Groupe de Travail

Flot de Ricci, papiers de Perelman

Notes sur le premier papier: The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application

1 Séance 1: la fonctionnelle de Perelman (4.12.2003)

1.1 Introduction: rappels sur la courbure

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On notera $\mathcal{V}_g$ sa forme volume. Soit $u \in T_m M$, $||u|| = 1$. On définit
$$exp_m^* \mathcal{V}_g(tu) = J(u,t) dx^1 \dots dx^n$$
où (x^i) est un système de coordonées euclidiennes dans $T_m M$. Au voisinnage de 0_m, on a

$$exp_m^* \mathcal{V}_g(tu) = \left(1 - \frac{t^2}{6} Ric_m(u,u) + o(t^2)\right) \mathcal{V}_{euclidien}$$

Définition 1. *Ric est la courbure de Ricci. C'est une 2-forme bilinéaire symétrique sur $T_m M$.*

Définition analytique

Sur (M, g), il existe une unique dérivée covariante $D_X Y$, qui satisfait pour tout X, Y champs de vecteurs

1. $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.
2. $X.g(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$.

tenseur de courbure
$$R(X, Y)Z = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z$$
où X, Y, Z sont des champs de vecteurs, $R(X, Y)Z$ est un champ de vecteur.

Note: $R(fX, hY)kZ = fhkR(X, Y)Z$ où $f, h, k \in C^\infty(M)$. On écrit $R_m(x, y)z$ si $X(m) = x$, $Y(m) = y$ et $Z(m) = z$.

Propriétés Pour le 4-tenseur $R_m(x, y, z, t) = g(R_m(x, y)z, t)$, on a

1. $R_m(x, y, z, t) = -R_m(y, x, z, t) = -R_m(x, y, t, z)$.
2. $R_m(x, y, z, t) + R_m(y, z, x, t) + R_m(z, x, y, t) = 0$.
3. $R_m(x, y, z, t) = R_m(z, t, x, y)$.

Courbure sectionnelle

Soit G_m^2 = la grasmannienne des 2-plans vectoriels de $T_m M$.
Alors $K : G_m^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ associe à $P = (x, y)$

$$K(P) = \frac{R_m(x, y, x, y)}{||x \wedge y||^2} = \frac{R_m(x, y, x, y)}{||x||^2 ||y||^2 - g(x, y)^2}$$

Note Si x, y sont orthonormés, $K(P) = R_m(x, y, x, y)$.

Interprétation géométrique

Soit $u_1, u_2 \in T_mM$. Soit S le bout de surface au voisinnage de m engendré par u_1, u_2, i.e.

$$S = \{exp_m(su_1 + tu_2),\ s, t \text{ petits}\}$$

alors $K(P)$ est la courbure de Gauss de S au point m. Si C_r est le cercle de rayon r centré en m, alors

$$\ell(C_r) = 2\pi r \left(1 + \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2)\right)$$

Propriété: la courbure sectionnelle détermine le tenseur de courbure.

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(R_m(x+\alpha z, y+\beta t, x+\alpha z, y+\beta t)R_m(x+\alpha t, y+\beta z, x+\alpha t, y+\beta z)\right) = 6R_m(x, y, z, t)$$

Courbure de Ricci

1. $Ric_m(x, y)$ est la trace de l'endomorphisme
$$v \mapsto R(x, v)y$$
2. Si (e_i) est une base orthonormée de T_mM,
$$Ric_m(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Ric_m(x, e_i, y, e_i)$$
3. $scal_g$ est la trace de $Ric(g)$,
$$scal_g(m) = \sum_{i,j=1}^{n} R_m(e_j, e_i, e_j, e_i) = \sum K(e_i, e_j)$$

Remarque 1. *$scal_g$ et $Ric - \frac{scal_g}{n} g$ apparaissent naturellement dans la décomposition du tenseur de courbure:*

$$R = \frac{scal_g}{2n(n-1)} g \odot g + \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{scal_g}{n} g\right) \odot g + W$$

où $\odot$ est le produit de Kulkarni-Nomizu des 2-tenseurs symétriques

$$h \odot k(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)K(x, z) - h(x, t)k(y, z) - h(y, z)k(x, t)$$

et W est le tenseur de Weil.

En dimension 3

Le tenseur de Ricci détermine le tenseur de courbure.

1. En effet, l'espace des tenseurs de courbure est de dimension $\frac{1}{12}n^2(n^2-1) = 6$, de même que les deux premières composantes de la décomposition en facteurs irréductibles du tenseur de courbure. Donc $W = 0$ et on a

$$R = (Ric - \frac{scal_g}{4} g) \odot g$$

2. Plus simplement, de

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_1) &= K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3) \\ Ric(e_2, e_2) &= K(e_1, e_2) + K(e_2, e_3) \\ Ric(e_3, e_3) &= K(e_1, e_3) + K(e_2, e_3) \end{aligned}$$

   on peut déduire

$$K(e_1, K(e_2) = \frac{1}{2}\left[Ric(e_1, e_1) + Ric(e_2, e_2) - Ric(e_3, e_3)\right]$$

note Il est facile de construire des métriques en dimension 3 où $Ric > 0$ (resp. $Ric < 0$) sans avoir $K > 0$ (resp. $K < 0$). Par exemple, on peut considérer des produits tordus $S^2 \times_f]a, b[$.

1.2 La fonctionnelle

G. Perelman considère sur les couples $(g, f) \in Met(M) \times C^\infty(M)$ la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M \left(scal_g + |\nabla f|^2\right) e^{-f} \, d\mathcal{V}_g$$

But : montrer que le flot de Ricci est un flot de gradient.

