

Cas des courbes convexes: Gage-Hamilton 1986

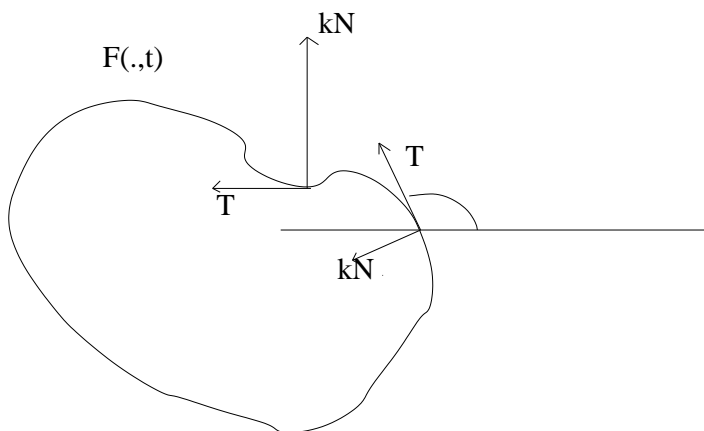
1 Introduction

1.1 Motivations

En 1982, Richard Hamilton [H] a démontré qu'une variété compacte de dimension 3 admettant une métrique riemannienne de courbure de Ricci > 0 admet aussi une métrique sectionnelle de courbure constante positive, i.e. une métrique sphérique. La technique utilisée, qui est reprise par G. Perelman, consiste à déformer la métrique initiale par le flot dit de Ricci. La plupart des difficultés se retrouvent, à un niveau élémentaire, dans la situation analogue des courbes convexes du plan. C'est par là que nous commençons. Le résultat, dû à Gage et Hamilton en 1986 [GH], est qu'une courbe plongée convexe du plan est déformée par le flot de la courbure jusqu'à un point (le flot n'est pas normalisé), la géométrie se rapprochant de manière C^∞ de la géométrie du cercle. Nous donnons un énoncé précis plus loin. Ce résultat a été étendu par M. Grayson en 1987 au cas des courbes plongées quelconques ([Gr]).

1.2 Notations et énoncé

On va considérer des courbes $F(u, t)$ plongées dans \mathbb{R}^2 , avec $(u, t) \in S^1 \times [0, T)$. On supposera les courbes orientées dans le sens direct. On notera s le paramétrage par la longueur, i.e. $ds = v du$, où $v = |\frac{\partial F}{\partial u}|$ à t fixé. Le vecteur unitaire tangent est noté $T = \frac{\partial F}{\partial s}$ et le vecteur normal N est choisi pointant vers l'intérieur. La courbure est alors le réel k tel que $\frac{\partial T}{\partial s} = kN$. C'est aussi $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ où θ désigne l'angle orienté de T avec l'horizontale.



Avec le choix de N , la courbe sera convexe si et seulement si $k \geq 0$. On va étudier l'évolution des courbes données par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = kN \quad (1)$$

Comme $kN = \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \Delta F$, c'est aussi l'équation de la chaleur.

Le résultat est le suivant:

Théorème 1.1 (Gage-Hamilton 1986). *Soit $F(.,0)$ une courbe $\subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , convexe. Alors il existe une famille de courbes $F(.,t)$, $t \in [0,T)$ satisfaisant l'équation (1), C^∞ , convexes. De plus $F(.,t)$ converge vers le cercle quant $t \rightarrow T$ au sens suivant:*

- 1) $\frac{r_{min}}{r_{max}} \rightarrow 1$ où r_{min} (resp. r_{max}) est le rayon du cercle inscrit (resp. circonscrit) .
- 2) $\frac{K_{min}}{K_{max}} \rightarrow 1$.
- 3) La dérivée n -ième $k^{(n)} \rightarrow 0$ pour $n \geq 1$.

Le schéma de preuve est le suivant. On démontre d'abord l'existence du flot en temps petit. Ensuite on minore la courbure par un principe du maximum, ce qui donne la convexité (stricte). La majoration s'obtient en passant par un contrôle intégral de la courbure en fonction de l'aire du domaine bordé par la courbe. Un contrôle sur la courbure et ses dérivées assure que le flot va à son terme, i.e. jusqu'à aire nulle. Le contrôle de la géométrie se fait via le rapport isopérimétrique $\frac{L^2}{A}$ et en utilisant des arguments de comparaison. On montre aussi que pour une courbe plongée quelconque, le flot produit des courbes plongées tant que la courbure reste bornée. Cela sera utile pour [Gr].

1.3 Formulaire

Quelques formules utiles

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N \text{ et } \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} T \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v = -vk^2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\int_0^{2\pi} k^2 ds \quad (7)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \int_0^{2\pi} k \, ds = -2\pi \quad (8)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 \quad (9)$$

preuve: On obtient (4) et (6) en écrivant $\frac{\partial \theta}{\partial t} N = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} + k^2 \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (kN) + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N + k \frac{\partial N}{\partial s} + k^2 T$ et en utilisant $\frac{\partial}{\partial s} \langle N, N \rangle = \frac{\partial}{\partial s} \langle N, T \rangle = 0$. Pour (6), on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v^2 &= 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u} (kN), vT \right\rangle \\ &= -2 \left\langle kN, \frac{\partial v}{\partial u} T + v \frac{\partial T}{\partial u} \right\rangle \\ &= -2 \langle kN, v^2 kN \rangle = -2v^2 k^2 \end{aligned}$$

