

# *Flowers, Forests and Fields in Physics*

Loren Coquille

Thèse effectuée sous la direction du Prof. Yvan Velenik

Université de Genève

21 juin 2013

# Plan de l'exposé

- 1 Phénomènes physiques
- 2 Modélisation
- 3 Limite thermodynamique et mesures de Gibbs du modèle d'Ising
- 4 L'ensemble des mesures de Gibbs du modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$

# Plan de l'exposé

- 1 Phénomènes physiques
- 2 Modélisation
- 3 Limite thermodynamique et mesures de Gibbs du modèle d'Ising
- 4 L'ensemble des mesures de Gibbs du modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$

La mécanique statistique une branche de la physique mathématique. Elle traite de systèmes constitués d'un **très grand nombre de particules**: de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit  $10^{23}$ .

Modélisation microscopique du système  
(interaction entre les atomes)



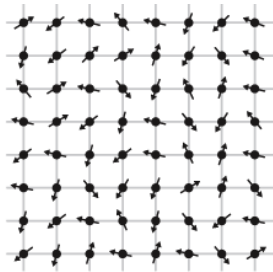
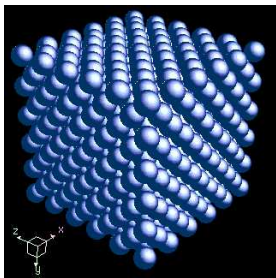
Prédiction du comportement des observables macroscopique  
(densité, aimantation)

Ici on s'intéresse à des **modèles sur réseau**, où plusieurs phases coexistent (liquide-vapeur, aimantation positive/négative).

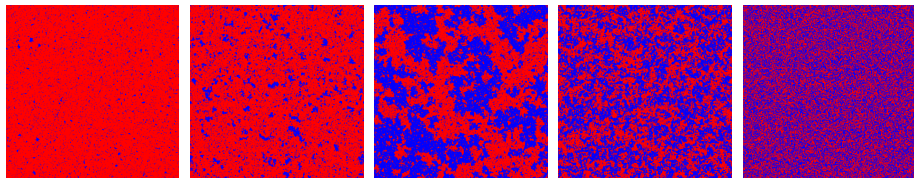
# Transition paramagnétique - ferromagnétique

Aimant = métal ferromagnétique (e.g. Fer). Les atomes forment un réseau cristallin, et chacun d'eux porte un moment magnétique ( $m \in \mathbb{S}^3$ ).

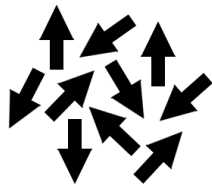
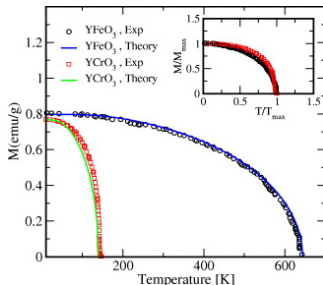
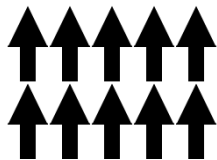
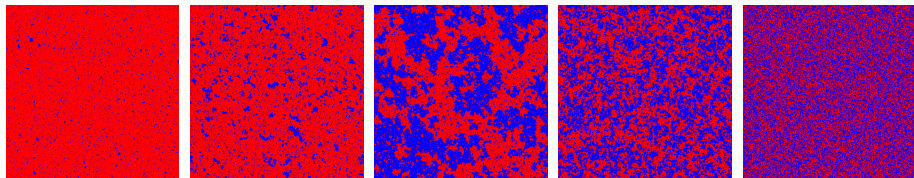
L'interaction des électrons est telle que les atomes voisins ont tendance à aligner leur moment magnétique. Mais cette interaction est en compétition avec les fluctuations thermiques.



On observe une transition de phase: à basse température l'échantillon est aimanté, et à partir d'une certaine température  $T_c$  dépendant du matériau, le matériau perd son aimantation. Cette température critique est appelée température de Curie.



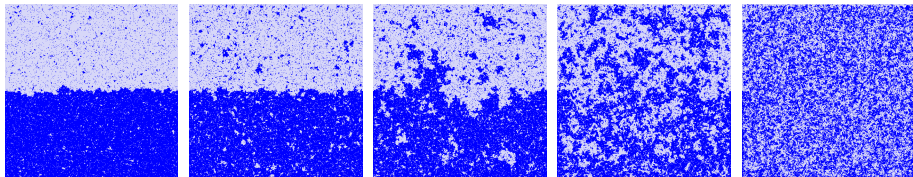
On observe une transition de phase: à basse température l'échantillon est aimanté, et à partir d'une certaine température  $T_c$  dépendant du matériau, le matériau perd son aimantation. Cette température critique est appelée température de Curie.



