RAPPORT D'ACTIVITÉ

Gérard BESSON

2005

J'ai commencé ma carrière sous la direction de M. Berger qui m'a posé des questions concernant le spectre du Laplacien des variétés riemanniennes. Par la suite cela m'a conduit naturellement à aborder d'autres aspects de la géométrie riemannienne : inégalités isopérimétriques, géométrie ergodique, etc. Depuis je reviens régulièrement sur ces sujets afin de bénéficier des idées et techniques apprises par ailleurs.

Voici un descriptif rapide des quelques idées et résultats que j'ai pu obtenir dans ces thèmes. Les numéros entre crochets renvoient aux articles figurant dans ma liste de publications.

1 Multiplicité des valeurs propres du Laplacien ([8], [14], [16] et [21])

En 1976, S. Y. Cheng prouvait un très joli théorème : pour toute surface riemannienne compacte et connexe, la multiplicité de la k-ième valeur propre du Laplacien est bornée par une fonction du genre et de k. Le cas de la première valeur propre non nulle est le plus intéressant, la borne obtenue par Cheng était quadratique en le genre γ (et l'ordre k de la valeur propre). La preuve repose sur une étude de la ligne nodale d'une première fonction propre (ensemble où elle s'annule) et l'utilisation du théorème de R. Courant qui affirme que le complémentaire de la ligne nodale d'une première fonction propre (une fonction propre correspondant à la première valeur propre non nulle du Laplacien) n'a que deux composantes connexes. Un lemme topologique élémentaire montre que la ligne nodale ne peut pas être trop compliquée sinon elle découpe la surface en trop de composantes connexes. On conclut par une étude locale montrant que si la multiplicité est grande on peut forcer une fonction propre à s'annuler à un ordre élevé en un point quelconque, sa ligne nodale sera alors constituée d'un grand nombre de courbes se croisant en ce point.

Toutefois, malgré l'esthétique de la méthode, S. Y. Cheng n'obtenait un résultat optimal que dans le cas de la sphère S^2 où sa borne prouve que, pour toute métrique g sur cette variété, la multiplicité $m_1(g)$ de la première valeur propre non nulle est plus petite que 3 ; cette valeur est atteinte pour la métrique canonique.

Dans [8] j'ai amélioré ces résultats de deux manières. En affinant l'étude locale, j'ai obtenu une borne pour la multiplicité de la k-ième valeur propre qui est linéaire en γ et k qui donne dans le cas de la 1ère valeur propre

$$(*)\qquad m_1(g) \leq 4\gamma + 3$$

pour toute métrique g sur une surface compacte orientable de genre γ. On retrouve la borne de S. Y. Cheng dans le cas de la sphère, mais elle n'est toujours pas, à ce stade, optimale dans le genre 1 (tore) ; en effet, le tore plat à réseau équilatéral, candidat à la valeur maximale de m_1, a une première valeur propre de multiplicité 6. C'est pourquoi j'ai amélioré le lemme topologique, lorsque la surface est un tore, pour montrer que la première valeur propre non nulle ne pouvait avoir une multiplicité qui excède 6, valeur optimale.

Le cas des surfaces non orientables peut se traiter aussi et j'ai obtenu la borne optimale lorsque la surface est le projectif réel ($m_1(g) \leq 5$). Plus tard, Y. Colin de Verdière a obtenu le résultat optimal pour la bouteille de Klein; d'autres cas ont été étudiés par B. Sevennec.

Dans chacune des situations où la borne supérieure est effectivement atteinte (sphère, tore et projectif réel) j'ai montré qu'il existe une infinité de métriques réalisant le maximum de $m_1(g)$. À cette fin il suffit dans chaque cas de trouver un sous-groupe du groupe d'isométrie qui agit irréductiblement dans le premier espace propre et de perturber la métrique en préservant l'action de ce sous-groupe. On peut chaque fois trouver un groupe fini qui convient.

Le cas des autres surfaces est beaucoup plus difficile à traiter ; en effet, pour le genre supérieur ou égal à 2, on ne connaît pas la multiplicité maximale de la première valeur propre pour les métriques de courbure constante (égale à -1), lesquelles sont les candidates naturelles à réaliser le maximum de $m_1(g)$.

En conclusion, à ce jour l'inégalité $(*)$ pour les surfaces de genre supérieur ou égal à 2 n'a pas été substantiellement améliorée.

À partir de 1985, Y. Colin de Verdière a repris l'étude du sujet et a montré que pour les variétés de dimension supérieure ou égale à trois un tel phénomène ne se produit pas. En choisissant des métriques qui font "ressembler" la variété à un graphe ayant un grand nombre de sommets, il montre que l'on peut trouver une métrique riemannienne dont n'importe quelle partie finie du spectre est donnée *a priori*. En particulier, la multiplicité de la première valeur propre peut être arbitrairement grande. De plus, il dégage une notion de "multiplicité stable", inspirée de certains travaux de V. I. Arnold. Précisément, si une métrique g_0 admet une valeur propre multiple λ de multiplicité N (λ n'est pas nécessairement la première valeur propre), on dit que la multiplicité est stable si dans l'espace des métriques riemanniennes (muni d'une topologie C^k avec k assez grand) l'ensemble Σ_N des métriques proches de g_0 pour lesquelles la valeur propre de même ordre a la même multiplicité est une sous-variété de Banach (qui est alors de codimension $\frac{N(N+1)}{2}$, dimension de l'espace des formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension N).

Dans [14] je montre que, sur une variété X de dimension n, si λ est une valeur propre stable de multiplicité N on peut perturber la métrique dans Σ_N afin d'obtenir une immersion dans $\mathbb{R}^N$, si $N \geq 2n$, dont les composantes sont des fonctions propres de l'espace propre multiple, et un plongement si $N \geq 2n+1$. Ensuite je prouve qu'un certain nombre de valeurs propres multiples connues ou bien construites par les procédés utilisés par Y. Colin de Verdière sont stables. On aboutit ainsi au résultat que, sur toute variété X, compacte connexe de dimension n, il existe une métrique riemannienne (et en fait beaucoup) telle que X se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ "par un premier espace propre".

Le sens de ce résultat est le suivant : dans un travail déjà ancien K. Uhlenbeck montre que les fonctions propres du Laplacien sont génériquement de Morse, il restait alors à franchir l'étape suivante et à prouver l'analogue des théorèmes d'immersion et de plongement de Whitney. C'est ce qui est fait dans [16].

L'article [14] contient une synthèse de ces résultats ainsi que des questions ouvertes.

Récemment je suis revenu sur cette question de la multiplicité des valeurs propres dans un cadre légèrement différent. Il y a très peu de résultats connus sur les valeurs propres des Laplaciens sur les sections des fibrés hermitiens construits à l'aide des connexions métriques (Laplacien "brut"). En collaboration avec B. Colbois et G. Courtois nous avons obtenu dans [24] quelques estimations de la première valeur propre et le fait que, même pour un fibré en droites complexes trivial (topologiquement) sur S^2, il existe des connexions telles que les Laplaciens qu'elles définissent aient une première valeur propre de multiplicité arbitrairement grande. La situation est donc analogue au cas des variétés de dimension supérieure ou égale à 3.

2 Calculs de valeurs propres et comportements asymptotiques ([2], [1] et [10])

Il existe peu d'exemples de variétés riemanniennes pour lesquelles le spectre du Laplacien soit complètement connu (valeurs propres et fonctions propres). Dans [2], en collaboration avec P. Bérard, nous calculons le spectre de certains domaines sphériques (munis de la métrique canonique) obtenus en intersectant la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec une chambre de Weyl d'un système de racines. Nous le calculons pour les conditions de Dirichlet et de Neumann. La méthode est purement algébrique, en effet, ces domaines pavent la sphère par réflexion. Leurs spectres (Dirichlet et Neumann) sont donc inclus dans le spectre de la sphère canonique et leurs fonctions propres sont des restrictions de fonctions propres de celle-ci. La théorie des invariants permet alors de choisir valeurs et fonctions propres parmi celles de la sphère. Ce travail est parallèle à celui fait par P. Bérard dans un article où il s'intéresse à des domaines euclidiens construits de manière analogue. Ces calculs explicites ont été utilisés par la suite par H. Urakawa pour exhiber les premiers exemples de domaines euclidiens dans $\mathbb{R}^4$ isospectraux pour les Laplaciens de Dirichlet et Neumann et non isométriques, il suffit en effet "d'épaissir", dans $\mathbb{R}^4$, certains des domaines sphériques ci-dessus (sur S^3) judicieusement choisis.