On en déduit (7). Pour la formule de l'aire, on part $A = -\frac{1}{2} \int_0^L \langle F, N \rangle \, ds$ (formule de Stokes avec $\operatorname{div}(F) = 2$). On dérive cette expression et on intègre par parties

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \langle F, N \rangle \, ds &= \int_0^L \left\langle \frac{\partial}{\partial t} F, N \right\rangle + \langle F, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle \, ds + \int_0^{2\pi} \langle F, N \rangle (-vk^2) \, du \\ &= \int_0^L k \, ds + \int_0^{2\pi} \left\langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \right\rangle \, du - \int_0^{2\pi} \langle F, N \rangle vk^2 \, du \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \langle vT, kT \rangle + \langle F, k \frac{\partial T}{\partial u} \rangle - vk^2 \langle F, N \rangle \, du \\ &= 2\pi + \int_0^L k \, ds = 4\pi \end{aligned}$$

La formule (9) est la plus importante. On l'obtient en partant en dérivant $k = \frac{\partial \theta}{\partial s}$ et utilisant (3) et (4)□.

2 Points clés de la preuve

2.1 Existence en temps petit

Gage-Hamilton utilisent un théorème général d'existence pour les sous variétés compactes M immergées dans M' , satisfaisant $\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$. Ce théorème utilise lui-même le résultat fondateur d'Hamilton sur les équations d'évolution avec conditions d'intégrabilité ([H] théorème 5.1). L'équation n'étant que faiblement parabolique, la preuve requiert le théorème d'inversion de Nash-Moser.

Théorème 2.1. *Soit $F(., 0)$ a courbe C^∞ , plongée dans \mathbb{R}^2 . Alors il existe une unique solution $F : S^1 \times [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation (1).*

Comme l'indiquent Gage et Hamilton en remarque, pour une courbe initiale strictement convexe, on peut éviter cette machinerie en remplaçant l'étude de la courbe par celle de la fonction courbure, qui

lui est équivalente. On obtient une équation parabolique et on peut utiliser des résultats standards d'existence.

Proposition 2.2. *Soit $k(\theta)$ une fonction 2π -périodique. Elle est la courbure d'une courbe simple C^2 strictement convexe si et seulement si*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = 0$$

preuve: Partant d'une courbe, on a $\frac{(\cos(\theta), \sin(\theta))}{k(\theta)} d\theta = \frac{T(\theta)}{k(\theta)} d\theta = T(s)ds = \frac{\partial F}{\partial s} ds$ d'où la nullité de l'expression. Réciproquement, on vérifie sans peine que

$$F(\theta) = (a, b) + \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha, \sin \alpha)}{k(\alpha)} d\alpha \quad (10)$$

est une solution \square .

Les variables θ et t ne sont pas indépendantes. On pose $\tau = t$ et $\frac{\partial}{\partial \tau}$ est la dérivation à θ fixé. On a

Lemme 2.3.

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \quad (11)$$

preuve: On a

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2$$

et

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} \quad \square$$

Proposition 2.4. *Le problème d'existence est équivalent au problème de Cauchy suivant: chercher $k : S^1 \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$i) k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \epsilon]) \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

$$ii) k(\theta, 0) = \psi(\theta) \text{ où}$$

$$a) \psi \in C^{1+\alpha}(S^1) \quad b) \psi(\theta) > 0 \quad c) \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\psi(\theta)} d\theta = 0$$

preuve: Le problème initial implique celui-ci. Réciproquement, partant d'une solution k , on définit $F(\theta, \tau)$ comme en (10) avec $(a, b)(\tau)$. Après une intégration par parties, on voit que

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T$$

si on impose $(a', b')(\tau) = \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}(0, \tau), -k(0, \tau) \right)$. L'équation va avoir la bonne forme après un changement de paramètres. On cherche une variable $u(\theta, t)$ avec $t = \tau$. On pose $G(\theta, t) = F(u(\theta, t), t)$. Alors

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial t} T + kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T = kN$$

si on choisit $u(\theta, t)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial t}(\theta, t) = \frac{1}{v(u(\theta, t))} \frac{\partial k}{\partial \theta}(u(\theta, t))$, avec pour donnée initiale $u(\theta, 0) = \theta$. On n'a pas d'explication pour le $C^{2+\alpha, 1+\alpha}$ \square .

Pour l'existence et l'unicité dans le problème de Cauchy, on peut voir [T]. th. 8.1 page 338.

2.2 Convexité

Lemme 2.5. *Si $F(., 0)$ est convexe et $F : S^1 \times [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est solution de (1) alors $F(., t)$ est strictement convexe pour $t > 0$.*

preuve: tout repose sur l'équation (lemme 3.1.6 dans [GH], formule 9) uniformément parabolique

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 \quad (12)$$

Les variables s, t ne sont pas indépendantes mais en revenant aux variables u, t , on voit que (25) se met sous la forme

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2} - \frac{\frac{\partial v}{\partial u}}{v^3} \frac{\partial k}{\partial u} + k^3 \quad (13)$$

On dit qu'un opérateur différentiel $L(f) = a \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + b \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}$ agissant sur $f : S^1 \times [0, \epsilon)$, avec a, b bornées, est faiblement parabolique si $a(u, t) \geq 0$ et uniformément parabolique si $a(u, t) \geq a_0 > 0$. Posons $m = \min\{f(u, 0), u \in S^1\}$ et soit $h : S^1 \times [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on a