# Transition liquide - vapeur

Un exemple similaire est la transition liquide-vapeur. La phase liquide est due à l'attraction de Van der Waals entre les particules, qui est en compétition avec les fluctuations thermiques.

Lorsqu'on chauffe un verre d'eau, à basse température on observe la phase liquide (haute densité de particules sous l'interface), et au-dessus de la température d'ébullition l'échantillon est dans la phase gazeuse (densité homogène).

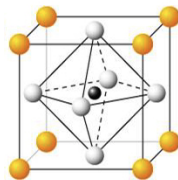
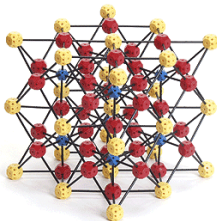




## Transition trigonal - tetragonal du $SrTiO_3$

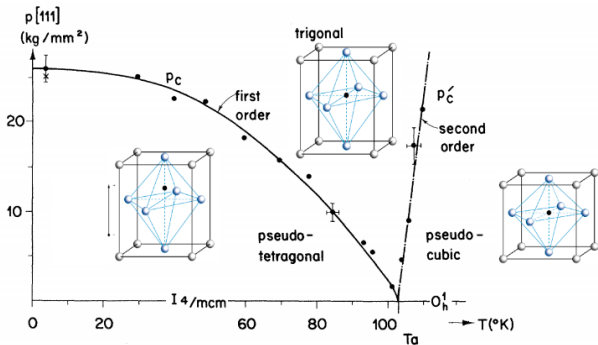
Il existe aussi des matériaux avec plusieurs phases à basse température.

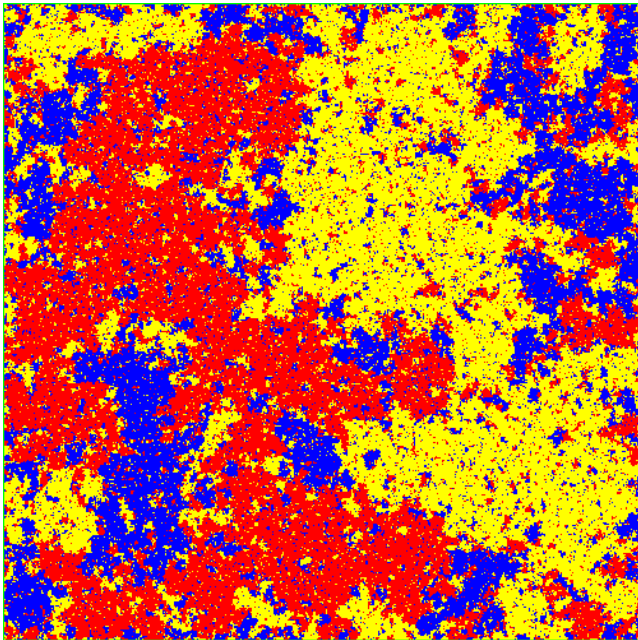
Par exemple, le  $SrTiO_3$  est un cristal à structure Perovskite qui, sous l'effet d'une pression extérieure, a trois directions de déformation favorites: les directions  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$  du cube formé d'atomes de Strontium.



Si on déforme le cristal dans la direction  $[111]$ , localement il se déforme dans ses 3 directions préférées.

De plus, en-dessous une certaine température, l'atome de Titane se déplace le long de la déformation locale, induisant une polarisation de chaque maille.





# Plan de l'exposé

1 Phénomènes physiques



**2 Modélisation**

3 Limite thermodynamique et mesures de Gibbs du modèle d'Ising

4 L'ensemble des mesures de Gibbs du modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$

# Modèle d'Ising

Modélisation très simplifiée des matériaux ferromagnétiques introduite par Lenz en 1920:

“Spins” :  ou   $\rightarrow \sigma_x \in \{-1, +1\}$

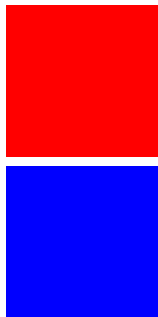
Hamiltonien = énergie d'une configuration

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{x \sim y} \sigma_x \sigma_y \rightarrow \begin{cases} \uparrow\uparrow \text{ ou } \downarrow\downarrow & \text{contribution} = -1 \\ \uparrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow & \text{contribution} = +1 \end{cases}$$

L'état du système est décrit par une mesure de probabilité.

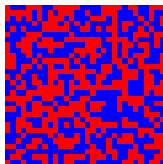
Mesure de Gibbs en volume fini

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{Z} \exp(-\mathcal{H}(\sigma)/T)$$



$T = 0$

??