Outre les calculs explicites (peu fréquents) une grosse activité s'est développée vers 1981 autour des perturbations singulières; l'idée, qui remonte à J. Hadamard, est de voir quel type de perturbations de la métrique engendre une variation continue des valeurs propres. J'y ai contribué dans [10] en étudiant le cas où l'on excise un nombre fini de boules de rayon petit, imposant alors les conditions de Dirichlet sur leur bord. Dans cette situation il est connu que le spectre du complémentaire converge vers le spectre de la variété totale lorsque le rayon des boules tend vers zéro (valeur propre par valeur propre). Dans [10] j'ai montré qu'en dimension 2 on peut obtenir un développement asymptotique des valeurs propres perturbées en fonction du logarithme du rayon des boules et qu'en dimension 3 et 4 on obtient une bonne estimation de la différence entre les valeurs propres et leurs limites, améliorant des résultats précédents de S. Ozawa. Le cas des voisinages tubulaires de sous-variétés fermées de codimension 2, 3 et 4 est aussi envisagé avec des résultats analogues.

Enfin [1] est une remarque prouvant l'optimalité d'une inégalité de Marcel Berger.

3 Inégalités isopérimétriques et symétrisation ([9], [4], [11], [13], [12], [3], [20] et [5])

Il s'agit là d'un sujet très riche sur lequel j'ai commencé à travailler à partir de 1984 et qui est loin d'être épuisé. Les théorèmes les plus profonds sont ceux de [4] et [5] et ont été obtenus en collaboration avec P. Bérard et S. Gallot.

L'élément clef de l'édifice est l'inégalité isopérimétrique démontrée dans [4]. Dans un travail antérieur M. Gromov prouvait une inégalité isopérimétrique concernant les variétés compactes de dimension n de courbure de Ricci strictement positive, étendant à ce cadre un très ancien résultat dû à Paul Lévy (valable pour les surfaces convexes de $\mathbb{R}^3$). Plus précisément, si Ω est un domaine (à bord lisse) d'une telle variété (de courbure de Ricci strictement positive), notée X, dont le volume représente une proportion β ($0 \leq \beta \leq 1$) du volume total, M. Gromov prouve l'inégalité :

$$\text{(Isop)} \qquad \frac{\mathrm{vol}(\partial\Omega)}{\mathrm{vol}(X)} \geq \frac{\mathrm{vol}(\partial\Omega^\star)}{\mathrm{vol}(S)}$$

où $\Omega^\star$ est une boule sur une sphère S dont le volume représente une proportion β du volume total. Le rayon de la sphère est tel que sa courbure de Ricci (qui est constante) est égale au minimum de celle de la variété de départ. La méthode de preuve repose sur un théorème de comparaison dû à E. Heintze et H. Karcher.

Dans [4], en utilisant le même théorème de comparaison, nous améliorons et étendons le résultat précédent ainsi que des résultats antérieurs de S. Gallot et Ch. Croke. Nous faisons intervenir un autre invariant riemannien : le diamètre.

L'amélioration est très frappante. Le résultat de M. Gromov permet de comparer une variété de dimension n (compacte connexe) dont la courbure de Ricci est minorée par $n-1$ (valeur pour la sphère canonique) à une sphère euclidienne de rayon 1 ; dans [4] nous pouvons la comparer avec une sphère de rayon strictement plus petit que 1 (si la variété de départ n'est pas la sphère canonique) se calculant explicitement en fonction du diamètre de la variété d'origine et ainsi améliorer l'inégalité de M. Gromov d'un facteur strictement supérieur à 1. L'introduction du diamètre permet alors, au prix de quelques difficultés techniques, d'étendre cette inégalité à une variété compacte quelconque. On peut donc, sur toute variété compacte, écrire une inégalité isopérimétrique (Isop) où $\Omega^\star$ est une boule géodésique dans une sphère dont le rayon se calcule explicitement en fonction d'un minorant de la courbure de Ricci et du diamètre de celle-ci, même si la courbure prend des valeurs négatives.

Cette inégalité isopérimétrique a été utilisée de manière essentielle par M. Dyer, A. Frieze et R. Kannan pour un travail d'analyse numérique (calculs numériques de volumes d'ensembles convexes).

Nous nous sommes intéressés par la suite aux applications à l'analyse de telles inégalités. L'application la plus connue est celle qui conduit à des minorations de la première valeur propre non nulle du Laplacien, notée λ_1 : la symétrisation de Schwarz. À une fonction sur la variété d'origine on associe une fonction invariante par rotation autour de l'axe Nord-Sud sur la sphère de comparaison ; cette opération préserve toutes les normes L^p et diminue la norme L^2 du gradient des fonctions considérées. Alors, grâce à la description de λ_1 utilisant le min-max, on peut prouver l'inégalité

$$\text{(Ana)} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_1^\star$$

où $\lambda_1^\star$ est la première valeur propre non nulle de la sphère de comparaison qui est connue explicitement. Cette dernière inégalité est à interpréter comme une traduction analytique directe de (Isop). Sous les hypothèses du théorème précité de M. Gromov nous améliorons ainsi un résultat de A. Lichnerowicz et M. Obata donnant par la même occasion une preuve plus géométrique de ce type de résultats et simplifiant l'étude du cas d'égalité. A titre d'exemple, notre résultat donne pour une surface de courbure de Ricci supérieure ou égale à 1 et de diamètre d

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{(\sin(d/2))^2}$$

au lieu de $\lambda_1 \geq 2$, d'après le théorème de Lichnerowicz-Obata (rappelons que l'hypothèse de courbure implique que $d \leq \pi$).

Ces résultats ont été beaucoup améliorés, en 2003, par mon élève V. Bayle.

Nous menons la traduction analytique de (Isop) à son terme et obtenons des majorations du noyau de la chaleur et de la trace de ce même opérateur en fonction des quantités analogues sur la sphère de comparaison qui toutes sont connues explicitement. Ces dernières inégalités sont donc optimales ; elles jouent un rôle fondamental dans [5]. Rappelons que la trace de l'opérateur de la chaleur est l'expression bien connue

$$Z(t) = \sum_{i\geq 0} e^{-\lambda_i t}\ ,\ t > 0$$

où $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots$ sont les valeurs propres du Laplacien de la variété riemannienne.

À l'époque de ce travail cette démarche quasi automatique qui permet de passer de (Isop) à (Ana) via la symétrisation a beaucoup piqué ma curiosité, j'ai donc essayé d'en approfondir la compréhension. Dans [11] et [13] j'ai montré que la symétrisation de Schwarz est à rapprocher d'une opération analogue sur les fonctions : le passage d'une fonction à sa valeur absolue. En effet dans ce cas également les normes L^p sont bien évidemment préservées et la norme L^2 du gradient est diminuée (en fait préservée dans ce cas), bien sûr lorsque ces quantités ont un sens. Bien qu'il s'agisse d'une opération triviale elle a tout de même pour conséquence la positivité du noyau de la chaleur par le critère dit de Beurling–Deny. L'opération "valeur absolue" vérifie l'inégalité de T. Kato, c'est-à-dire :

$$\Delta |u| \leq \operatorname{sign}(u) \Delta u$$

au sens des distributions si $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$.

Moins triviale est l'opération qui à une section s d'un fibré hermitien sur une variété riemannienne associe sa norme ponctuelle $|s|$, fonction sur la base du fibré. Si ce dernier est muni d'une connexion métrique, le Laplacien brut qu'elle permet de définir vérifie également une inégalité de type Kato. Dans [11] et [13] j'englobe ces deux opérations (symétrisation et norme ponctuelle de section) dans un même ensemble en définissant une notion abstraite de symétrisation qui les contient. Je montre qu'il existe également dans ce contexte un critère *à la* Beurling–Deny qui conduit à des majorations du noyau de l'opérateur de la chaleur (avec des variantes suivant les cas). L'inégalité isopérimétrique se traduit dans les espaces considérés par une situation où ce critère est satisfait; il est un véritable analogue dans la géométrie des espaces de Hilbert de (Isop). On regroupe ainsi en une seule théorie les inégalités se déduisant de (Isop) et celles qui proviennent des inégalités de Kato sur les Laplaciens bruts. C'est un travail de synthèse.

Il est alors naturel de s'intéresser aux inégalités de Kato. Dans [11] et [20], j'étudie le cas des submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques, où une variété riemannienne M fibre sur une base B, les fibres étant totalement géodésiques et donc toutes isométriques à une fibre type F. De telles situations sont associées à une fibration principale de groupe structural le groupe d'isométrie de F. Dans [11] je montre en utilisant la fibration principale une majoration du noyau de la chaleur de M par le produit de celui de B et de celui de F (en des points à préciser) qui se traduit sur les traces des opérateurs de la chaleur respectifs par l'inégalité suivante, déjà prouvée par P. Bérard et S. Gallot :

$$Z_M(t) \leq Z_B(t) \cdot Z_F(t) \qquad \text{pour tout } t > 0$$

avec égalité si et seulement si la fibration est triviale.

C'est l'esprit des inégalités de Kato, plus la fibration est "tordue" et plus la chaleur a du mal à se propager.

On peut être plus précis quant au spectre de M, en effet, L. Bérard Bergery et J. P. Bourguignon ont montré (entre autres choses) que toute valeur propre de M est somme d'une valeur propre de F et d'une valeur propre d'un opérateur sur M appelé le Laplacien horizontal qui est très lié à la complexité de la fibration. Dans [20] nous montrons quelles sommes interviennent. Le choix des valeurs propres de F et du Laplacien horizontal qu'il faut additionner pour obtenir une valeur propre de M est déterminé par l'action du groupe structural dans la fibre type et surtout les représentations de ce groupe dans l'espace $L^2(F)$.