On considère des variations

$$\begin{aligned} g_t &= g + tv \text{ , où } v \in S^2 M \\ f_t &= f + th \text{ , où } h \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

On utilisera $g = (g_{ij})$ dans un système de coordonnées et $d\mathcal{V}_g = (det\ g_{ij})^{1/2} dx^1 \dots dx^n$. On veut exprimer $\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{F}(g_t, f_t)$ en fontion de v, h.

la forme volume

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-f_t} d\mathcal{V}_{g_t}\right) = \left(\frac{1}{2} tr_g v - h\right) e^{-f} d\mathcal{V}_g$$

où $tr_g v = g^{ij} v_{ij} = \sum v(e_i, e_i)$.

le gradient

En coordonnées, $df(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \partial_i f$, $\partial f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \dots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$ et $|\nabla f|^2 = {}^t\partial f(g^{ij})\partial f$. Notons que $\nabla = \nabla^{g_t}$ et $|.| = |.|_{g_t}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(|\nabla^{g_t} f_t|^2_{g_t}\right) &= -\sum v_{ij}\partial_i f \partial_j f + 2 < \nabla f, \nabla h >_g \\ &= - < v, df \otimes df >_g + 2 < \nabla f, \nabla h >_g \end{aligned}$$

où $< \alpha, \beta >_g = \sum \alpha(e_i, e_j)\beta(e_i, e_j)$ pour une base (e_i) g-orthonormée au point, est le produit scalaire induit par g sur les 2-tenseurs.

<u>la courbure scalaire</u>

Pour la variation infinitésimale de la courbure scalaire, on utilise la formule

$$\frac{d}{dt} scal_{g_t} = \Delta_g(tr_g v) + \delta_g(\delta_g v) - < Ric_g, v >_g$$

(A. Besse, Einstein manifolds, page 63)

Notations : Δ_g est le laplacien des géomètres, i.e. $\Delta_g f = -tr\ Ddf$. Perelman utilise le signe opposé. Pour un p-tenseur T, le divergence $\delta_g T$ est le $p-1$-tenseur $-\sum D_{e_i}T(e_i, \dots)$. Donc $\Delta_g f = \delta_g df$. On utilisera le fait que δ_g est l'adjoint pour le produit scalaire L^2 de la dérivée covariante symétrisée D^s:

$$\int_M < \alpha, \delta\beta >_g \ d\mathcal{V}_g = \int_M < D^s\alpha, \beta >_g \ d\mathcal{V}_g$$

où α est un $p-1$ tenseur et β un p-tenseur.

Maintenant, on élimine toutes les dérivées portant sur v ou h en faisant des intégrations par parties ou en utilisant la dualité.

$$\begin{aligned} \int_M < \nabla f, \nabla h >_g e^{-f}\ d\mathcal{V}_g &= \int_M < e^{-f} df, dh >_g d\mathcal{V}_g \\ &= \int_M \delta_g(e^{-f}df) h \ d\mathcal{V}_g \\ &= \int_M \left(-i_{d(e^{-f})}df + e^{-f}\delta_g df\right) h \ d\mathcal{V}_g \\ &= \int_M \left(|\nabla f|^2 + \Delta_g f\right) h \ e^{-f} d\mathcal{V}_g \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_M (\Delta_g(tr_g v) + \delta_g(\delta_g v))\, e^{-f}\ d\mathcal{V}_g &= \int_M \delta_g\, (d(tr_g v) + \delta_g v)\, e^{-f}\ d\mathcal{V}_g \\
&= -\int_M \left\langle d(tr_g v) + \delta_g v, e^{-f} df \right\rangle\ d\mathcal{V}_g \\
&= -\int_M tr_g v\ \delta_g(e^{-f} df) + < v, D(e^{-f} df) >\ d\mathcal{V}_g \\
&= -\int_M tr_g v(|\nabla f|^2 + \Delta_g f) e^{-f} + < v, -e^{-f} df \otimes df + e^{-f} Ddf >\ d\mathcal{V}_g
\end{aligned}
$$

On regroupe tous les termes:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{F}(g_t, f_t) &= \int_M e^{-f} \Big[\left(scal_g + |\nabla f|^2 \right) \left(\frac{1}{2} tr_g v - h \right) + 2 \left(|\nabla f|^2 + \Delta_g f \right) h - tr_g v(|\nabla f|^2 + \Delta_g f) \\
&\qquad - < Ric_g + Ddf, v >_g \Big]\ d\mathcal{V}_g \\
&= \int_M e^{-f} \left[- < Ric_g + Ddf, v >_g + \left(\frac{1}{2} tr_g v - h \right) \left(scal_g - |\nabla f|^2 - 2\Delta_g f \right) \right]\ d\mathcal{V}_g
\end{aligned}
$$

Si maintenant, on considère des variations telles que $e^{-f_t} d\mathcal{V}_{g_t} = dm$ est constant, alors on a $\frac{1}{2} tr_g v - h = 0$ d'où

$$
\frac{d}{dt} \mathcal{F}(g_t, f_t) \int_M - < Ric_g + Ddf, v >_g e^{-f}\ d\mathcal{V}_g
$$

On considère maintenant le flot:

$$
\begin{cases}
\partial g_t = -2 \left(Ric_{g_t} + Ddf_t \right) \\
\\
\partial f_t = \frac{1}{2} tr_{g_t} (\partial g_t) = -scal_{g_t} + \Delta_{g_t} f_t
\end{cases}
$$