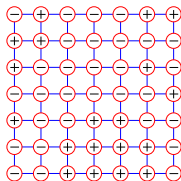
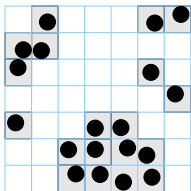
$T = \infty$

$0 < T < \infty$

# Gaz sur réseau

Le modèle d'Ising peut aussi être utilisé pour modéliser la transition liquide-vapeur.

En remplaçant -1 par 0, càd  $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \bullet \\ \downarrow \rightarrow \circ \end{array} \right.$



Modélisation de l'attraction des particules:

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{x \sim y} \sigma_x \sigma_y \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \bullet \quad \text{contribution} = -1 \\ \bullet \circ \text{ ou } \circ \bullet \text{ ou } \circ \circ \quad \text{contribution} = 0 \end{array} \right.$$

# Modèle de Potts

Généralisation du modèle d'Ising introduit par Potts en 1952.

“Spins” : ● ou ● ou ● ...  $\rightarrow \sigma_x \in \{1, \dots, q\}$

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{x \sim y} \delta_{\sigma_x = \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \bullet\bullet \text{ ou } \bullet\bullet \text{ ou } \bullet\bullet \text{ ou } \dots & \text{contribution} = -1 \\ \bullet\bullet \text{ ou } \bullet\bullet \text{ ou } \bullet\bullet \text{ ou } \dots & \text{contribution} = 0 \end{cases}$$

- $q = 2 \rightarrow$  modèle d'Ising
- $q = 3 \rightarrow$  modélise p.ex. la transition du  $SrTiO_3$
- $q = 4, 5, \dots \rightarrow$  autres modèles

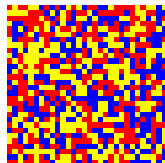


Mesure de Gibbs en volume fini :  $\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{Z} \exp(-\mathcal{H}(\sigma)/T)$



$T = 0$

??



$T = \infty$

$0 \ll T \ll \infty$

# Plan de l'exposé

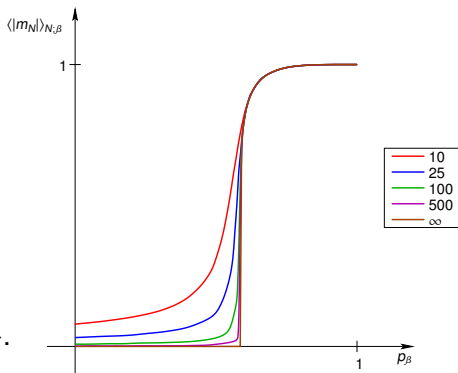
- 1 Phénomènes physiques
- 2 Modélisation
- 3 Limite thermodynamique et mesures de Gibbs du modèle d'Ising**
- 4 L'ensemble des mesures de Gibbs du modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$

# Limite thermodynamique

Les modèles d'Ising et de Potts présentent une transition de phase à partir de la dimension 2. Argument de Peierls 1936.

En volume fini, l'aimantation moyenne du modèle d'Ising est une fonction analytique de la température.

Idem pour la proportion moyenne de couleur  $i$  dans le modèle de Potts,  $i \in \{1, \dots, q\}$ .



## Mesures de Gibbs en volume infini

Une façon naturelle de définir une mesure de probabilité sur un réseau infini est de considérer l'ensemble des limites de mesures en volume fini.

La topologie faible est pertinente physiquement.

### Définition

Une suite de mesures  $\mathbb{P}_R^{\omega_R}$  sur un réseau fini  $R$  converge vers une mesure  $\mathbb{P}$  sur le réseau infini correspondant ssi l'espérance de chaque observable locale  $\langle O \rangle_{\mathbb{P}_R^{\omega_R}}$  converge vers  $\langle O \rangle_{\mathbb{P}}$  lorsque  $|R| \rightarrow \infty$ , i.e.

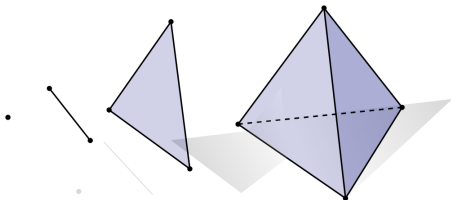
$$\mathbb{P}_R^{\omega_R} \rightarrow \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \langle O \rangle_{\mathbb{P}_R^{\omega_R}} \rightarrow \langle O \rangle_{\mathbb{P}} \quad \forall \text{ observable locale } O$$

# Mesures extrémales

L'ensemble  $\mathcal{G}_T$  des mesures de Gibbs en volume infini pour un certain modèle décrit les états d'équilibre du système à température  $T$ .

$$\mathcal{G}_T = \{\text{points d'accumulation de suites } (\mathbb{P}_R^{\omega_R})_R\}$$

Analyse fonctionnelle  $\Rightarrow \mathcal{G}_T$  est un simplexe  $\Rightarrow$  caractérisé par un ensemble de mesures extrémales.

