ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
L3 ANALYSE COMPLEXE
EXAMEN DU 14 MAI 2013.
DURÉE: 3 HEURES.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

Notations: ln désigne le logarithme népérien.
$\mathrm{Re}(z)$ $\mathrm{Im}(z)$ la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z, $\cosh(z)$ son cosinus hyperbolique et si z n'est pas nul, $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ désigne son argument.

Exercice 1. *Soit* $S = \{z \in \mathbb{C},\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$ *et* $f \in \mathcal{O}(S)$ *telle que* f *se prolonge à une fonction continue sur l'adhérence* $\bar{S}$ *de* S. *On suppose* $|f(z)| \leq 1$ *si* $z \in \partial S = \bar{S} - S$.

Supposons qu'il existe $0 \leq C < 1$ *et* $K > 0$ *deux constantes réelles telles que* $\forall z \in S,\ |f(z)| \leq K.e^{\cosh(C\mathrm{Re}(z))}$.

(1) *Expliciter un biholomorphisme de* $H = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}(z)\}$ *sur* S.
(2) *Montrer que la fonction holomorphe* $z \mapsto f(z)e^{-\epsilon \cosh(Dz)}$ *est bornée sur* S *dès que* $C < D < 1$ *et* $\epsilon > 0$.
(3) *Montrer que* $\forall z \in S,\ |f(z)| \leq 1$.
(4) *Montrer qu'en supposant* $C = 1$, f *n'est pas toujours bornée sur* S.
(5) *Soit* $0 < \alpha < \pi$ *décrire un biholomorphisme du secteur angulaire* $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Arg}(z)| < \alpha\}$ *sur* H.
(6) *Soit* $g \in \mathcal{O}(S_\alpha) \cap C^0(\bar{S}_\alpha)$ *telle que* $\forall z \in S_\alpha,\ |g(z)| \leq K.e^{|z|^{C\frac{\pi}{2\alpha}}}$ C, K *comme ci dessus et* $\forall z \in \partial S_\alpha,\ |g(z)| \leq 1$. *Montrer que* $\forall z \in S_\alpha,\ |g(z)| \leq 1$.

Exercice 2. *On définit pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *notée* E_p, *par* $E_0(z) = 1 - z$ *et si* $p \geq 1$:

$$E_p(z) = (1-z)\exp(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k})$$

(1) *Montrer que* $-E_p'(z) = z^p \exp(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k})$ $(p \neq 0)$.
(2) *Montrer que* $-E_p'(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} b_{p,n} z^n$ *avec* $b_{p,n} \geq 0$ $(p \neq 0)$.
(3) *En déduire que la fonction* $\phi_p : z \mapsto \frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$ *se prolonge en* 0 *à une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *qui vérifie* $\phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} z^n$ *avec* $a_{p,n} \geq 0$ $(p \neq 0)$.
(4) *En déduire que pour* $|z| \leq 1$, *on a* $|\phi_p(z)| \leq \phi(1) = 1$ *et* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

(5) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes non nuls tels que* $\lim |a_n| = +\infty$ *et* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres entiers naturels. On pose:*

$$F_N(z) = \prod_{k=0}^{N} E_{p_k}(\frac{z}{a_k}).$$

Montrer que, si pour tout $R > 0$, *on a* $\sum_k \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k+1} < +\infty$, *la suite* $(F_N)_{N\in N}$ *converge dans* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *vers une fonction entière* F *dont on déterminera les zéros et leur multiplicité.*

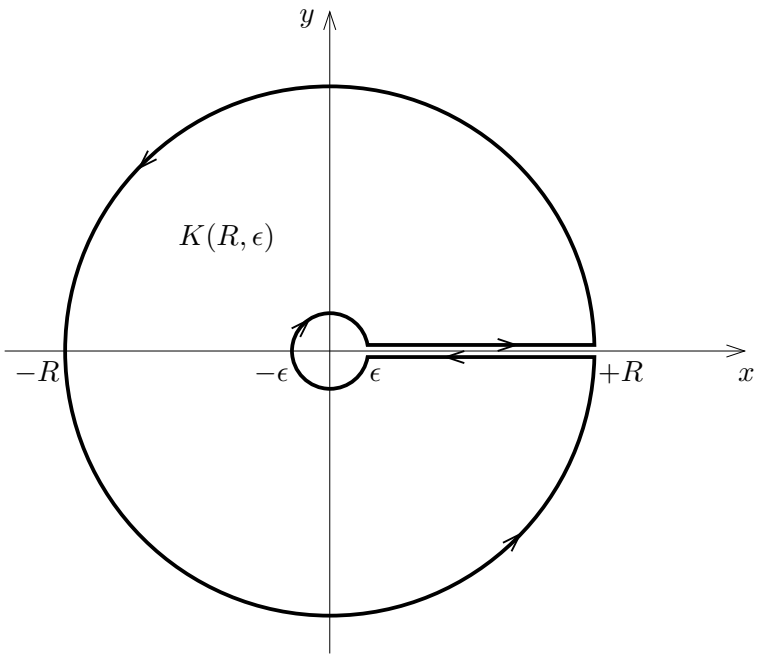
Indication. On pourra d'abord supposer que $|a_n| > R$ *et montrer qu'alors la série de fonctions holomorphes* $\sum_k \log E_{p_k}(\frac{z}{a_k})$ *- où l'on a choisi la détermination du* log *de sorte que* $\log(1) = 0$ *- est bien définie et converge sur le disque de centre* 0 *et de rayon* R.

(6) *Montrer que pour toute suite de nombres complexes non nuls* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle* $\lim |a_n| = +\infty$ *on peut trouver une suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la condition de la question précédente est vérifiée.*

(7) *Montrer que pour tout ensemble discret* $S \subset \mathbb{C}$ *et toute application* $m : S \to \mathbb{N}^*$ *il existe une fonction entière* g *d'ensemble de zéros égal à* S, *la multiplicité de* g *en* $s \in S$ *étant* $m(s)$.

(8) *Montrer qu'une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *est un quotient de fonctions entières.*

Exercice 3. *Calculer l'intégrale:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{(1+x)^2} dx$$

en intégrant $f(z) = \log^3(z)/(z+1)^2$, *avec un détermination convenable du logarithme, sur le contour:*