path integrals (Proceedings of Marseille conference, 1978)*, Springer Lecture Notes in Physics 106 (1979)

[4] M.V.Berry, Stokes phenomena; smoothing a victorian discontinuity, *Pub.Math.IHES* 68 (Volume en l'honneur de René Thom) (1989), 211-221

[5] M.V.Berry & C.Howls, Hyperasymptotics for integral with saddles, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A, 434 (1991), 657-675

[6] E.Borel *Leçons sur les séries divergentes* (1905, 2e ed. Gauthier-Villars 1928, reed. J.Gabay, 1988)

[7] B.Candelpergher, J.C.Nosmas, F.Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris 1993

[8] E.Delabaere, Une introduction à l'asymptotique complexe, *PuPé* 28 (1997), Université de Nice-Sophia Antipolis

[9] E.Delabaere, H.Dillinger, F.Pham, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, 43, 1 (1993), 163-199

[10] E.Delabaere & F.Pham, Resurgent methods in exact semi-classical asymtotics, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théo.* 71, 1 (1999)

[11] E.Delabaere & F.Pham, Unfolding the quartic oscillator, *Ann. of Physics* 261, 2 (1997), 180-218

[12] E.Delabaere & F.Pham, Eigenvalues of complex hamiltonians with $\mathcal{PT}$-symmetry
I: *Physics Letters A* 250 (1998) 25-28
II: *Physics Letters A* 250 (1998) 29-32

[13] R.B.Dingle, *Asymptotic expansions : their derivation and interpretation*, Acad. Press, Oxford (1973)

[14] J.Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann 1968

[15] F.J.Dyson *Phys. Rev.* 85 (1952), 631-

[16] J.Ecalle, Cinq applications des fonctions résurgentes, *Publ. Math. d'Orsay*, Univ. Paris-sud, 84T 62, Orsay (1984)

[17] J.Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac* (Actualités mathématiques, Hermann 1992)

[18] J.Ecalle, Weighted products and parametric resurgence, *in : Analyse algébrique des perturbations singulières I: Méthodes résurgentes*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1994), 7-49

[19] R.P.Feynman, Lumière et matière, une étrange histoire (traduit par F.Balibar & A.Laverne, Interéditions 1987)

[20] J.Loeffel, A.Martin, B.Simon, & A.Wightman, *Phys. Lett.* B 30 (1969), 656-

[21] B.Malgrange, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. Ec. Normale Sup.* 4, 7 (1974)

[22] F.Pham Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel, *Pub.Math.IHES* 68 (vol. en l'honneur de René Thom) (1989), 77-90

[23] F.Pham, Multiple turning points in exact WKB analysis (variations on a theme of Stokes), *in : Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear or non-linear*, C.Howls, T.Kawai, Y.Takei ed., Kyoto University Press (2000), 71-85

[24] F.Pham, Asymptotic expansions : old and new, *in : Proceedings of the Fifth Vietnamese Mathematical conference, Hanoi September 1997*, Dinh Dung & Trân Duc Vân ed., Science and Technics Publishing House, Hanoi 1999

[25] H.Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t.I, Gauthier-Villars 1892, réed. librairie Albert Blanchard, Paris 1987

[26] J.P.Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Suppl.Bull.S.M.F., Panoramas et Synthèses V 121, SMF Paris 1993

[27] G.G.Stokes *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 9 (1850) and *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 10 (1857): reprinted 1904 *Mathematical and Phys. Papers*, vol. II and IV, Cambridge Univ. Press

[28] A.Voros The return of the quartic oscillator (the complex WKB method), *Ann.Inst.H.Poincaré, Phys. Théo.*, 39 (1983), 211-338