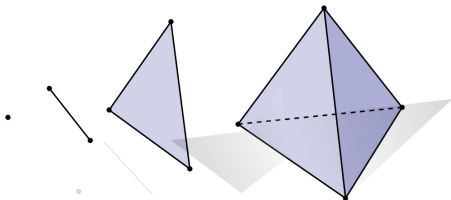


# Mesures extrémales

L'ensemble  $\mathcal{G}_T$  des mesures de Gibbs en volume infini pour un certain modèle décrit les états d'équilibre du système à température  $T$ .

$$\mathcal{G}_T = \{\text{points d'accumulation de suites } (\mathbb{P}_R^{\omega_R})_R\}$$

Analyse fonctionnelle  $\Rightarrow \mathcal{G}_T$  est un simplexe  $\Rightarrow$  caractérisé par un ensemble de mesures extrémales.

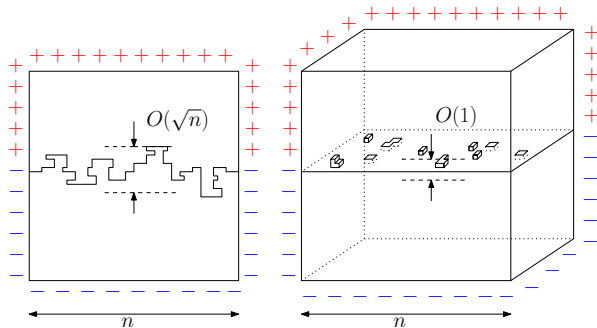


Le phénomène de transition de phase correspond au passage d'unicité à non-unicité de l'ensemble des états d'équilibre.

# Interface de Dobrushin : coexistence des phases + et -

Les phases + et - sont définies comme  $\begin{cases} \mathbb{P}^+ = \lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_R^+ \\ \mathbb{P}^- = \lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_R^- \end{cases}$ . Elles sont extrémales et invariantes sous les translations.

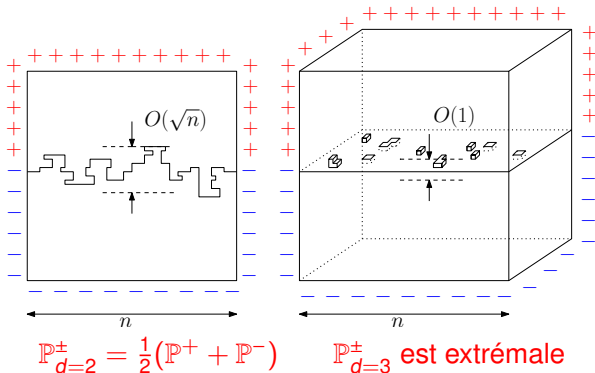
Résultats de Galavotti et Dobrushin (1972) pour  $T \ll 1$ :



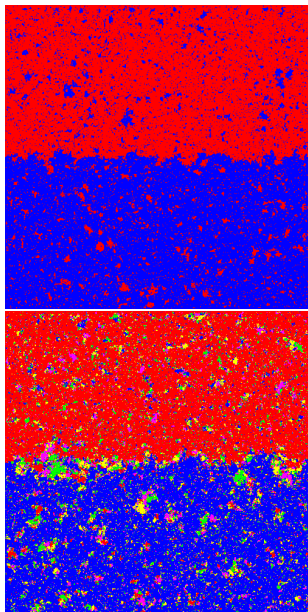
# Interface de Dobrushin : coexistence des phases + et -

Les phases + et - sont définies comme  $\begin{cases} \mathbb{P}^+ = \lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_R^+ \\ \mathbb{P}^- = \lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_R^- \end{cases}$ . Elles sont extrémales et invariantes sous les translations.

Résultats de Galavotti et Dobrushin (1972) pour  $T \ll 1$ :







Une interface de Dobrushin du modèle d'Ising en dimension 2 ( $\leftarrow$ ), en dimension 3 ( $\downarrow$ ), et du modèle de Potts avec  $q=5$  ( $\swarrow$ ).

# Théorème de Aizenman - Higuchi

En 1980, Aizenman et Higuchi ont indépendamment déterminé l'ensemble des mesures de Gibbs du modèle d'Ising 2d.

## Théorème

Pour le modèle d'Ising sur  $\mathbb{Z}^2$ ,

- si  $T \geq T_c$ , alors  $\mathcal{G}_T = \{\mathbb{P}_T\}$ ,
- si  $T < T_c$  alors  $\mathcal{G}_T = [\mathbb{P}_T^-, \mathbb{P}_T^+]$ .