Théorème 2.6 (principe du maximum faible). *On suppose L faiblement parabolique. Si $(L + h)f \leq 0$ et $m.h(u, t) \geq 0$ sur $S^1 \times [0, \epsilon)$, alors $f(u, t) \geq m$ sur $S^1 \times [0, \epsilon)$*

Théorème 2.7 (principe du maximum fort). *On suppose L uniformément parabolique. Si $(L + h)f \leq 0$ et $m.h(u, t) \geq 0$ sur $S^1 \times [0, \epsilon)$ alors $f(u, t) > m$ pour $t > 0$.*

- pour les preuves, voir le théorème 1 p160 de [PW] (en fait il faut redémontrer le thm dans la version (L+h)) et le théorème 7 p174 . Certains arguments utilisés réapparaissent dans la section 2.3. On a évidemment le principe du "Maximum" pour $M = \max\{f(u, 0), u \in S^1\}$, si $(L + h)f \geq 0$ et $M.h(u, t) \leq 0$ -

L'équation (13) est de la forme $(L + h)k = 0$ avec $h = k^2$. Elle est uniformément parabolique car le coefficient $\frac{1}{v^2}$ est minoré par $\min\{\frac{1}{v^2(u, 0)}, u \in S^1\} > 0$ d'après la formule (6).

La fonction courbure k satisfait donc les deux principes énoncés. Partant d'une courbe convexe, i.e. $k \geq 0$, le principe faible assure que le flot laisse les courbes convexes. Le principe fort assure alors que $k > 0$ sur $S^1 \times]0, \epsilon)$ \square .

Remarquons que s'il y a des segments ($k = 0$) dans la courbe initiale, ils disparaissent immédiatement quand la courbe évolue suivant le flot. Le facteur $k^2 \geq 0$ permet donc d'avoir facilement un mino- rant de la courbure mais pas un majorant. La majoration est faite dans la section 2.4, mais c'est plus cher, comme chez Hamilton.

2.3 courbe plongée

On montre qu'une courbe plongée, non nécessairement convexe, est déformée par le flot en une courbe plongée tant que la courbure reste bornée. Ce résultat est nécessaire dans le cas des courbes

quelconques (cf [Gr]).

Proposition 2.8. Soit $F : S^1 \times [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation d'évolution (1). Si $|k(u, t)| \leq c$ et si $F(\cdot, 0)$ est plongée, alors $F(\cdot, t) : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plongée pour chaque t .

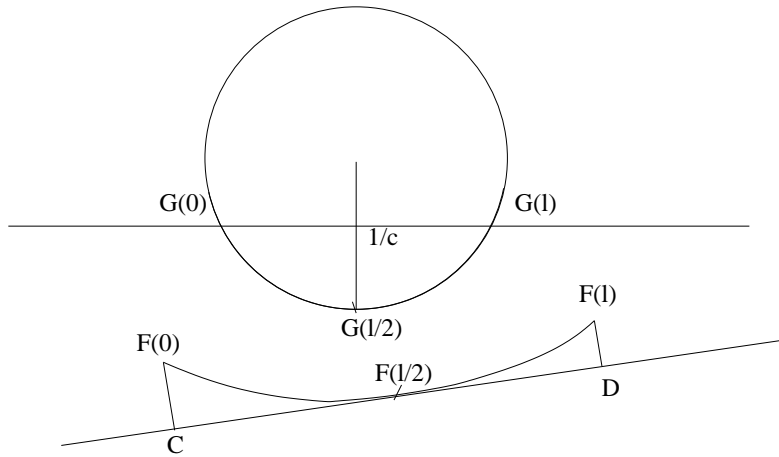
preuve: Supposons donc que $|k(u, t)| \leq c$ sur $S^1 \times [0, \epsilon)$. On veut montrer l'injectivité de la fonction $f(u_1, u_2, t) = \|F(u_1, t) - F(u_2, t)\|^2$ relativement aux deux premières variables.

premier cas

Pour des arcs de courbe de longueur $< \frac{\pi}{2c}$, on utilise un argument de comparaison avec des arcs de même longueur sur le cercle de courbure c . Soit $E = \{(u_1, u_2, t) \in S^1 \times S^1 \times [0, \epsilon) | s(u_1, u_2, t) := \int_{u_1}^{u_2} v \, du < \frac{\pi}{2c}\}$. Prenons un point dans E et notons $\ell = s(u_1, u_2, t)$ la longueur de l'arc. Sur le cercle de courbure c , la distance entre les extrémités de l'arc de longueur ℓ vaut $\frac{2}{c} \sin(\frac{c\ell}{2})$. Comme

$$\frac{\partial \theta_F}{\partial s} = k_F \leq c,$$

la variation de θ_F est $< \pi$ le long de l'arc. Quitte à reparamétriser, on peut supposer $\cos \theta_F \geq 0$. On minore la distance entre les extrémités en projetant l'arc sur la droite tangente en son milieu (voir dessin).