Il y a bien des situations géométriques où des opérateurs donnent des renseignements topologiques; les nombres de Betti d'une variété compacte, par exemple, sont les dimensions des noyaux des Laplaciens (de Hodge-de Rham) agissant sur les formes différentielles du degré correspondant. Ces opérateurs sont la somme du Laplacien brut (construit avec la connexion de Levi-Civita agissant sur les formes différentielles) et d'un opérateur d'ordre 0 (potentiel) calculé en terme de la courbure de la variété. L'inégalité de Kato appliquée aux fibrés vectoriels considérés permet de les dominer par des opérateurs de Schrödinger agissant sur les fonctions (Laplacien de la base + potentiel scalaire). Il suffit alors de savoir estimer le nombre de valeurs propres négatives ou nulles de ceux-ci pour majorer les nombres de Betti (par exemple). C'est l'objet de [3] où nous adaptons une approche mise au point par M. Birman et J. Schwinger puis E. Lieb dans le cas de $\mathbb{R}^n$ pour estimer le nombre d'états liés (nombre de valeurs propres négatives ou nulles) d'un opérateur de Schrödinger en fonction de la norme $L^{n/2}$ (n est la dimension de la variété) de la partie négative du potentiel sous des hypothèses impliquant la courbure de Ricci (il est nécessaire par exemple qu'elle prenne des valeurs positives). Elle repose sur une majoration du noyau de la chaleur que nous obtenons grâce à (Isop). Nous appliquons cette technique, tout à fait nouvelle dans le cadre considéré, à d'autres situations géométriques (indice de sous-variétés minimales, etc.).

L'esprit des théorèmes précédents est d'obtenir des estimations **u**niformes de λ_1, du noyau de la chaleur, des nombres de Betti, etc. pour la classe des variétés riemanniennes de dimension n, dont la courbure de Ricci est minorée par un nombre k donné et le diamètre majoré par un nombre D donné. Notons $\mathcal{M}_{n,k,D}$ cet ensemble, il est remarquable qu'il s'agisse également de l'ensemble des variétés riemanniennes précompact pour la topologie introduite par M. Gromov, dérivée de la topologie de Hausdorff. Nous décrivons dans [5] un procédé original permettant de comprendre ce phénomène. Si $p(t; x, y)$ désigne le noyau de l'opérateur de la chaleur d'une variété riemannienne compacte X (x et y sont des points de X et t un réel positif) on considère l'application

$$P \ : x \longrightarrow p(t; x, \cdot)$$

pour t fixé, qui associe à un point de x une fonction de $L^2(X)$. On vérifie qu'il s'agit d'un plongement. Ceci est l'idée de base de [5] ; quitte à modifier cette application on peut plonger toutes les variétés riemanniennes compactes dans le même espace de Hilbert l^2, des suites complexes de carré intégrable, qui est isométrique à $L^2(X)$. La distance de Hausdorff définie sur l'ensemble des sous-ensembles compacts de l^2 induit une distance sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes (il faut toutefois prendre des précautions, voir [5]). Nous recherchons ensuite la précompacité, or le théorème de Rellich affirme que l'espace $H^1(X)$ (fonctions L^2 à gradient L^2) s'injecte compactement dans $L^2(X)$, c'est-à-dire que toute partie bornée de H^1 est compacte dans L^2. Il suffit alors de trouver une classe de variétés dont les images par P sont dans une partie bornée de $h^1 \subset l^2$ pour obtenir un théorème de précompacité : le miracle est que les inégalités sur le noyau de la chaleur qui se déduisent de (Isop) sont exactement celles qu'il faut pour cela. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,k,D}$ est donc précompact pour la distance de Hausdorff dans L^2 induite par les plongements P. Il ne s'agit là que du schéma de la démarche décrite dans [5] car il nous faut lever quelques difficultés techniques. Nous y définissons donc des distances entre variétés que nous appelons distances spectrales et prouvons le théorème de précompacité. Nous comparons ensuite cette distance à celle utilisée par M. Gromov.

Ce travail a été repris et poursuivi par A. Kasue et H. Kumura. C'est donc une synthèse des résultats décrits précédemment dans ce paragraphe qui dégage une philosophie générale. De plus il est important de noter que l'on voit souvent des applications de la géométrie (inégalités isopérimétriques) à l'analyse spectrale, mais plus rares sont les résultats qui font le chemin inverse. C'est la force du théorème de précompacité spectrale présenté dans [5].

L'article [19] est un survol des résultats de cette section actualisés avec, en particulier, les références aux travaux de mon ancien élève V. Bayle et de l'ancien élève de S. Gallot, E. Aubry. Il contient également un résultat nouveau et des questions ouvertes.

4 Volumes, entropies et énergies ([15], [22], [23], [17] [24], [25], [26], [18] et [30])

C'est la composante la plus géométrique de mon travail et celle qui a produit les résultats les plus profonds. Il s'agit d'une collaboration entre G. Courtois, S. Gallot et moi-même. Pour moi, le thème central de ce travail est l'étude du **v**olume (des variétés riemanniennes). En effet, lorsque l'on cherche à repérer sur une variété différentielle donnée la "plus belle" métrique riemannienne, on peut la chercher comme point critique ou mieux comme extremum d'une fonctionnelle riemannienne ; traditionnellement ce sont des expressions construites à l'aide de l'opérateur de courbure (voir les travaux de M. Anderson et D. Yang). Nous travaillons avec la fonctionnelle la plus simple et la plus directe : le volume de la variété riemannienne.

Les questions qui nous ont entraînés dans cette voie sont nées de notre participation au séminaire sur la cohomologie bornée qui a eu lieu à l'E.N.S. de Lyon en 1987-1988. Nous avons commencé par réfléchir au second groupe de cohomologie bornée d'une variété ou d'un groupe (le premier à avoir un intérêt) et surtout au noyau de l'application naturelle dans le second groupe de cohomologie standard. Dans le cas de la cohomologie d'un groupe Γ ce noyau est constitué des cobords de quasi-morphismes, c'est-à-dire de fonctions $f\ : \Gamma \to \mathbb{R}$, non bornées, vérifiant

$$|f(\gamma_1\gamma_2) - f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| \leq C \qquad \text{pour tout } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$$

où C est une constante réelle. Dans [15] je montre que dans chaque classe définie par un quasi-morphisme il existe un représentant privilégié, sorte de représentant "harmonique" qui caractérise la classe et possède certaines propriétés que nous décrivons. Je donne également une formule asymptotique pour le calcul de son bord. Ce résultat est utilisé dans un travail de J. Barge et E. Ghys. Par ailleurs nous avons étendu à la dimension quelconque un autre résultat de J. Barge et E. Ghys montrant que l'ensemble des 2-formes différentielles s'injecte dans le second groupe de cohomologie bornée d'une surface de genre au moins 2. Ce travail a été poursuivi par mon élève J. C. Picaud, qui a soutenu en Octobre 1995 une thèse portant sur ce sujet.

Cette théorie, la cohomologie bornée, est très liée au comportement du volume des variétés riemanniennes comme le montre M. Gromov dans son article "Volume and Bounded Cohomology". Nous nous sommes alors intéressés au problème qui suit.

Soit X une variété compacte munie d'une métrique **h**yperbolique réelle g_0 et g une métrique riemannienne de courbure de Ricci supérieure ou égale à $-(n-1)$, alors M. Gromov a conjecturé que

$$\mathrm{vol}(X, g) \geq \mathrm{vol}(X, g_0).$$

C'est-à-dire que la "belle métrique" g_0 peut être repérée parmi celle dont la courbure de Ricci est minorée par $-(n-1)$ par son volume uniquement.

Nous avons prouvé ce résultat entre autres dans [24] et [25]. Afin de comprendre mieux la démarche scientifique il est bon de faire l'historique de nos résultats ([22], [23], [24], [25], [26] et [27]).

Dans la première partie de [22] nous prouvions une version locale de cette conjecture, dans un cadre plus large qui s'énonce comme suit : si g_0 est une métrique d'**E**instein de courbure **s**ectionnelle strictement négative (ce qui inclut bien sûr le cas hyperbolique) alors dans l'espace des métriques, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de la **c**lasse conforme de g_0 (pour la topologie C^2) tel que :

$$g \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \text{courbure scalaire}(g) \geq \text{courbure scalaire}(g_0)$$

implique

$$\mathrm{vol}(X,g) \geq \mathrm{vol}(X,g_0).$$

Ce résultat apparaît dans [22] comme un corollaire d'un autre théorème : si on note $scal_-(g)$ la partie négative de la courbure scalaire de g (c'est-à-dire $scal_-(g) = \sup\{0, -scal(g)\}$) alors la fonctionnelle $K(g) = \int_X (scal_-(g))^{n/2} dv_g$ vérifie

$$K(g) \geq K(g_0) \qquad \text{pour } g \in \mathcal{U}$$

(je rappelle que dv_g est la forme volume associée à la métrique g). On caractérise alors g_0 par un seul nombre : la valeur de K.