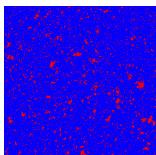
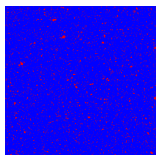
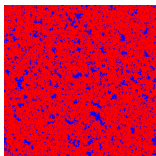
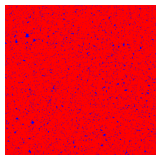
Autrement dit,

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{G}_T, \exists a \in [0, 1] \quad \text{tq} \quad \mathbb{P} = a\mathbb{P}_T^+ + (1 - a)\mathbb{P}_T^-.$$

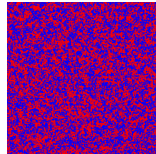
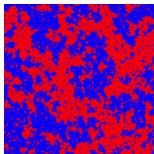


Localement, pas de coexistence de phases :

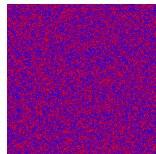
$$T \simeq 0$$



$$T = T_c$$



$$T \gg T_c$$



# Plan de l'exposé

- 1 Phénomènes physiques
- 2 Modélisation
- 3 Limite thermodynamique et mesures de Gibbs du modèle d'Ising
- 4 L'ensemble des mesures de Gibbs du modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$**

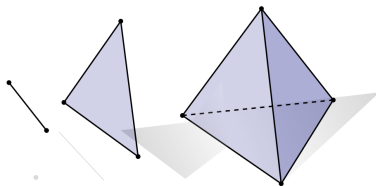
# Caractérisation de $\mathcal{G}_T$ pour le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$

**Théorème (L.C., H. Duminil-Copin, D. Ioffe, Y. Velenik)**

Pour le modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$ ,  $q \geq 2$  et  $T < T_c$  fixés, toute mesure de Gibbs  $\mathbb{P} \in \mathcal{G}_T$  est combinaison convexe des  $q$  mesures  $\mathbb{P}_T^1, \dots, \mathbb{P}_T^q$ .

Autrement dit, il existe une (unique) famille de nombres  $a_1, \dots, a_q \in [0, 1]$  telle que

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^q a_i \mathbb{P}_T^i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^q a_i = 1.$$



Nous prouvons un résultat plus fort...

Notons  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$ .

### Théorème

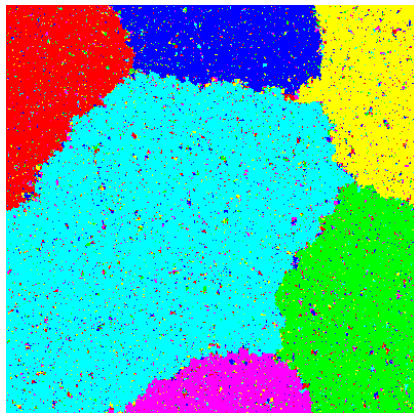
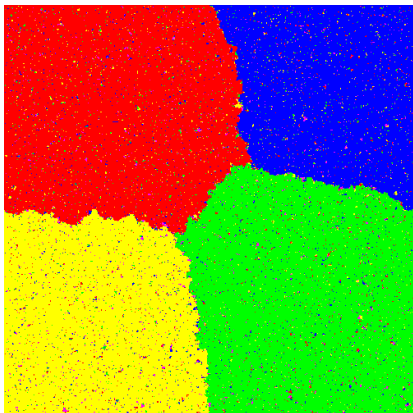
Pour le modèle de Potts sur  $\mathbb{Z}^2$ ,  $q \geq 2$  et  $T < T_c$  fixés, et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon < \infty$  telle que:

pour toute condition au bord  $\omega$  autour de  $\partial\Lambda_n$  il existe  $q$  constantes positives  $a_1^n, \dots, a_q^n$  ne dépendant que de  $(n, \omega, T, q)$ , telles que

$$\left| \mathbb{P}_{\Lambda_n, T}^\omega(f) - \sum_{i=1}^q a_i^n \mathbb{P}_T^i(f) \right| \leq C_\varepsilon \|f\|_\infty n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

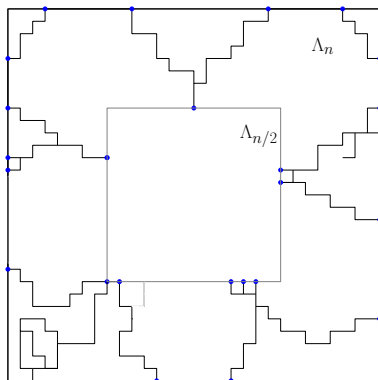
pour toute fonction  $f$  dont le support est dans  $\Lambda_n^\varepsilon$ .