On obtient

$$d(F(0), F(\ell)) \geq d(C, D) = \int_0^\ell \cos(\theta_F(s) - \theta_F(\ell/2)) \, ds$$

Soit $G(s)$ un paramétrage l'arc de longueur ℓ sur le cercle de courbure c tel $G(\ell/2)$ est horizontal. Comme $\frac{\partial \theta_F}{\partial s} \leq c = \frac{\partial \theta_G}{\partial s}$, on a $|\theta_F(s) - \theta_F(\ell/2)| \leq |\theta_G(s)|$ d'où

$$\int_0^\ell \cos(\theta_F(s) - \theta_F(\ell/2)) \, ds \geq \int_0^\ell \cos(\theta_G(s)) \, ds = d(G(0), G(\ell)) = \frac{2}{c} \sin(\frac{c\ell}{2})$$

On a donc

$$f(u_1, u_2, t) \geq \left(\frac{2}{c} \sin(\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t)) \right)^2$$

sur E .

deuxième cas

Sur le complémentaire $D = S^1 \times S^1 \times [0, \epsilon) - E$, on utilise un principe du maximum, en partant de l'équation, facilement calculable,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - 4 \quad (14)$$

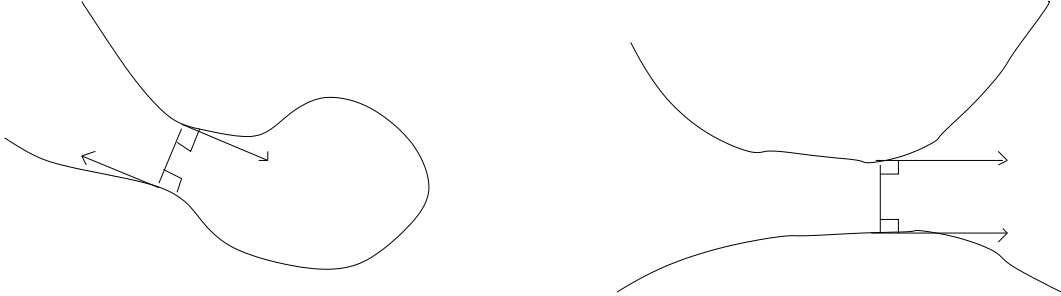
Le résultat précédent et l'hypothèse de plongement de la courbe initiale implique que $f \geq m > 0$ sur ∂D . Supposons que $0 < f(u_1, u_2, t) \leq m - \delta$ pour un point intérieur à D . On considère la fonction auxiliaire $g = f + \epsilon t$ qui satisfait l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \epsilon \quad (15)$$

On a $0 < g(u_1, u_2, t) < m - \frac{\delta}{2}$ pour un choix d' ϵ assez petit et $g \geq m$ sur ∂D . Soit $(u'_1, u'_2, t_0) \in \overset{\circ}{D}$ tel que $g(u'_1, u'_2, t_0) = m - \frac{\delta}{2}$ et t_0 est minimal. En ce point, on a d'une part $\frac{\partial g}{\partial t} \leq 0$. D'autre part, c'est un minimum de g à t fixé. Cela implique $\Delta g \geq 4$. En effet,

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}} \geq 2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right| \quad (16)$$

la dernière inégalité résultant de ce que la hessienne de g est positive au point considéré (c'est un minimum). Maintenant, on calcule que $\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = -2 \langle T(u'_1, t_0), T(u'_2, t_0) \rangle = \pm 2$ car $T(u'_1, t_0)$ et $T(u'_2, t_0)$ sont nécessairement colinéaires pour un couple (u'_1, u'_2) minimisant g (dessin ci-dessous).



D'où $\frac{\partial g}{\partial t} \geq \epsilon$, ce qui contredit l'inégalité $\frac{\partial g}{\partial t} \leq 0$ \square .

2.4 borne sur k

On a existence en temps petit d'un flot de courbes convexes (strictes pour $t > 0$). D'après le formule (8), on voit que le flot s'arrête nécessairement en temps fini. Il s'agit de montrer qu'on peut le poursuivre jusqu'au bout. Dans cette section, on montre que la courbure reste bornée tant que l'aire n'est pas nulle. Le point clé est de contrôler l'entropie $\int \log(k(\theta, \tau)) d\theta$. Perelman utilise une fonction de ce type.

Proposition 2.9. *Soit $F : S^1 \times [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution de (1), avec $F(., t)$ strictement convexe, et $A_0 > 0$ tel que l'aire du domaine bordé par $F(., t)$ est $\geq A_0$. Alors k est borné sur $S^1 \times [0, \epsilon)$.*

preuve: On considère des courbes strictement convexes, donc on peut utiliser θ pour paramétrer la courbe. On considère comme deuxième paramètre $\tau = t$, avec $\frac{\partial}{\partial \tau}$ l'opérateur de dérivation à θ fixé. D'après le lemme 2.3 l'évolution de k suit la loi

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \quad (17)$$

C'est une équation parabolique en (θ, τ) sur $S^1 \times [0, \epsilon)$.

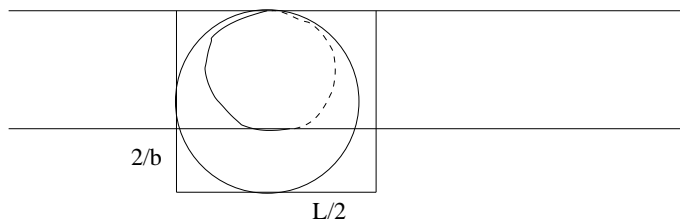
Définition 1. On définit la courbure médiane k^* d'une courbe par

$$k^* = \sup\{b | k(\theta) > b \text{ sur un arc de courbure totale } \pi\}$$

On obtient successivement une borne sur k^* , une borne intégrale sur $\log(k)$ puis une borne uniforme sur k .