Ces théorèmes bien que locaux, c'est-à-dire ne répondant pas encore à la question générale de M. Gromov, ont l'avantage de n'utiliser que la courbure scalaire, invariant bien plus faible que la courbure de Ricci, et d'étendre les résultats à toute une classe d'espaces : hyperboliques complexe, quaternionien, etc.

Une modification de la preuve donne certains "cas limites" où la courbure sectionnelle peut être nulle, en particulier les quotients compacts de $SO_n(\mathbb{R})\backslash SL_n(\mathbb{R})$. Le résultat s'étend donc à certaines variétés d'Einstein de courbure sectionnelle négative ou nulle et de courbure scalaire strictement négative.

Les techniques que nous utilisons s'inspirent de notre expérience de l'analyse sur les variétés, en particulier pour atteindre le résultat complet nous avons introduit dans la seconde partie de [22] de nouveaux invariants que nous avons appelés l'*énergie sphérique* et le *volume sphérique* de la variété différentielle X. On les obtient, après avoir choisi une mesure μ sur $\partial\tilde{X}$, en plongeant de manière équivariante le revêtement universel de X, soit $\tilde{X}$, dans la sphère unité de l'espace de Hilbert $L^2(\partial\tilde{X},\mu)$, où $\partial\tilde{X}$ désigne le bord géométrique de $\tilde{X}$. Le volume sphérique est le minimum (parmi tous les plongements) du volume de l'image d'un domaine fondamental par un tel plongement. Pour définir l'énergie sphérique et toute une série d'autres invariants nous choisissons une métrique quelconque g sur X et, si Φ est un plongement équivariant de $\tilde{X}$ dans la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X},\mu)$, l'image réciproque de la métrique canonique de L^2, c'est-à-dire $\Phi^\star(\mathrm{can})$, définit une métrique sur X ; alors on pose,

$$T_p(g) = \inf\Big\{\Big(\int_X (\mathrm{trace}_g(\Phi^\star(\mathrm{can})))^{p/2} dv_g\Big)^{2/p} / \Phi\Big\}.$$

L'énergie sphérique d'une métrique g est $T_2(g)$, elle est la plus petite énergie possible, calculée sur un domaine fondamental, d'une application équivariante de $(\tilde{X},\tilde{\mu})$ dans la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X},\mu)$. Un autre invariant important est $T_n(g)$ car il est insensible au changement conforme de la métrique g. On notera la permanence des idées utilisées en comparant aux méthodes développées dans [5].

Dans la seconde partie de [22] nous majorons le volume sphérique en fonction de l'entropie volumique h_{vol} de $\tilde{X}$ (taux de croissance du volume des boules) et du volume de X, munie d'une métrique quelconque, et surtout nous le minorons par le volume simplicial de X (à une constante près). Cette minoration conduit à des exemples où ce volume sphérique est non nul, en particulier pour les variétés compactes qui admettent une métrique de courbure strictement négative (car alors leur volume simplicial est non nul). Ces minorations de l'entropie volumique en fonction du volume sphérique sont meilleures que celles que M. Gromov obtient avec le volume simplicial ; en dimension 2 par exemple elles sont optimales.

De plus, de la simple définition du volume sphérique et de quelques manipulations astucieuses, nous obtenons une amélioration d'un résultat de A. Katok : dans une classe conforme, pour des métriques de volume fixé, c'est la métrique localement symétrique de courbure négative ou nulle (si elle existe) qui réalise le minimum de l'entropie volumique h_{vol}. Si nous désignons par h_{top} l'entropie topologique du flot géodésique d'une métrique riemannienne, nous avons alors les inégalités :

$$h_{\text{vol}}(g_0) = h_{\text{top}}(g_0) \leq h_{\text{vol}}(g) \leq h_{\text{top}}(g)$$

si $\text{vol}(X, g) = \text{vol}(X, g_0)$ (condition de normalisation nécessaire) et g conforme à g_0 (la métrique localement symétrique).

En fait A. Katok et M. Gromov avaient conjecturé que parmi toutes les métriques de volume fixé, g_0 est celle qui réalise le minimum de l'entropie volumique (et donc topologique). Ce problème d'entropie se révèle être central dans ce cadre. Nous avons obtenu les résultats globaux sur l'entropie minimale de la variété X admettant une métrique localement symétrique de rang 1, notée g_0. Précisément, l'énoncé du théorème principal est :

Théorème 1 (entropie minimale) *Soient (Y, g) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes de dimension ≥ 3. On suppose que g_0 est localement symétrique de rang un et qu'il existe une application continue*

$$f \; : Y \longrightarrow X$$

de degré non nul. Alors

$$(h_{\text{vol}}(g))^n \,\text{vol}(Y, g) \geq |deg(f)|(h_{\text{vol}}(g_0))^n \,\text{vol}(X, g_0)$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si f est homotope à un revêtement riemannien de même degré que f (en particulier g et g_0 sont localement isométriques).

Nous prouvons ainsi simultanément trois conjectures de A. Katok ou de M. Gromov. Les résultats sont publiés dans [26]. Outre le théorème de l'entropie minimale énoncé ci-dessus nous obtenons :

Théorème 2 (volume minimal) *Parmi toutes les métriques sur X de courbure de Ricci supérieure ou égale à $-(n-1)$, la métrique hyperbolique réelle a le plus petit volume.*

Signalons que ce résultat n'est prouvé que lorsque la variété de référence est hyperbolique réelle car nous utilisons une inégalité de comparaison (théorème de Bishop) qui n'est optimale que dans ce cadre.

Théorème 3 (rigidité dynamique) *Si (Y, g) est une variété riemannienne (de dimension $n \geq 3$) dont le flot géodésique est C^1-conjugué à celui d'une variété localement symétrique de courbure strictement négative g_0, alors (Y, g) est isométrique à (X, g_0).*

En dimension 2 un tel résultat est connu depuis les travaux de Ch. Croke et J. P. Otal. Pour l'obtenir il suffit de remarquer que la conjugaison implique, d'une part l'existence d'une équivalence d'homotopie entre les variétés, d'autre part que les entropies des flots considérés sont égales. Enfin un argument simple montre que le volume est un invariant de C^1-conjugaison. Dans [23] nous obtenions un résultat local, par des méthodes complètement différentes. Par la suite U. Hamenstädt a montré qu'une conjugaison C^0 suffisait à assurer l'égalité des volumes, ce qui permet d'énoncer le résultat ci-dessus avec l'hypothèse C^0.

Remarquons que, à l'aide de l'application f, nous pouvons comparer des variétés différentes. La technique de preuve du théorème principal est la même que précédemment : en fait nous montrons que les résultats ci-dessus se ramènent à prouver que parmi toutes les métriques du type $\Phi^\star(\text{can})$, celle qui a le plus petit volume sur X est celle donnée par le plongement "par le noyau de Poisson" de g_0. Cela revient à montrer que parmi les plongements équivariants Φ de $\tilde{X}$ dans la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X}, \mu)$ le "plongement de Poisson" est **m**inimisant pour le volume (d'un domaine fondamental). Nous prouvons ce fait par la méthode de calibration. Elle consiste à exhiber une n-forme différentielle fermée sur la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X}, \mu)$ satisfaisant à certaines inégalités et égalités. Nous construisons une telle forme à l'aide de la notion de barycentre d'une mesure sur S^{n-1}. Plus précisément, si f est une fonction de L^2-norme égale à 1 sur $S^{n-1} = \partial\tilde{X}$, alors $f(\theta)^2 d\theta$ est une mesure de probabilité sur S^{n-1} et A. Douady et C. J. Earle définissent une notion de barycentre de mesure qui permet de lui associer un point de B^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$, en sorte que la correspondance ainsi obtenue soit équivariante pour l'action du groupe de Möbius sur les mesures et sur la boule B^n. Nous utilisons cette correspondance pour construire une n-forme fermée sur la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X}, \mu)$ et nous montrons qu'elle calibre le "plongement de Poisson" (voir [25] pour les détails). Le cas d'égalité se traite en utilisant la même construction. Comme je l'ai expliqué précédemment, nous obtenons comme corollaire une preuve de la conjecture du volume minimal lorsque g_0 est de courbure constante négative. De même, pour toutes les métriques g_0 localement symétriques de rang 1, nous prouvons la conjecture de rigidité dynamique. D'autres résultats découlent du théorème principal (voir [25]).

L'idée du plongement par le noyau de Poisson est une variante du plongement par le noyau de la chaleur utilisé dans [5]; en effet, le noyau de la chaleur considéré comme une mesure converge lorsque le temps tend vers l'infini vers la mesure harmonique dont la densité est le noyau de Poisson. il est possible de montrer que tous les invariants ci-dessus diminuent lorsque le temps converge vers l'infini, de sorte qu'il est naturel de chercher les minima à l'aide du noyau de Poisson. C'est le lien logique entre les travaux de la section précédente et ceux décrits dans cette section.