# Philosophie



# Étape 1: Domaines fleur macroscopiques

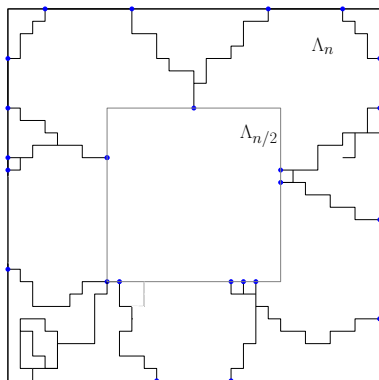
Uniformément en  $\omega$ , un nombre fini d'interfaces atteignent  $\Lambda_{n/2}$  avec grande probabilité.





# Étape 1: Domaines fleur macroscopiques

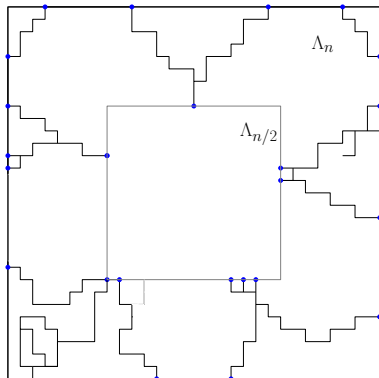
Uniformément en  $\omega$ , un nombre fini d'interfaces atteignent  $\Lambda_n/2$  avec grande probabilité.



$T < T_c \Rightarrow$  tension de surface  $\tau > 0$

# Étape 1: Domaines fleur macroscopiques

Uniformément en  $\omega$ , un nombre fini d'interfaces atteignent  $\Lambda_{n/2}$  avec grande probabilité.

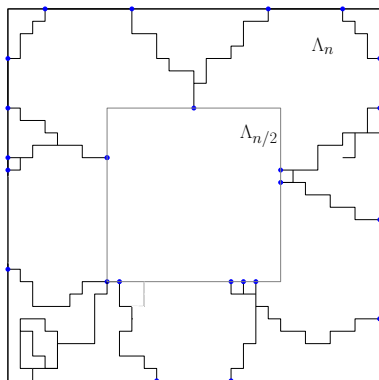


$T < T_c \Rightarrow$  tension de surface  $\tau > 0$

Coût d'une interface atteignant  $\Lambda_{n/2} \simeq e^{-\tau(i-j)}$   
 $\Rightarrow$  Coût de  $r$  interfaces traversantes  $\leq e^{-Crn}$

# Étape 1: Domaines fleur macroscopiques

Uniformément en  $\omega$ , un nombre fini d'interfaces atteignent  $\Lambda_{n/2}$  avec grande probabilité.



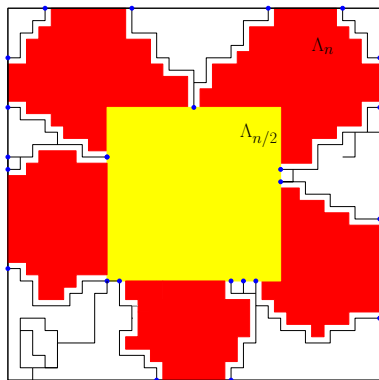
$T < T_c \Rightarrow$  tension de surface  $\tau > 0$

Coût d'une interface atteignant  $\Lambda_{n/2} \simeq e^{-\tau(i-j)}$   
 $\Rightarrow$  Coût de  $r$  interfaces traversantes  $\leq e^{-Crn}$

Coût pour mettre les spins sur  $\partial\Lambda_{n-1}$  de la même couleur  $\geq e^{-C'8n}$ .

# Étape 1: Domaines fleur macroscopiques

Uniformément en  $\omega$ , un nombre fini d'interfaces atteignent  $\Lambda_{n/2}$  avec grande probabilité.



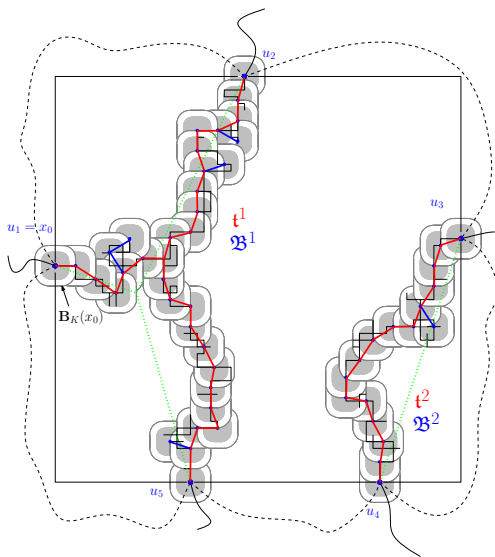
$T < T_c \Rightarrow$  tension de surface  $\tau > 0$

Coût d'une interface atteignant  $\Lambda_{n/2} \simeq e^{-\tau(i-j)}$   
 $\Rightarrow$  Coût de  $r$  interfaces traversantes  $\leq e^{-Crn}$

Coût pour mettre les spins sur  $\partial\Lambda_{n-1}$  de la même couleur  $\geq e^{-C'8n}$ .