Lemme 2.10. Si on note L la longueur d'une courbe convexe du plan, alors $k^* \leq \frac{L}{A}$

Preuve: Pour $b < k^*$, $k(\theta) > b$ sur un intervalle $(a, a + \pi)$. Donc les axes (parallèles) tangents à la courbe en a et $a + \pi$ sont distants de moins de $\frac{2}{b}$, diamètre du cercle de courbure b . La projection orthogonale de la courbe fermée sur l'un des axes est de longueur $\leq \frac{L}{2}$. Donc le domaine bordé par la courbe est inclus dans un rectangle d'aire $\frac{L}{b}$. Par passage à la limite, $A \leq \frac{L}{k^*}$ \square



Lemme 2.11. Si k^* est borné sur $[0, \epsilon)$, $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, \tau) d\theta$ est borné sur $[0, \epsilon)$.

Preuve: Comme $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta$ est borné, il suffit de contrôler

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, \tau) d\theta$$

En utilisant (17) et une intégration par parties, on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, \tau) d\theta = \int_0^{2\pi} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \quad (18)$$

L'idée est d'appliquer l'inégalité de Wirtinger à la fonction $k(\theta, \tau) - k^*(\tau)$. L'inégalité de Wirtinger dit que pour une fonction satisfaisant $f(a) = f(b) = 0$, avec $b - a \leq \pi$

$$\int_a^b f^2 d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \quad (19)$$

Fixons τ et considérons $U = \{\theta | k(\theta, \tau) > k^*\}$ et son complémentaire $V = S^1 - U$. Par définition de k^* , U ne contient pas d'intervalle de longueur $> \pi$. Sur chaque intervalle maximal de U , $k = k^*$ aux extrémités. En appliquant l'inégalité de Wirtinger à $k - k^*$ sur chaque intervalle et en sommant, on trouve

$$\int_U k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 d\theta \leq 2k^*(\tau) \int_0^{2\pi} k(\theta, \tau) d\theta = -2k^*(\tau) \frac{\partial L}{\partial \tau} \quad (20)$$

où la dernière égalité s'obtient par la formule (7). Sur V , on a plus simplement

$$\int_V k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 d\theta \leq 2\pi(k^*(\tau))^2 \quad (21)$$

D'ou en sommant (20) et (21) et en intégrant (18),

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, \tau) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2 \sup(k^*)(L(0) - L(\tau)) + 2\pi(\sup k^*)^2 \tau$$

ce prouve le lemme \square .

Avant d'établir la borne ponctuelle, on montre que $k_{min}(\tau) = \inf\{k(\theta, \tau) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est croissante.

Lemme 2.12. *La fonction $k_{min}(\tau)$ est croissante.*

Preuve: Rappelons que $k(\theta, \tau) > 0$ pour $\tau > 0$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $k_{min}(\tau) = k_{min}(0) - \varepsilon$. Soit $\tau_0 = \inf\{\tau | k_{min}(\tau) = k_{min}(0) - \varepsilon\} > 0$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel $g(\theta_0, \tau_0) \leq g(\theta, \tau_0)$. Alors, on a

$$\frac{\partial k}{\partial \tau}(\theta_0, \tau_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2}(\theta_0, \tau_0) \geq 0, \quad (22)$$

ce qui contredit (17) puisque $k(\theta_0, \tau_0) > 0$ \square .

Lemme 2.13. *Si $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, \tau) d\theta$ est borné sur $[0, \varepsilon)$, alors $k(\theta, \tau)$ est borné sur $[0, \varepsilon)$.*

Preuve On déduit facilement de l'hypothèse et de la croissance de $k_{min}(\tau)$ que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta)$ tel que $k(\theta, \tau) \leq C(\delta)$ sauf sur un ensemble de mesure $\leq \delta$. Il suffit donc de majorer $k(\theta, \tau)$ sur des intervalles $[a, b]$ de longueur $\leq \delta$, avec $k(\theta, \tau) \leq C(\delta)$ aux extrémités. Fixons un τ et un tel $[a, b]$. D'une part, on a pour $\varphi \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} k(\varphi) &= k(a) + \int_a^\varphi \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \\ &\leq C(\delta) + \sqrt{\delta} \left(\int_a^\varphi \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 d\theta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

D'autre part, il existe une constante D indépendante de τ telle que $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2(\theta, \tau) d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2(\theta, \tau) d\theta + D$ pour $0 \leq \tau \leq \varepsilon$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 - k^2 d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial \tau} - k \frac{\partial k}{\partial \tau} d\theta \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k\right) \frac{\partial k}{\partial \tau} d\theta \\ &= -2 \int_0^{2\pi} k^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k\right)^2 d\theta \leq 0 \end{aligned}$$

donc on peut prendre $D = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta, 0) \right)^2 - k^2(\theta, 0) d\theta$. On a donc,

$$k(\varphi) \leq C(\delta) + \sqrt{\delta} \left(\int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D \right)^{1/2} \leq C(\delta) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max}(\tau) + \sqrt{\delta D}$$

En particulier $k_{max}(\tau) \leq C(\delta) + \sqrt{2\pi\delta} k_{max}(\tau) + \sqrt{\delta D}$ d'où si on choisi $\delta < (2\pi)^{-1}$, $k_{max}(\tau) \leq \frac{C(\delta) + \sqrt{\delta D}}{1 - \sqrt{2\pi\delta}}$ et la majoration est indépendante de τ \square .

Tous ces résultats prouvent la proposition \square .