Un corollaire frappant du volume minimal est le suivant : soit X^4 une variété compacte de dimension 4 qui possède une **m**étrique hyperbolique réelle alors celle-ci est **l**a seule métrique d'Einstein sur X. C'est un résultat assez inattendu et très prometteur ; il y a en effet peu d'exemples de variétés pour lesquelles on connaît toutes les métriques d'Einstein qu'elle porte. Le même énoncé où g_0 est hyperbolique complexe a été obtenu en octobre 1994 par Cl. Lebrun avec une méthode complètement différente, utilisant les invariants de Seiberg-Witten.

Le corollaire le plus important de notre méthode (au moins sur le plan psychologique) est une preuve **t**rès simple du théorème de rigidité de G. Mostow (cas compact) pour les métriques localement symétriques de rang 1. Dans cette situation la machinerie précédente s'allège considérablement et donne une preuve unifiée (pour tous les cas) que nous avons isolée dans [26]. Lorsque nous aurons étendu notre méthode au cas des espaces symétriques de rang supérieur, nous aurons une preuve unique de ces théorèmes de rigidité. La principale caractéristique en est de construire explicitement et géométriquement l'application candidate à être une isométrie. Cette construction permet de simplifier le théorème principal lorsque f est une équivalence d'homotopie et (Y, g) est de courbure négative. Elle utilise la mesure de Patterson-Sullivan sur le bord géométrique du revêtement universel de Y.

Dans l'article [30] nous donnons des théorèmes de compacité avec des hypothèses très faibles. Les minorations de la courbure sont remplacées par des majorations de l'entropie volumique et les majorations de courbure par des propriétés requises sur le groupe fondamental. Les résultats reposent sur une version sans courbure, au sens ci-dessus, du célèbre lemme de Margulis. Nous sommes amenés à donner une preuve géométrique du fait suivant : deux éléments du groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte engendrent un sous-groupe dont l'entropie algébrique est minorée en fonction de la dimension et des bornes de la courbure seulement. Le plus important est que le rayon d'injectivité de la variété n'intervient pas dans cette estimée. Les conséquences décrites sont similaires à celles du lemme de Margulis classique : décomposition en parties minces et parties épaisses, description des parties minces, théorèmes de compacité, etc.

Dans [6] nous abordons une question de rigidité différentiable. Il considérer l'invariant suivant, pour une variété différentielle compacte X :

$$\mathrm{Ent}_{\min}(X) = \inf\{h_{\mathrm{vol}}(g)/g \text{ métrique telle que } \mathrm{Ricci}(g) \geq -(n-1)\}\,,$$

qui est l'entropie minimale de la variété X sous condition de courbure de Ricci. Nous montrons que si une variété Y est homotopiquement équivalente à une variété X portant une métrique hyperbolique g_0 et si,

$$\mathrm{Ent}(Y) = \mathrm{Ent}(X) = h_{\mathrm{vol}}(g_0)\,,$$

alors Y est difféomorphe à X. C'est un extension d'un résultat de L. Bessières concernant le cas où la borne de courbure est un pincement de la courbure sectionnelle. L'idée consiste à montrer qu'un suite minimisante de métriques converge et à montrer que la limite est hyperbolique en appliquant les résultats de [25]. Une difficulté est qu'il n'existe pas de théorème de compacité; nous utilisons alors les méthodes développées par J. Cheeger et T. Colding. Une autre difficulté est la faible régularité de la métrique limite qui complique l'application de [25].

5 Groupe fondamental des variétés hyperboliques et représentations ([27], [28] et [29])

La méthode nous a permis d'étudier le cas où Y et X sont deux variétés fermées reliées par une application continue de degré non nul (c'est-à-dire non triviale pour la topologie) et X est de courbure négative ou nulle. Dans chaque classe d'homotopie de telles applications nous construisons un représentant privilégié. La construction consiste à transporter dans $\widetilde{X}$ par $\widetilde{f}$ une famille de mesures portée par une orbite du groupe fondamental de Y dans $\tilde{Y}$; ensuite le barycentre sert à associer à chaque mesure de la famille un point de $\tilde{X}$. Cette correspondance équivariante donne une application lipchitzienne de Y sur X dans la même classe d'homotopie que f. Nous appelons une telle application : l'application naturelle homotope à f. Elle a des propriétés remarquables vis-à-vis du volume; précisément elle contracte les volumes dans un rapport égale au rapport des entropies volumiques de Y et de X (à la bonne puissance). Dans les problèmes liés à des calculs de volume, l'application naturelle est plus performante que l'application harmonique à laquelle elle est homotope (lorsque celle-ci existe). Une autre propriété remarquable de l'application naturelle est qu'elle peut être définie lorsque les espaces n'ont pas la même dimension et donne dans ce cas des résultats intéressants.

Dans [27] nous exploitons ces performances. Tout d'abord nous prouvons une version réelle du lemme de Schwarz-Pick ou plutôt de son extension aux dimensions supérieures à 2. Nous prouvons que si Y est de courbure de Ricci supérieure ou égale à $-(n-1)$ et X est de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et si, par exemple, Y et X sont homotopiquement équivalentes, alors $\mathrm{vol}(X) \leq \mathrm{vol}(Y)$ et l'égalité a lieu si et seulement si les deux variétés sont hyperboliques réelles et isométriques.

La méthode nous donne aussi une preuve très simple d'un théorème de M. Bourdon. Plus précisément, si Γ est un réseau d'un espace symétrique de courbure strictement négative, qui est représenté de manière convexe cocompacte dans le groupe d'isométries d'une variété $\widetilde{X}$ simplement connexe et de courbure inférieure ou égale à -1, alors la dimension de Haussdorff de son ensemble limite sur la sphère à l'infini de $\tilde{X}$ et plus grande que ce qu'elle serait dans le cas où la représentation préserve un sous-espace totalement géodésique. Dans les cas où $\Gamma \in SU(n,1)$ (hyperbolique complexe) est représenté de manière convexe cocompacte dans $SU(m,1)$ avec $m \geq n$, il est conjecturé que la seule possibilité est que la représentation soit totalement géodésique. Nous prouvons dans [27] un théorème d'isolation de la représentation totalement géodésique qui est un résultat partiel dans la direction de cette conjecture.

Ceci nous a conduit à nous intéresser aux représentations des groupes fondamentaux des variétés hyperboliques car il s'agit là d'un bon moyen de comprendre ces groupes. Dans [28] nous prouvons des extensions des inégalité de Milnor-Wood connues en dimension 2. Si Γ est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique réelle compacte de dimension n et si ρ est une représentation de Γ dans $PO(n,1)$ on définit le volume de la représentation. Précisément, considérons une application ρ-équivariante de classe C^1 de l'espace hyperbolique réel (simplement connexe) dans lui-même, l'image réciproque par cette application de la forme volume de l'espace hyperbolique est une forme différentielle Γ-invariante qui, intégrée sur une domaine fondamental de Γ, donne un nombre appelé le volume de la représentation ρ. Nous donnons alors une majoration du volume de ρ en fonction du volume de la variété hyperbolique. Nous montrons également en utilisant la formule de Schläfli que, si ρ_t est une famille à un paramètre de telles représentations, leur volume est constant. Ceci nous conduit à démontrer de manière très simple un théorème de T. Soma qui affirme qu'une variété compacte de dimension 3 ne peut dominer qu'un nombre fini de variétés hyperboliques (par dominer nous entendons posséder une application continue de degré non nul vers la variété hyperbolique).

Dans [29] nous redémontrons et étendons un résultat de Y. Shalom sur les variétés hyperboliques compactes dont le groupe fondamental est un produit amalgamé : le groupe C sur lequel on amalgame doit être "gros" au sens où son exposant de Poincaré doit être supérieur à $n-1$ (si n est la dimension de la variété hyperbolique) et l'égalité ne survient que lorsque C est le groupe fondamental d'une hypersurface totalement géodésique compacte et séparante dans la variété de départ. Nous étendons ce résultat au cas où la variété $\widetilde{X}$ est de courbure sectionnelle négative (majorée par -1, par exemple). L'idée est d'étudier le "cylindre" $\widetilde{X}/C$. On constate que sa $n-1$ homologie est non nulle et on considère un cycle non trivial de celle-ci. On montre que le $n-1$-volume de tout représentant de ce cycle est minoré en utilisant une inégalité isosystolique due à M. Gromov. Enfin on montre que, si l'exposant critique est trop petit, notre application naturelle contracte strictement le volume de tout représentant, de sorte que, par itération de cette application, nous obtiendrions un représentant du cycle choisi de volume arbitrairement petit. Ceci conduit à une contradiction. Le cas d'égalité nécessite une étude très fine de l'application naturelle dans cette situation. Pour définir l'application naturelle nous avons été conduit à modifier la définition du barycentre que nous utilisions précédemment. Ceci montre une certaine souplesse de la méthode.