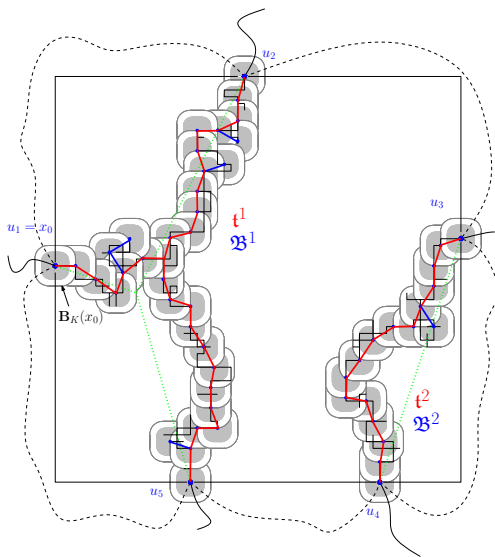
## Étape 2: Forêts de Steiner



Norme  $\tau$  uniformément convexe

$$\tau(x + y) - \tau(x) - \tau(y) \geq \kappa(|x + y| - |x| - |y|)$$

# Étape 2: Forêts de Steiner

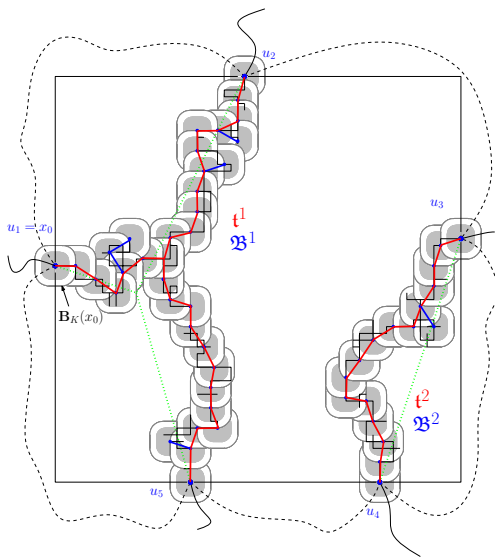


Norme  $\tau$  uniformément convexe

$$\tau(x + y) - \tau(x) - \tau(y) \geq \kappa(|x + y| - |x| - |y|)$$

Les graphes dans  $\mathbb{R}^2$  minimisant la  $\tau$ -longueur des interfaces sous la contrainte d'être c.b. sont des forêts.

## Étape 2: Forêts de Steiner



Norme  $\tau$  uniformément convexe

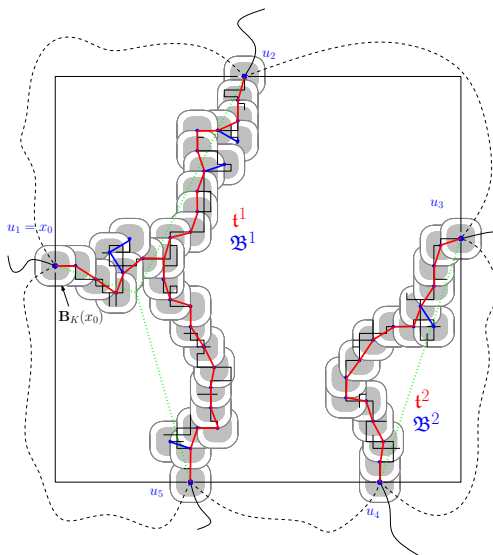
$$\tau(x + y) - \tau(x) - \tau(y) \geq \kappa(|x + y| - |x| - |y|)$$

Les graphes dans  $\mathbb{R}^2$  minimisant la  $\tau$ -longueur des interfaces sous la contrainte d'être à la c.b. sont des forêts.

Les noeuds des arbres sont de degré 3.



## Étape 2: Forêts de Steiner



Norme  $\tau$  uniformément convexe

$$\tau(x + y) - \tau(x) - \tau(y) \geq \kappa(|x + y| - |x| - |y|)$$

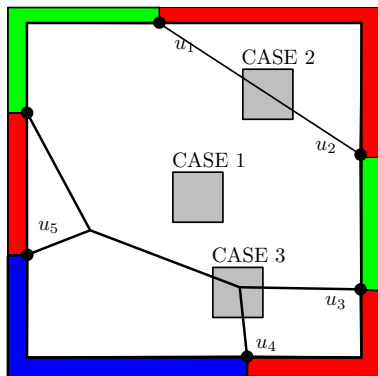
Les graphes dans  $\mathbb{R}^2$  minimisant la  $\tau$ -longueur des interfaces sous la contrainte d'être à la c.b. sont des forêts.