2.5 Borne sur $\frac{\partial^n k}{\partial \theta^n}$

On a obtenu précédement une borne sur $k(\theta, \tau)$ en fonction de l'aire $A(\tau)$. On utilise cette borne et un principe du maximum pour contrôler les dérivées $\frac{\partial^n k}{\partial \theta^n}$.

Lemme 2.14. *Si $k(\theta, \tau)$ est borné sur $S^1 \times [0, \epsilon)$, $\frac{\partial^n k}{\partial \theta^n}$ est borné.*

Preuve: On fait la preuve pour $\frac{\partial k}{\partial \theta}$. Rappelons que pour une équation du type

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + b \frac{\partial f}{\partial \theta} + h.f$$

on a $f(\theta, \tau) \leq M = \max f(\theta, 0)$ si $a \geq 0$ et $h.M \leq 0$. On applique ceci $f(\theta, \tau) = e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta}$ pour une constante α bien choisie. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) &= \alpha e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial k}{\partial \tau} \right) \\ &= \alpha e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \right) \\ &= \alpha e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} + e^{\alpha\tau} 2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + e^{\alpha\tau} k^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + e^{\alpha\tau} 3k^2 \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \\ &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + 2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + (3k^2 + \alpha) \left(e^{\alpha\tau} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

On choisit α tel que $(3k^2 + \alpha) \leq 0$. On obtient

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} \leq M e^{-\alpha\tau}$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur, il faut passer par un contrôle intégral. Nous ne le ferons pas ici \square .

2.6 Existence du flot en temps maximal

Dans les sections précédentes, on a vu l'existence locale d'un flot de courbes C^∞ , convexes et de courbure bornée tant que l'aire n'est pas nulle. On va voir ici qu'on peut prolonger le flot jusqu'à l'annulation de l'aire. Comme on a $\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi$, cela revient à définir le flot sur $[0, \frac{A_0}{2\pi})$, où A_0 est l'aire du domaine bordé par la courbe initiale.

Lemme 2.15. Soit $F(., 0)$ une courbe $\subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , convexe. Notons A_0 l'aire du domaine bordé par $F(., 0)$. Alors $F : S^1 \times [0, \frac{A_0}{2\pi}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ existe et satisfait (1). Pour chaque $t \in [0, \frac{A_0}{2\pi})$, $F(., t)$ est une courbe C^∞ , convexe.

preuve: Il suffit de montrer que si le flot est défini sur $[0, t_0)$, avec $t_0 < \frac{A_0}{2\pi}$, alors pour $\varepsilon > 0$ on peut le prolonger sur $[0, t_0 + \varepsilon)$. A est strictement minoré sur $[0, t_0]$. D'après la proposition 2.9 et le lemme 2.14, la courbure et ses dérivées sont bornées sur $S^1 \times [0, t_0]$. On en déduit que la courbe limite $F(., t_0)$ est C^∞ , plongée et on peut réutiliser l'existence en temps petit pour prolonger le flot \square .

3 Contrôle géométrique de la limite

Le flot est donc défini jusqu'à que l'aire du domaine bordé soit nulle. Dans un travail précédent, M.Gage [Ga1] avait montré que le flot décroît le rapport isopérimétrique $\frac{L^2}{A}$. Il a également montré dans [Ga2] que lorsque $A \rightarrow 0$, le rapport converge vers la valeur optimale 4π . L'inégalité de Bonnesen

$$-\pi r^2 + rL - A \geq 0 \text{ pour } r_{in} \leq r \leq r_{out}$$

implique

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \left(1 - \frac{r_{in}}{r_{out}}\right)^2$$

cela prouve le point 1) du théorème 1.1.

Nous ne détaillons pas cette partie mais faisons quelques remarques sur le point de vue fonctionnel

L'équation comme le flot d'une fonctionnelle

Le flot étudié est celui du gradient de la fonctionnelle longueur. Plus précisément, soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des courbes lisses fermées et $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ l'ouvert des courbes fermées lisses plongées. Notons $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle qui à une courbe F associe sa longueur $\int_0^{2\pi} v \, du$. Alors on a pour $h \in \mathcal{C}$,

$$\frac{d}{dt} L(F + th)_{t=0} = \int_0^{2\pi} \langle -kN, h \rangle \, v \, du = \int_F \langle -kN, h \rangle \, ds$$

Si on considère \mathcal{C} comme l'espace tangent $T_F \mathcal{C}_0$ de \mathcal{C}_0 en F et qu'on le munit du produit scalaire

$$\langle h_1, h_2 \rangle_F = \int_0^{2\pi} \langle h_1, h_2 \rangle \, v \, du = \int_F \langle h_1, h_2 \rangle \, ds$$

on a donc

$$\frac{d}{dt} L(F + th)_{t=0} = \langle -kN, h \rangle_F = \langle \nabla_F L, h \rangle_F$$

L'équation étudiée (1) est donc

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\nabla_F L \tag{23}$$

Observons que les points critiques de cette fonctionnelle, i.e. les courbes F telles que $\nabla_F L = 0$ sont les points. Si on se restreint aux courbes d'aire constante, par exemple à $\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{C}_0, A(F) = 1\}$, le gradient normalisé donne cette fois-ci

$$\nabla_F(L|_{\mathcal{A}}) = \left(\frac{2\pi}{L} - k \right) N$$

Il suffit pour voir cela de projeter $\nabla_F L$ sur $T_F \mathcal{A}$, l'espace tangent à \mathcal{A} , qui s'obtient comme orthogonal pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ du gradient de l'aire $\nabla_F A = -N$. Les points critiques sont cette fois-ci les courbes de courbure constante. Les deux flots de gradients ne sont pas équivalents par normalisation. C'est à dire qu'une solution $F(\cdot, t)$ de (23), correctement normalisée en $\tilde{F}(\cdot, \tilde{t}) = \frac{F(\cdot, t)}{\sqrt{A(t)}}$ ne donne pas en général une solution du flot du gradient normalisé. Par ailleurs, ce dernier semble moins facile à traiter du point de vue analytique.