6 Géométrie des connexions ([7])

C'est un travail en gestation. L'idée est d'étudier les connexions métriques d'un point de vue géométrique. Dans [7] j'étudie le cas des fibrés vectoriels hermitiens en droites complexes sur une variété riemannienne. Une connexion métrique sur un tel fibré peut être vue comme un champ de n-plans (n étant la dimension de la base) sur l'espace total du fibré principal associé dont le groupe structural est S^1. Ce champ de plans est invariant par l'action de S^1, de plus on peut le munir de la métrique riemannienne remontée de la base et définir ainsi la longueur des courbes rectifiables qui lui sont tangentes. On obtient ainsi sur l'espace total du fibré principal une distance sous-riemannienne, *à la* Carnot-Carathéodory. Le champ de plans ne vérifie pas nécessairement la condition de Hörmander mais est toutefois transverse à l'action d'un groupe (le groupe structural). Pour une telle distance on peut définir un cône tangent ; M. Gromov suggère qu'il suffit de regarder la structure métrique "à la loupe", ou plus précisément de multiplier la distance par un nombre tendant vers l'infini et de chercher une limite en son sens (pour la distance de Hausdorff entre espaces métriques pointés). Le cône tangent admet alors naturellement une structure de groupe nilpotent gradué. Dans [7] je suis ce processus au niveau de l'analyse. Rappelons que, dans le cadre de la géométrie riemannienne classique, l'analogue analytique de la loupe est l'opération qui consiste à faire tendre vers 0 le temps dans le noyau de l'opérateur de la chaleur, on a alors un développement asymptotique de celui-ci dont le premier terme est le noyau euclidien, l'espace euclidien étant l'espace tangent en un point donné à toute variété riemannienne.

Dans [7] je traduis sur la connexion l'opération de M. Gromov et montre que le modèle infinitésimal (l'espace tangent d'une connexion en quelque sorte) est une connexion métrique sur un fibré vectoriel hermitien en droites complexes sur $\mathbb{R}^n$ topologiquement trivial, dont la courbure est **c**onstante. Je montre que son noyau de la chaleur admet un développement asymptotique dont le premier terme est le noyau de la chaleur de cette connexion à courbure constante qui est connu. Ce travail est parallèle à la méthode utilisée par E. Getzler pour prouver le théorème d'Atiyah-Singer.

Les termes supplémentaires du développement font intervenir une notion de courbure qui mesure le défaut de la connexion à ressembler à son modèle infinitésimal. Cette partie n'est pas encore rédigée. Je pense pouvoir utiliser une notion de courbure introduite par P. Foulon dans le cadre général des équations différentielles du second ordre.

7 Conclusion

L'ensemble de mes résultats montre un va-et-vient permanent entre la géométrie et l'analyse avec en arrière plan le souci constant de rester le plus proche possible de la situation géométrique. J'essaie d'avoir une vue synthétique des problèmes qui m'intéressent et de ne publier que des résultats mûris.

Les travaux faits en collaboration sont le fruit de nombreux échanges et reflètent un réel plaisir à pratiquer la recherche sous cette forme. De même, une certaine mobilité thématique m'est nécessaire, ce qui ne m'empêche pas de revenir régulièrement sur des problèmes qui me tiennent à cœur.

Enfin si je devais dégager les trois résultats que je juge les plus importants ce seraient [4], [7], [8] et l'ensemble [5], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29] et [30].

References

[1] P. Bérard and G. Besson. Remarque sur un article de Marcel Berger : sur une inégalité pour la première valeur propre du laplacien. *Bull. Soc. Math. France*, 108:333–336, 1980.

[2] P. Bérard and G. Besson. Spectres et groupes cristallographiques ii: domaines sphériques. *Ann. Inst. Fourier*, 30(3):237–248, 1980.

[3] P. Bérard and G. Besson. The number of bound states and estimates on some geometric invariants. *J. of Funct. Anal.*, 94(2):375–396, 1990.

[4] P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot. Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov. *Invent. Math.*, 80:295–308, 1985.

[5] P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot. Embedding riemannian manifolds by their heat kernel. *G.A.F.A.*, 4(4):373–398, 1994.

[6] L. Bessières, G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Differentiable rigidity and Ricci curvature. preprint, 2004.

[7] G. Besson. Geometry of connections i: an asymptotic expansion for the heat kernel associated to a connection. preprint révisé 2004.

[8] G. Besson. Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes. *Ann. Inst. Fourier*, 30(1):109–128, 1980.

[9] G. Besson. A generalisation of a Faber-Krahn's inequality. In Tokyo Kaigai Publications, editor, *Spectra of Riemannian Manifolds*, pages 29–37, 1983.

[10] G. Besson. Comportement asymptotique des valeurs propres dans un domaine avec un trou. *Bull. Soc. Math. France*, 113:211–230, 1985.

[11] G. Besson. A Kato type inequality for riemannian submersions with totally geodesic fibers. *Ann. of Global Anal. and Geom.*, 3(4):273–289, 1986.

[12] G. Besson. On symmetrization. In D. DeTurck, editor, *Nonlinear Problems in Geometry*, volume 51 of *Contemporary Mathematics*, pages 9–21. A.M.S., 1986.

[13] G. Besson. Symmetrization. In *Spectral Geometry : direct and inverse problems by P.* Bérard, volume 1207 of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter Appendix. Springer-Verlag, 1987.

[14] G. Besson. On the multiplicity of the eigenvalues of the laplacian. In T. Sunada, editor, *Geometry and Analysis on Manifolds*, volume 1339 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 32–53. Springer Verlag, 1988.

[15] G. Besson. Sur la cohomologie bornée. séminaire de cohomologie bornée, E.N.S. de Lyon, 1988.

[16] G. Besson. Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité. *Comment. Math. Helv.*, 64:542–588, 1989.

[17] G. Besson. Volumes and entropies. In M. Lovric, M.Min Oo, and McKenzie Wang, editors, *Riemannian Geometry*, number 4 in Fields Institute Monographs, pages 1–22. A.M.S., 1995.

[18] G. Besson. Volumes and rigidities of riemannian manifolds. In Dong Siu Kim and Inkang Kim, editors, *Lecture Notes of theThirteen Kaist Mathematical Workshop*, pages 135–164. K.A.I.S.T. , Taejon Korea, 1998.

[19] G. Besson. From isoperimetric inequalities to heat kernel via symmetrisation. to appear in Surveys in Differentiable Geometry, 2004.

[20] G. Besson and M. Bordoni. On the spectrum of riemannian manifolds with totally geodesic fibers. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 9(1):335–340, 1990.

[21] G. Besson, B. Colbois, and G. Courtois. Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur s^2. *Transactions of the A.M.S.*, 350(1):331–345, 1998.

[22] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Le volume et l'entropie minimal des espaces localement symétriques. *Invent. Math.*, 103:417–445, 1991.

[23] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Les variétés hyperboliques sont des minima locaux de l'entropie topologique. *Invent. Math.*, 117:403–445, 1994.

[24] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Volumes, entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *C.R.A.S., Paris, série I*, 319:81–84, 1994.

[25] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Volume et entropie minimales des variétés localement symétriques. *G.A.F.A.*, 5(5):731–799, 1995.

[26] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. A simple proof of Mostow's rigidity theorem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 16:623–649, 1996.

[27] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Un lemme de Schwarz réel et applications. *Acta Math.*, 183:145–169, 1999.

[28] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Inégalités de Milnor-Wood de dimension ≥ 3. en préparation, 2004.

[29] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Rigidity of amalgamated products in negatice curvature. preprint, 2004.

[30] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Un lemme de Margulis sans courbure. en préparation, 2004.

PROJETS DE RECHERCHE

J'ai passé une bonne partie de l'année académique 2004-2005 à travailler sur les articles de G. Perel'man pour préparer le séminaire Bourbaki du 26 juin 2005, mais aussi pour apprendre cette approche si remarquable de la topologie des variétés de dimension 3. Il y a peu d'endroit en France où un groupe de travail à pu aboutir à la lecture complète de ces travaux. A partir de mars 2005, j'ai travaillé à temps plein sur ces idées.

Travaux de G. Perel'man

Avec Laurent Bessières, j'ai animé cette année un groupe de travail sur les travaux de G. Perel'man. Nous commençons maintenant une collaboration avec les géomètres de l'université de Münich pour avancer vers la compréhension de la preuve de la conjecture de Poincaré (si elle est effectivement prouvée). J'organiserai donc une séance de travail à l'Institut Fourier à l'automne 2004. Par ailleurs L. Bessières et moi-même donneront un cours de D.E.A. à Grenoble sur le flot de la courbure de Ricci; nous ferons également un des cours du séminaire roman de géométrie (14 heures) (Suisse), un cours à Rome et une école d'été à Chambéry. Enfin, j'enseignerai les travaux de R. Hamilton sur le flot de la courbure de Ricci en Algérie au printemps 2005. Dans ces cours nous présenterons l'état d'avancement de notre compréhension des travaux de G. Perel'man. Cet investissement conduit à des questions très intéressantes; dans le premier article paru sur Arxiv, G. Perel'man donne une preuve agréable d'un résultat de J. Cheeger et T. Colding qui nous semble permettre d'améliorer de manière importante le travail [6]; c'est ce point que nous allons explorer en priorité. Une autre question, lièe à [5] est la suivante : soit $g(t)$ une solution du flot de Ricci et $p(t;.,.)$ la solution fondamentale de l'opérateur,

$$\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{g(t)} \,.$$

Peut-on plonger la famille de métriques $g(t)$ dans un même espace de Hilbert en utilisant le noyau p et ainsi réaliser le flot comme une déformations de sous-variétés d'un espace de Hilbert?