Les noeuds des arbres sont de degré 3.

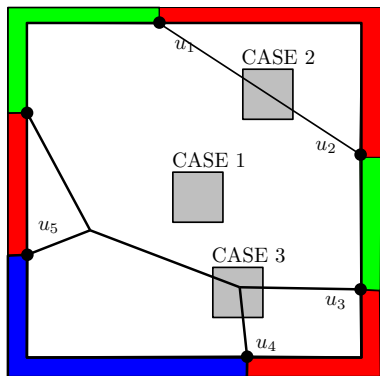
**Grandes déviations:**  
Les interfaces dans  $\Lambda_{n/2}$  restent dans un  $\delta n$  voisinage des forêts avec probabilité  $1 - e^{-cn}$ .



# Les 3 cas à analyser



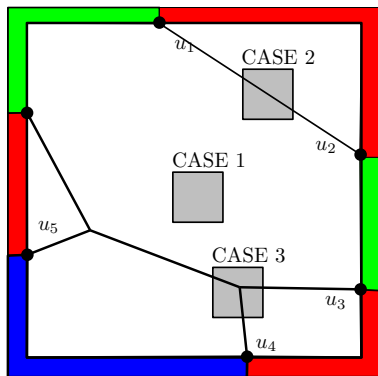
# Les 3 cas à analyser



- Cas 1: relaxation exponentielle dans les phases pures.

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{\delta n}) \leq e^{-Cn}$$

# Les 3 cas à analyser



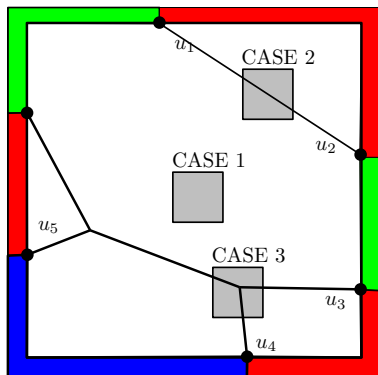
- Cas 1: relaxation exponentielle dans les phases pures.

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{\delta n}) \leq e^{-Cn}$$

- Cas 2: scaling Brownien des interfaces entre 2 phases.

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{n^\varepsilon}) \leq O(n^{-1/2+\varepsilon})$$

# Les 3 cas à analyser



- Cas 1: relaxation exponentielle dans les phases pures.

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{\delta n}) \leq e^{-Cn}$$

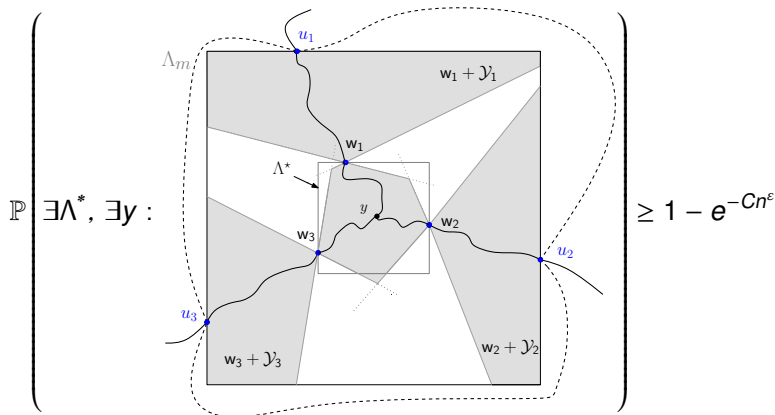
- Cas 2: scaling Brownien des interfaces entre 2 phases.

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{n^\varepsilon}) \leq O(n^{-1/2+\varepsilon})$$

- Cas 3: il reste à analyser les fluctuations des points triples.

# Étape 3: Fluctuations

Coarse-graining à l'échelle  $n^\varepsilon \Rightarrow$



Pour un  $y$  fixé, un développement de Taylor de la contribution exponentielle donne:

$$\mathbb{P} \left( \text{Diagram} \right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \exp\left(-C \frac{|x-y|^2}{n}\right)$$

The diagram shows a square lattice region. A central point  $y$  is marked. A path of vertices  $w_1, w_2, w_3$  is shown, starting from  $w_1$  and ending at  $w_3$ . The path is surrounded by shaded regions labeled  $w_1 + \mathcal{J}_1$ ,  $w_2 + \mathcal{J}_2$ , and  $w_3 + \mathcal{J}_3$ . The path starts at  $u_1$  and ends at  $u_3$ . A dashed line represents the boundary  $\Lambda_m$  and a solid line represents the boundary  $\Lambda^*$ .

Une estimée Brownienne permet de conclure:

$$\mathbb{P}(\text{l'interface atteint } \Lambda_{n^\varepsilon}) \leq O(n^{-1/2+\varepsilon})$$





Merci !