Comparons avec ce qui se passe sur une variété M de dimension 3. La fonctionnelle $S(g) = \int_M \text{scal}_g(m) dv_g(m)$ admet comme gradient sur l'espace des métriques \mathcal{M}

$$\nabla_g S = \frac{\text{scal}_g}{2} g - Ric_g$$

Les points critiques sont les métriques dites Ricci plates, i.e. $Ric_g = 0$, ce qui se voit en traçant l'équation. Le gradient normalisé sur l'espace des métriques de volume 1, \mathcal{M}_1 , donne

$$\nabla_g(S|_{\mathcal{M}_1}) = \frac{\text{scal}_g}{3} g - Ric_g$$

et les points critiques sont cette fois exactement les métriques d'Einstein, ce qui donne les métriques à courbure sectionnelle constante dans le cas particulier de la dimension 3. Cependant, il n'y a pas existence de flot pour ces gradients. C'est ce qui a conduit Hamilton à considérer les équations $\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_g$ et $\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\frac{r_g}{3}g - Ric_g)$ où r_g est la *moyenne* de la courbure scalaire. Cette fois-ci, il y a existence de solutions, mais ce flot n'est pas le flot d'un gradient. Un des apports de Perelman est de montrer qu'on peut le voir comme un flot de gradient, à *difféomorphisme près*.

Fin de la preuve du théorème 1.1

Nous allons détailler le point 2) du théorème. Nous avons besoin d'une amélioration du contrôle géométrique obtenu grâce à la courbure médiane k^* .

Définition 2. Pour $w \in [0, \pi]$, soit

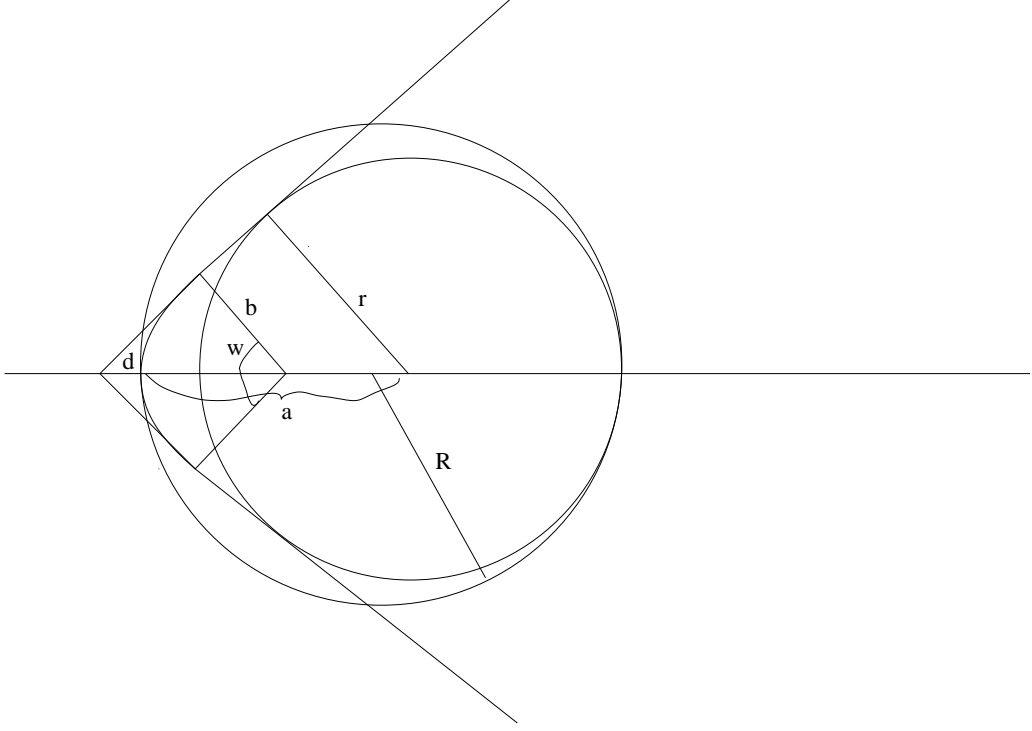
$$k_w^*(t) = \sup\{M, k(\theta, t) > M \text{ sur un intervalle de courbure totale } w\} \quad (24)$$

Lemme 3.1. On a

$$k_w^*(t)r_{in}(t) \leq \frac{1}{1 - G(w)\epsilon_w(t)} \quad (25)$$

où $\epsilon_w(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow T_0$ et $G(w)$ est une fonction positive décroissante telle que $G(0) = \infty$ et $G(\pi) = 0$.