Volumes, entropies et énergies

Nous poursuivons le programme de travail que nous avons développé pour prouver la conjecture de l'entropie minimale. Nous savons déjà étendre nos résultats aux cas où les variétés concernées sont de volume fini (au lieu d'être compactes) ; nous savons également traiter le cas où (X, g_0) est produit d'espaces localement symétriques de rang 1 (de dimension ≥ 3), ceci nous donne bon espoir de résoudre le cas des espaces localement symétriques irréductibles de rang ≥ 2. C'est sur ce point que nous travaillons le plus actuellement. Nous attendons de résoudre ce problème pour publier en bloc le cas des espaces de rang ≥ 2, irréductible ou non, avec l'extension de notre méthode au cas du volume fini.

Nous développons également notre méthode pour l'étude des représentations quasi-fuchsiennes et en particulier la conjecture mentionnée dans ma notice concernant le cas hyperbolique complexe ainsi que pour prouver une version du théorème de Y. Shalom mentionné dans le paragraphe 5 dans le cas de l'espace hyperbolique complexe.

Au delà, il faudra comprendre les points critiques de l'entropie lorsque la variété différentielle sous-jacente n'admet pas de métriques localement symétriques, question pour laquelle nous avons déjà des éléments de réponses.

Espaces hyperboliques complexes

Certains des problèmes ci-dessus nécessitent une bonne compréhension des exemples de variétés hyperboliques complexes compactes. J'envisage de les étudier à fond en essayant, en particulier, de faire la synthèse entre l'approche de G. Mostow et P. Deligne et celle de W. Thurston.

Géométrie des connexions

Dans ce domaine tout est à faire. Il me reste à bien clarifier la notion de courbure mentionnée dans la notice au paragraphe E et tenter d'obtenir des théorèmes de comparaison qui la font intervenir. Il s'agit d'un exemple de géométrie sous-riemannienne qu'il me semble important de traiter à fond. On peut espérer des applications importantes à la théorie de jauge.

Une conséquence analytique pourrait être une minoration du λ_1 des Laplaciens bruts *à la* Cheeger, faisant intervenir des quantités géométriques liées à ces métriques sous-riemanniennes.

Cet ensemble est un travail qui a stagné depuis 1986 mais je pense l'avoir débloqué récemment suscitant un regain d'intérêt de ma part, comme en témoigne [7].

Multiplicité des valeurs propres du Laplacien des surfaces

Le problème pour la multiplicité des valeurs propres du Laplacien sur les surfaces et en particulier du λ_1 est loin d'être résolu, bien que Y. Colin de Verdière y ait injecté depuis 1985 des idées fructueuses. La borne linéaire en le genre que j'ai prouvée dans [8] n'est certainement pas optimale. Y. Colin de Verdière conjecture une majoration en racine carrée du genre (et même une valeur précise liée au nombre chromatique). Une étape intermédiaire serait de prouver que si $m_1(\gamma)$ désigne la plus grande multiplicité possible pour la première valeur propre non nulle du Laplacien associé à une métrique riemannienne sur une surface de genre γ, on a

$$\limsup \frac{m_1(\gamma)}{\sqrt{\gamma}} < \infty.$$

Bien que je n'aie pas pour l'instant d'idée nouvelle pour cela, je reviens régulièrement sur ce problème en espérant profiter d'acquis nouveaux.

Problèmes inverses

J'ai commencé une collaboration avec S. Kurylev (Université de Loughborough, Angleterre) et M. Lassa (Université d'Helsinki) dont le but est de reconstruire un domaine à partir de données spectrales sur son bord. Nous espérons pouvoir utiliser les idées qui sont apparues dans le lemme de Margulis sans courbure. S. Kurylev passera un mois à Grenoble en janvier 2006.

ENCADREMENTS D'ÉTUDIANTS

Mon travail de direction de recherches concerne les personnes suivantes :

- F. Mouton travaille sur le prolongement à l'infini des fonctions harmoniques sur des variétés complètes, non compactes, à courbure négative ; il a soutenu sa thèse le 14 janvier 1994 et est maître de conférences à l'Institut Fourier de Grenoble. Son premier article, portant sur sa thèse, est paru à Commentarii Math. Il est, actuellement, détaché auprès de l'Université de Genêve.

- J. C. Picaud travaille sur la cohomologie bornée ; Il a soutenu sa thèse le 27 Octobre 1995. Il a été P.R.A.G. à l'Université d'Evry et est maître de conférences à l'université d'Avignon depuis septembre 1998 et prépare un échange de service avec un collègue de Tours.

- P. Vérovic (depuis 1992) travaille sur l'entropie pour des métriques finslériennes et a obtenu des exemples de telles métriques montrant que l'analogue Finslérien du théorème de l'entropie minimale est faux. Il a soutenu sa thèse le 13 septembre 1996. Il a été successivement A.T.E.R. à l'université de Montpellier, post-doctorant à l'universitè de Manchester. Il est maître de conférences à l'université de Chambéry depuis septembre 1998.

- H. Fannai (depuis 1994) a travaillé sur le flot géodésique des variétés de courbure strictement négative et sur la construction de métriques d'Einstein de courbure scalaire négative sur des groupes résolubles. Il a soutenu sa thèse le 19 décembre 1997. Il est actuellement maître de conférences à l'Université Sharif de Téhéran.

- J. Maubon (depuis 1996) travaille sur des déformations de réseau co-compacts de l'espace hyperbolique réel. Il a soutenu sa thèse le 30 septembre 1999, a été post-doctorant à l'E.T.H. de Zürich. Il a publié une note aux C.R.A.S. et un article paru dans la revue *Ergodic Theory and Dynamical system*. Il est maître de conférences à l'Université de Nancy.

- C. Vernicos (depuis 1997) travaille à étendre un résultat de D. Burago et Y. Ivanov concernant la croissance du volume des boules dans le revêtement universel des tores riemanniens au cas des nilvariétés; en particulier au groupes d'Heisenberg. Il a utilisé une méthode d'homogéneisation pour obtenir des versions analytiques de ces résultats. Il a soutenu sa thèse le 20 décembre 2001. Il est assistant à l'Université de Neuchâtel après y avoir été post-doctorant.

- R. Péreyrol (depuis 1998) travaille sur les simplexes de l'espace hyperbolique et sur le volume simplicial des espaces symétriques de rang 1. Il a obtenu une formule de développement en produits d'harmoniques sphériques de ce volume. Il a soutenu sa thèse le 21 décembre 2001. Il a passé une année comme post-doctorant à l'Université de Fribourg. Il est maintenant A.T.E.R. à l'Université de Montpellier.

- L. Chupin fait un stage de D.E.A. sur le rayon d'injectivité des variétés de courbure négative ou nulle.

- L. Chaumart travaille sur le déterminant du Laplacien. Je l'encadre en co-tutelle avec B. Colbois. Il a soutenu sa thèse le 17 décembre 2003. Il a donné une formule d'approximation du déterminant des opérateurs de Schrödinger sur un tore lorsque l'on discrétise la variété. Cela généralise un résultat de Y. Colin de Verdière.

- V. Bayle travaille sur les inégalités isopérimétriques. Il a prouvé que le profil isopérimétrique d'une variété riemannienne compacte satisfait une (des) inéquation(s) différentielle(s) faisant intervenir la courbure de Ricci. Ceci redonne et améliore une grande partie des résultats mentionnés au paragraphe 3 de ce rapport. Sa thèse, soutenue le 18 décembre 2003, est partiellement publiée à I.M.R.N.

- N. Bourdariat a fait une stage de D.E.A. sur le volume des petites boules dans les variétés riemanniennes.

- C. Dubois a soutenu un D.E.A. que j'ai co-encadré avec S. Attal. Elle travaille sur les processus S.L.E. Elle a soutenu un mémoire de magistère sur ce sujet.
- C. El Mir a soutenu un D.E.A. sur le raccourcissement des courbes en juin 2005.
- J'ai encadré plusieurs autres stages de magistères, dont les plus récents sont B. Mauricette (E.N.S.L.) et D. Rivollier (E.N.S.L.) et un stage d'option de l'École Polytechnique (E. Chaput).

Mon travail dans ces sujets consiste en l'animation d'un séminaire, de plusieurs groupes de travail et de discussions informelles. J'ai donné trois cours de D.E.A. à l'Institut Fourier :

- *Difféomorphismes du cercle et théorie ergodique*, en 88-89, avec Y. Carrière.
- *Volumes et rigidités*, en 94-95.
- *Géométrie riemannienne*, en 99-2000, avec S. Gallot.
- *Flot géométriques*, en 2004-05, avec L. Bessières.

Par ailleurs, après avoir fait des séances d'exercices pendant plusieurs années, j'enseigne à l'École Polytechnique, depuis 2002, le cours intitulé “méthodes mathématiques pour les sciences physiques”.

ADMINISTRATION

- Colloque de Géométrie Dynamique (année 89-90) co-organisé avec G. Courtois et S. Gallot. Cette série de trois colloques a permis de faire le point sur les résultats concernant le volume des variétés riemanniennes (Décembre 1989 à l'Ecole Polytechnique), les notions de bords à l'infini (Mars 1990 à l'Ecole Polytechnique) et l'entropie du flot géodésique (Mai 1990 à l'Institut Fourier de Grenoble).

  Lors du premier, G. Courtois, S. Gallot et moi même avons décrit nos résultats sur le sujet et explicité l'invariant appelé le volume sphérique d'une variété riemannienne que nous avons récemment introduit.
- Colloque de Géométrie Dynamique (année 90-91) avec les mêmes personnes j'ai co-organisé cette réunion qui a eu lieu les 10-11-12 décembre 1990 à l'Ecole Polytechnique sur le thème "Quelques liens entre systèmes dynamiques et géométrie".
- Ecole de géométrie spectrale. J'ai co-organisé avec P. Bérard cette école qui a eu lieu du 7 au 14 avril 1991 à Aussois.
- Secretaire du groupe Arthur L. Besse.
- Co-organisateur de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'Honneur de Marcel Berger en collaboration avec L. Bérard Bergery, A. L. Besse et J. P. Bourguignon. Elle a eu lieu du 13 au 18 juillet 1992 (colloque satellite du 1er congrés européen).
- G.A.D.G.E.T. : à partir 1er janvier 1992 et jusqu'en 1998 j'ai géré l'équipe grenobloise membre de ce programme européen.
- Membre du comité scientifique du colloque de géométrie différentielle, colloque satellite du Congrés européen de 1996.

- Membre du comité de rédaction de la Gazette des Mathématiciens à partir de septembre 1998 et Rédacteur en chef de novembre 1999 à septembre 2002.
- Responsable du noeud grenoblois du réseau européen E.D.G.E. de juin 2000 à mai 2004.
- Organisation de la fête de la Science en 2000.
- Responsable des écoles d'été de l'Institut Fourier (Il y en a une chaque année) depuis 2003.
- Membre du comité national du C.N.R.S., section 01 de septembre 2000 à août 2004.
- Secrétaire-trésorier des Annales de l'Institut Fourier depuis juillet 2005.

MISSIONS-SÉJOURS A L'ÉTRANGER

Voci une selection des missions que j'ai effectuées :

- colloque Franco-Japonais de géométrie riemannienne. Il a eu lieu en octobre 1981 à Kyoto et Tokyo. J'ai exposé mon travail sur les *inégalités isopérimétriques.*
- Séjour à l'Université de Pennsylvanie.

  De septembre 1985 à juin 1986, j'ai obtenu un poste de professeur visiteur à l'Université de Pennsylvanie à Philadelphie.

  Ce séjour m'a permis d'avoir une expérience d'enseignement suivi et de nouer des contacts étroits avec des mathématiciens américains.

  J'ai également obtenu un "*grant*" de la N.S.F. (DMS 85-03302) pour la période ci-dessus.

  Afin de conserver des contacts étroits avec le Département de Mathématiques de l'Université de Pennsylvanie, D. Deturck et moi-même avons postulé à une bourse pour la recherche coopérative de l'OTAN. Nous avons obtenu la bourse 0153\87. Ceci a permis à 4 mathématiciens de l'Université ci-dessus (dont D. Deturck) de faire un séjour de 3 semaines à Grenoble en juin 1987.

  En retour, P. Bérard, G. Courtois, Y. Colin de Verdière et moi même nous sommes rendus du 19 au 27 janvier 1991 à Philadelphie pour un colloque de géométrie.
- Symposium Taniguchi , il s'est tenu à Katata (Japon) fin août 1987. J'ai fait un séjour de trois semaines au Japon visitant les Universités de Kyoto, Okayama, Osaka et le "Tokyo Institute of Technology". J'ai exposé dans ces centres mon travail sur la *multiplicité du Laplacien.*
- Participation au "College on differential geometry" qui a eu lieu à l'I.C.T.P. à Trieste du 20 au 24 Novembre 1989, où j'ai fait un mini-cours sur les *inégalités isopérimétriques.*
- Conférence au colloque G.A.D.G.E.T. à Berlin (15-20 juin 1990).
- Visite à l'I.M.P.A. (Rio de Janeiro) où j'ai été invité du 1er août au 15 septembre 1991.
- Visite à l'Institute for Advanced Study à Princeton où j'ai été invité du 23 novembre au 9 décembre 1991 et du 20 au 27 juin 1992.
- Participation au workshop "Rigidity, Ergodic Theory and Lie Groups" qui s'est tenu au M.S.R.I. de Berkeley du 10 au 18 avril 1992.

- Coordinateur de la bourse O.T.A.N. CRG910904. Après clôture du précédent programme, G. Courtois, S. Gallot et moi-même avons obtenu une bourse pour la recherche coopérative entre l'Institut Fourier et l'Institute for Advanced Study à Princeton ou séjournait G. Courtois. Cela nous a permis une série d'échanges.
- Visite au Forschungsinstitut de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich où j'ai été invité du 2 au 6 novembre 1992 et du 6 au 10 juillet 1993.
- Visite au Fields Institute à Waterloo (Canada) où j'ai été invité en Août 1993. J'ai fait un mini-cours intitulé : "Volumes, Entropies and Calibrations".
- Invité au 5th SCGAS (5th Southern California Geometry Analysis Seminar), 10-11 février 1996, Irvine (Californie).
- Invité à l'Université de Taejon (Corée du Sud) en juillet 1998. J'ai donné un mini-cours intitulé "Volume and rigidities of Riemannian manifolds".
- Differential Geometrie im Großen, Oberwolfach (15-29 juin 1999).
- Workshop on rigidity, Newton Institute, Cambridge (28 juin-8 juillet 2000).
- Colloque en l'honneur de René Michel, Avignon (7 juin 2001). Conférence : "Les travaux de René Michel sur la rigidité".
- E.D.G.E. meeting, Odense Danemark (19-22 avril 2001). Conférence : "On the representations of the fundamental groups of hyperbolic manifolds".
- Geometric methods in inverse problems and PDE control, Institute for mathematics and its applications, Minneapolis (16-27 juillet 2001). Conférence : "A Margulis lemma without curvature".
- Geometric rigidity and hyperbolic geometry, Oberwolfach (18-24 février 2001).
- co-organisateur : Workshop on hyperbolic geometry, université de Fribourg (1-6 octobre 2001)
- Rencontre de géométrie, université de Nancy (22-23 janvier 2002). Conférence : "Sur le groupe fondamental des variétés hyperboliques".
- Séminaire de géométrie, université de Neuchâtel (13-15 février 2002). 3 conférences sur "un lemme de Margulis sans courbure".
- co-organisateur : Heat Kernel on manifolds and graphs, Centre Émile Borel, trimestre du 14 avril au 13 juillet 2002.
- co-organisateur : géométrie des variétés de petites dimensions et variétés spéciales, C.I.R.M. (3-8 juin 2002).
- co-organisateur : École d'été de géométrie, université de Savoie (23-29 juin 2002).
- Géométrie et dynamique des groupes, C.I.R.M. (15-19 juillet 2002).
- co-organisateur : École d'été du réseau E.D.G.E., university of Edimburgh (22 juillet-3 août 2002).
- séjour à Loughborough University (24-28 février 2003) pour collaboration avec S. Kurylev et M. Lassas.

- Workshop on geometry and inverse problem, university of Warwick (3 mars 2003). conférence : “A Margulis lemma without curvature”.
- Geometry seminar, university of Cambridge (3-6 mars 2003). conférence : “Hyperbolic geometry, amalgamated products and Poincaré series”.
- Workshop sur les variétés hyperboliques, Les diablerets Suisse (31 mars-4 avril 2003). 2 conférences : “variétés hyperboliques, produits amalgamés et séries de Poincaré”.
- Group actions, SchloßRingberg Allemagne (29 juin-4 juillet 2003). conférence : “Hyperbolic manifolds, critical exponents and amalgamated products”.
- Séminaire commun Bonn-Cologne (10 juillet 2003). conférence : “Uniform growth of fundamental groups of negatively curved manifolds”.
- Ecole d’été du Cimpa. El Oued, Algérie du 26 février au 8 mars 2005. cours : “Flots géométriques”.
- Je vais régulièrement visiter l’équipe de géométrie de l’université de Rome.

DIVERS

- Secrétaire-trésorier des Annales de l’Institut Fourier.
- Membre du comité de rédaction des Rendiconti di Matematica (Rome).
- Membre du comité de rédaction du Journal of the Korean Mathematical Society.