preuve: Fixons t et $M < k_w^*(t)$. Donc $k(\theta, t) > M$ sur un arc de longueur angulaire w . Quitte à faire une rotation, on se ramène à la configuration suivante,



où l'arc circulaire est d'angle w et de rayon $b = \frac{1}{M}$, R est le rayon minimal d'un cercle contenant la courbe et centré sur l'axe bisecteur de l'arc, et r est le rayon maximal d'un cercle centré sur l'axe et coincé entre le cône et le grand cercle. Notons que M , R et r dépendent de t . De plus, observons que $R \geq r_{out}$, $r \geq r_{in}$ et que $\frac{R}{r_{out}}(t)$ et $\frac{r}{r_{in}}(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow T_0$ car $\frac{r_{in}}{r_{out}} \rightarrow 1$. On a

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{b}{b+d} = \frac{r}{a+d} \quad (26)$$

$$2R = r + a \quad (27)$$

On veut relier $Mr = \frac{r}{b}$ à $\frac{R}{r} - 1$, qui sera le $\epsilon_w(t)$. De (27), on tire

$$\frac{R}{r} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2r} \quad (28)$$

De (27), on écrit a en fonction des paramètres w , b ,

$$a = \frac{r}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - d = \frac{r}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - \frac{b(1 - \cos\left(\frac{w}{2}\right))}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)}$$

En remplaçant dans (28), on trouve

$$\frac{R}{r} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - \frac{b(1 - \cos\left(\frac{w}{2}\right))}{2r \cos\left(\frac{w}{2}\right)} = H(w) - \frac{b}{r}H(w)$$

où on a posé $H(w) = \frac{1 - \cos\left(\frac{w}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{w}{2}\right)}$. On en déduit, en posant $G(w) = (H(w))^{-1}$,

$$\frac{r_{in}}{b} \leq \frac{r}{b} = \frac{1}{1 - G(w)\left(\frac{R}{r} - 1\right)}$$

et on a le résultat en faisant tendre $\frac{1}{b} = M$ vers $k_w^*(t)$ et en prenant pour $\epsilon_w(t)$ une fonction qui majore $\frac{R}{r}(t) - 1$ pour M proche de $k_w^*(t)$. \square .

Corollaire 3.2. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$K_{MAX}(t)r_{in}(t) \leq \frac{1}{1-\epsilon} \text{ pour } t(\epsilon) < t < T_0 \quad (29)$$

Preuve: Fixons $\epsilon > 0$ et $t \in [0, T_0]$. Soit $a \in [0, 2\pi]$ tel que $k(a, t) = K_{MAX}(t)$. Alors, on a vu dans la preuve du lemme 2.13 que pour $\varphi \in [a - \frac{w}{2}, a + \frac{w}{2}]$,

$$\begin{aligned} |k(\varphi) - k(a)| &\leq \int_a^\varphi \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \\ &\leq \sqrt{\frac{w}{2}} \left(\sqrt{2\pi} k_{MAX} + \sqrt{D} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} k(\varphi) &\geq (1 - \sqrt{\pi w}) k_{MAX} - \sqrt{wD/2} \\ &\geq (1 - 2\epsilon) k_{MAX} \end{aligned}$$

si $w \leq w(\epsilon)$, indépendamment de t . D'où $k_w^*(t) \geq (1 - 2\epsilon) k_{MAX}(t)$. En utilisant le lemme précédent, on en déduit

$$k_{MAX}(t)r_{int} \leq \frac{1}{1-2\epsilon} \frac{1}{1-G(w)\epsilon_w(t)}$$

et on a le résultat en prenant t assez proche de T_0 \square .

Proposition 3.3. *$k(\theta, t)r_{in}(t)$ converge uniformément vers 1 quand $t \rightarrow T_0$.*

preuve: La famille de fonctions $k(\cdot, t)r_{in}(t)$ est bornée et en reprenant les calculs faits ci-dessus, on montre facilement qu'elle est équicontinue. Soit $k(\cdot, t_i)r_{in}(t_i)$ une sous suite convergente et notons $f(\theta)$ la fonction limite. D'après le lemme précédent, $f(\theta) \leq 1$. La suite de fonctions $(k(\cdot, t_i)r_{in}(t_i))^{-1}$ converge simplement vers la fonction $f(\theta)^{-1}$ à valeurs dans $[1, +\infty]$. On a $\int \frac{d\theta}{f(\theta)} \geq 2\pi$. D'autre part, le lemme de Fatou pour les fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$ implique

$$\begin{aligned} 2\pi &\leq \int \frac{d\theta}{f(\theta)} = \int \liminf \frac{1}{k(\cdot, t_i)r_{in}(t_i)} d\theta \\ &\leq \liminf \int \frac{d\theta}{k(\cdot, t_i)r_{in}(t_i)} \\ &\leq \liminf \frac{L(t_i)}{r_{in}(t_i)} = 2\pi \end{aligned}$$

d'où $f(\theta) = 1$ \square .

On en déduit que $\frac{k_{MAX}}{k_{MIN}}(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow T_0$ \square .

References

- [H] Hamilton R. S., *three-manifolds with positive ricci curvature*, J. Differential Geometry 17 (1982) 255-306.

- [Ga1] Gage M.E., *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*, Duke Math. Journal 50 No 4, (1983) 1225-1229.
- [Ga2] Gage M.E., *Curve shortening process makes convex curves circular*, Invent. Math. 76, (1984) 357-364.
- [GH] Gage M.E., Hamilton R. S., *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential geometry 23 (1986) 69-96.
- [Gr] Grayson M., *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geometry 26 (1987) 285-314.
- [PW] Protter M.H., Weinberger H.F, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, 1967.
- [T] Taylor M., *Partial differential equations III*, Springer Applied Math. Sciences 117.